

Instabilités structurales des barres

Flambement et déversement

par **René MAQUOI**

Ingénieur civil des constructions

Professeur émérite de l'université de Liège

1. Contexte	C 2 511 – 2
2. Présentation des instabilités des barres	— 2
3. Flambement par flexion	— 3
3.1 Charge critique élastique	— 3
3.2 Longueur de flambement	— 3
3.3 Imperfections géométriques	— 3
3.4 Effets d'un domaine fini de comportement élastique	— 4
3.5 Effets des imperfections géométriques	— 5
3.6 Effets des contraintes résiduelles	— 6
3.7 Détermination de la charge ultime de flambement par flexion	— 7
4. Flambement par torsion et par flexion-torsion	— 9
4.1 Charges critiques élastiques	— 9
4.2 Détermination de la charge ultime de flambement par torsion ou par flexion-torsion	— 10
5. Déversement des poutres	— 11
5.1 Généralités	— 11
5.2 Moment critique élastique de déversement	— 11
5.2.1 Cas de référence	— 11
5.2.2 Influence d'une mono-symétrie de la section	— 14
5.2.3 Influence d'un point de symétrie	— 14
5.2.4 Influence de la forme du diagramme des moments	— 14
5.2.5 Influence du niveau d'application des charges transversales	— 15
5.2.6 Influence des conditions d'appui	— 16
5.2.7 Restreintes intermédiaires	— 17
5.2.8 Expression générale du moment critique élastique de déversement	— 17
5.3 Détermination du moment ultime de déversement	— 18
6. Conclusion	— 19
Pour en savoir plus	Doc. C 2 511

Lorsqu'ils sont comprimés, sur tout ou partie de leur section transversale, les éléments structuraux de type « barre » sont susceptibles de voir leur capacité portante affectée par les phénomènes d'instabilité. S'agissant d'un élément comprimé axialement (poteau), un tel phénomène est désigné « flambement ». Pour un élément soumis à flexion (poutre) autour de l'axe de forte inertie de sa section transversale, sous l'action de moments d'extrémité et/ou de charges transversales, on parle plutôt de « déversement ». L'instabilité se manifeste d'autant plus que l'élancement de la barre est important.

Dans le présent dossier, on introduit les principes de base ayant conduit à l'élaboration des courbes adimensionnelles de flambement et de déversement. La procédure de mise en œuvre pratique de celles-ci dans le cadre de vérifications réglementaires est développée par ailleurs, plus précisément dans les dossiers traitant des composants de construction métalliques comprimés ou fléchis.

1. Contexte

Pour l'étude de la capacité portante d'un élément structural, on suppose, d'abord, l'élément idéalement parfait. Sa résistance est alors donnée, soit par la résistance en section, déterminée sur base d'un comportement élastique-parfaitement plastique, soit par la charge critique élastique. Ces deux quantités constituent les bornes supérieures de la réponse structurale des éléments de fabrication industrielle, qui est cette fois affectée par les effets défavorables des imperfections géométriques et structurales inévitablement présentes.

Pour de grands élancements, le comportement est pour ainsi dire élastique et la capacité portante tend vers la valeur de la charge critique élastique de flambement, pour les poteaux, ou celle du moment critique élastique de déversement, pour les poutres.

Dans le domaine des faibles élancements, les effets de l'instabilité sont plus que compensés par les effets d'écrouissage du matériau et la capacité portante est alors donnée par la résistance en section.

Le domaine des élancements modérés couvre la plupart des situations rencontrées en pratique ; c'est celui où les effets des imperfections se marquent le plus. La capacité portante y résulte d'une interaction prononcée entre plastification et instabilité élastique.

Selon les propriétés de la section transversale, le flambement des poteaux peut survenir sous diverses formes : par flexion autour d'un des axes principaux d'inertie (flambement par flexion), par torsion autour de l'axe longitudinal (flambement par torsion), ou selon un mode associant déformations de flexion et de torsion (flambement par flexion-torsion). Le déversement est une instabilité spatiale associant une flexion d'axe faible et une torsion.

La résistance ultime des poteaux/poutres est obtenue comme une pénalisation apportée à la résistance axiale/en flexion de la section transversale par le biais d'un coefficient de réduction au flambement/déversement.

La valeur du coefficient de réduction s'obtient en fonction de l'élancement de flambement/déversement à partir des expressions analytiques de courbes de flambement et/ou de déversement adimensionnelles. Il y a diverses courbes de flambement/déversement qui traduisent, en particulier, les effets variables, sur la capacité portante, des contraintes résiduelles selon la massivité des sections, leur mode d'élaboration, l'axe de flexion (pour le flambement) et la nuance d'acier. Le choix de la courbe à appliquer dans une situation donnée se fait à partir d'une table de sélection faisant intervenir les paramètres précités.

2. Présentation des instabilités des barres

Les principes généraux des instabilités structurales ont été décrits dans un premier dossier [6]. Autant que faire se pouvait, l'exposé en est resté au plan des concepts de base et il n'a été fait appel à un phénomène particulier d'instabilité qu'à titre d'illustration de la matière traitée.

Le présent dossier aborde les instabilités propres aux barres, c'est-à-dire aux éléments structuraux longilignes dont la longueur est grande vis-à-vis des dimensions de la section transversale. D'autres dossiers traiteront des instabilités propres aux plaques et aux coques, éléments structuraux dont deux dimensions sont grandes vis-à-vis de la troisième, à savoir l'épaisseur.

La compression est la sollicitation susceptible de générer l'instabilité structurale. On a ainsi vite fait l'inventaire des problèmes élémentaires présentés par les barres qu'il importe d'aborder ici.

■ Il y a tout d'abord la **compression axiale** ou supposée telle. On la rencontre notamment dans les poteaux d'ossatures contreventées, dans certaines barres des poutres en treillis à nœuds présumés articulés, dans certaines barres de contreventement,...

La compression strictement axiale est assez rare en pratique. Elle est assez fréquemment accompagnée de flexion en raison, soit de moments d'extrémité parasites dus à d'inévitables restraints (voir **Nota**) au niveau des assemblages, soit de forces transversales (poids propre, actions du vent...), voire d'une combinaison de ces deux effets.

• Dans de très nombreux cas, ces sollicitations additionnelles sont suffisamment faibles pour pouvoir être négligées, à tout le moins sous sollicitations statiques. Ceci justifie donc amplement l'examen du comportement des barres sous compression axiale. Le phénomène d'instabilité associé est désigné sous l'appellation **flambement**. Plus précisément, le flambement peut se manifester sous diverses formes selon les spécificités de la section transversale. Ainsi, on distingue :

- **flambement par flexion**, où la pièce comprimée quitte sa position initialement rectiligne pour fléchir dans un des plans principaux d'inertie de la section droite ;
- **flambement par torsion**, pour lequel l'axe longitudinal de la pièce comprimée conserve sa position initialement rectiligne, tandis que chaque section transversale tourne autour de cet axe ;
- **flambement par flexion-torsion**, qui consiste en un flambement interactif associant les deux types de flambement précités et se manifeste donc sous la forme de déformations conjointes de flexion et de torsion.

• Chacune de ces formes de flambement est caractérisée par une charge critique élastique désignée N_{cr} pour le flambement par flexion, $N_{cr,T}$ pour le flambement par torsion et $N_{cr,TF}$ pour le flambement par flexion-torsion. Selon le type et la géométrie de la section transversale, soit la charge critique élastique de flambement par torsion, soit celle de la charge critique élastique de flambement par flexion-torsion peut être trouvée inférieure à la charge critique élastique de flambement par flexion. Il en résulte que la maîtrise du seul flambement par flexion peut être cause de déboires.

Nota. Le substantif dérivé du verbe « restreindre » est « restriction ». Parce que, d'une part, ce dernier terme reflète plutôt imparfaitement le sens voulu ici et, d'autre part, afin d'éviter l'usage d'une périphrase, le terme « restriction » – qui ne semble pas exister dans la langue française – est créé pour la circonstance, par analogie avec son correspondant anglo-saxon « *restraint* ».

■ Les profilés laminés à chaud à section doublement symétrique sont particulièrement enclins au flambement par flexion. Le flambement par torsion revêt un caractère plutôt académique ; il se manifeste dans les éléments à section doublement symétrique et présentant une grande raideur flexionnelle associée à une faible raideur torsionnelle.

Le flambement par flexion-torsion est déterminant dans le cas de barres à section ouverte et à parois minces – donc à faible raideur torsionnelle – présentant un centre de gravité nettement distinct du centre de cisaillement.

On notera que les profils creux, de forme rectangulaire ou circulaire, sont, en raison de leur section fermée, dotés d'une très grande raideur torsionnelle et périssent normalement en flambement par flexion.

On rappellera enfin que l'**élancement** (voir **Nota**) est le paramètre le plus important régissant le phénomène de flambement, quelle que soit la forme prise par celui-ci. Le danger de flambement sera donc d'autant plus grand que l'élancement de la pièce comprimée est important.

Le flambement est la première des instabilités structurales rencontrées dans les barres.

Nota. Le terme *élancement* est utilisé communément pour tous les phénomènes d'instabilité structurale. La manière de le définir, et donc de l'exprimer mathématiquement, répond à un même concept, mais varie toutefois quelque peu selon le phénomène étudié.

■ Dans un élément structural soumis à flexion, une partie de la section transversale est soumise à des contraintes de compression, ce qui le rend propice au phénomène d'instabilité spécifique aux pièces fléchies : le **déversement**. Le danger de déversement sera d'autant plus grand que l'élancement de la pièce fléchie est important.

Le déversement est la seconde des instabilités structurales rencontrées dans les barres.

Par souci de simplicité, on désignera, dans la suite, par *poteau*, l'élément structural comprimé axialement, et par *poutre*, l'élément structural sollicité en flexion. Ces raccourcis de langage ne doivent pas occulter le fait que les poteaux, respectivement les poutres, ne se réduisent pas à la seule position verticale, respectivement horizontale, que ces termes pourraient éventuellement inspirer.

Le présent dossier aborde donc à la fois le flambement et le déversement.

3. Flambement par flexion

3.1 Charge critique élastique

Un poteau idéal à section uniforme doublement symétrique et chargé axialement à ses extrémités en compression peut flamber par flexion autour de l'un des axes principaux de sa section transversale sous une charge critique élastique, dite aussi « charge critique d'Euler » :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\alpha L)^2} \quad (1)$$

avec	L	longueur physique du poteau, appelée « longueur d'épure »,
	EI	raideur flexionnelle mobilisée lors du flambement,
	α	facteur traduisant l'influence des conditions d'appui aux extrémités du poteau.

Le mode critique d'instabilité pour un poteau avec appuis simples à ses deux extrémités est une demi-onde de sinusoïde.

3.2 Longueur de flambement

Habituellement, on désigne par αL la *longueur de flambement* (voir **Nota**) L_{ff} , à savoir la longueur d'un poteau fictif de même section transversale que le poteau réel, simplement appuyé à ses extrémités, qui a même charge critique élastique que le poteau réel. La longueur de flambement est souvent introduite comme la distance entre deux points d'inflexion consécutifs de la configuration du mode critique d'instabilité (éventuellement situé(s) par-delà la longueur du poteau). Une telle définition, assez commode au plan didactique parce qu'elle confère un sens physique, a toutefois ses limites et ne peut être admise en toute généralité.

Le facteur α est dit *coefficient de longueur de flambement*.

Nota. Dans la littérature, on trouve aussi le symbole L_{cr} pour désigner cette longueur de flambement.

Les appuis du poteau servant de cas de référence sont deux appuis simples ($\alpha = 1$), deux encastrement ($\alpha = 0,5$), la combinaison appui simple-encastrement ($\alpha \approx 0,7$) et la combinaison encastrement-extrémité libre ($\alpha = 2$). Un poteau extrait d'une structure a

toujours des conditions d'appui élastiques correspondant à des situations intermédiaires aux précédentes en termes de déplacement transversal relatif des extrémités, d'une part, et des rotations d'extrémité, d'autre part.

Le concept de longueur de flambement peut être généralisé au cas du poteau chargé axialement mais soumis à effort axial variable et/ou de section non uniforme sur la longueur. Il est alors nécessaire d'adopter des valeurs de référence de l'effort axial et/ou de la rigidité flexionnelle (par exemple la valeur maximale de l'effort de compression, la raideur flexionnelle la plus faible) pour exprimer les résultats.

3.3 Imperfections géométriques

On a vu précédemment [6] que, pour un poteau *idéal*, donc initialement parfaitement rectiligne et chargé strictement axialement, tout déplacement transversal du poteau ne peut survenir que lorsque la charge atteint sa valeur critique P_{cr} . Pour $P < P_{cr}$, on suit la trajectoire fondamentale d'équilibre et le poteau ne subit que des déplacements exclusivement axiaux.

Un poteau peut être géométriquement imparfait à deux égards :

- soit, il est chargé axialement, mais il est affecté d'une *déformée initiale* $w_0(x)$;
- soit, il est initialement parfaitement rectiligne, mais l'effort de compression agit avec une *excentricité* e_0 supposée constante.

Pour ce qui suit, on se réfère au poteau à section uniforme avec deux appuis simples d'extrémité. Ceux-ci autorisent une libre rotation de flexion et ne peuvent subir de déplacement différentiel dans la direction perpendiculaire à l'axe du poteau. Les conclusions qualitatives qui seront tirées plus loin peuvent être généralisées à tout autre type de poteau.

■ Dans les deux cas de poteau *géométriquement imparfait*, évoqués plus haut, le poteau est, non seulement comprimé par l'effort appliqué, mais aussi fléchi. Au premier ordre, c'est-à-dire par rapport à la configuration initiale du poteau, le moment de flexion, dit *moment primaire*, vaut $Pw_0(x)$ dans le premier cas, et Pe_0 dans le second cas.

Chacun de ces moments a évidemment pour effet d'entraîner une déformée transversale du poteau, ce qui produit un incrément de déformée et accroît d'autant le moment sollicitant. La majoration du moment crée un nouvel incrément de déformée et, donc, de moment et le processus se répète (figure 1a).

Pour l'effort P appliqué, le poteau est dit « stable » si la série des incréments successifs de la déformée converge vers une valeur finie. Dans le cas contraire, le poteau est dit « instable ».

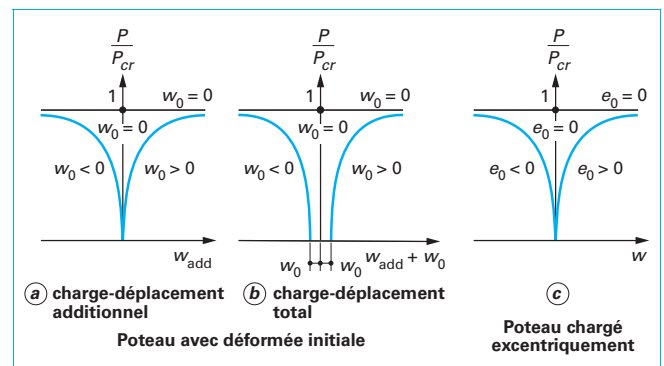


Figure 1 – Trajectoires d'équilibre

■ Dans le cas d'une déformée initiale similaire au mode critique d'instabilité, soit une demi-onde de sinusoïde, la déformée additionnelle, sous l'action d'un effort P , s'écrit :

$$w_{add}(x) = \frac{P}{P_{cr} - P} w_0(x) \quad (2)$$

de sorte que la déformée totale vaut :

$$w(x) = w_0(x) + w_{add}(x) = \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P} w_0(x) \quad (3)$$

Le moment résultant vaut :

$$M(x) = Pw(x)$$

soit, de manière plus explicite :

$$M(x) = \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P} Pw_0(x) = \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P} M_0(x) \quad (4)$$

avec $M_0(x)$ moment de flexion primaire introduit plus haut.

Le facteur multiplicateur de ce moment primaire, appelé *facteur d'amplification*, s'écrit donc :

$$\frac{M(x)}{M_0(x)} = \frac{P_{cr}}{P_{cr} - P} = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (5)$$

Il apparaît clairement qu'il n'a de sens physique que si $P < P_{cr}$.

Le flambement d'un poteau présentant une déformée initiale se produit selon un mode d'instabilité qui ne procède pas de la bifurcation de l'équilibre en raison de l'existence de moments de flexion dès le début de la mise en charge. On parle plutôt de flambement par « divergence de l'équilibre ». Dans le contexte d'une analyse linéaire du flambement, le déplacement transversal tend progressivement vers l'infini lorsqu'on approche de la charge critique (figure 1b).

■ Dans le cas d'une excentricité (constante) de la charge de compression appliquée, la déformée totale sous l'action d'un effort P s'écrit :

$$w(x) = e_0 \left(\operatorname{tg} \frac{kL}{2} \sin kx + \cos kx - 1 \right) \quad (6)$$

avec :

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (7)$$

Plus particulièrement, à mi-longueur, où, par symétrie, la déformée pour $\alpha = 1$ atteint sa valeur maximale, on a, compte tenu de l'équation (1) :

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = e_0 \left(\sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1 \right) \quad (8)$$

On notera que, mathématiquement, la déformée $w(x)$ est positive, si l'excentricité e_0 est négative, et vice-versa.

Le moment de flexion maximum est obtenu selon :

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = Pw\left(\frac{L}{2}\right) + Pe_0$$

soit :

$$M(L/2) = Pe_0 \sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) \quad (9)$$

Le facteur d'amplification du moment primaire Pe_0 vaut ici :

$$\frac{M(L/2)}{Pe_0} = \sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) \quad (10)$$

■ Tout comme dans le cas du poteau à déformée initiale, l'instabilité du poteau rectiligne chargé excentriquement ne procède pas par bifurcation d'équilibre en raison de l'existence de moments de

flexion dès le début de la mise en charge (figure 1c). La trajectoire d'équilibre évolue de manière similaire à celle obtenue pour le poteau à déformée initiale, sous réserve de se référer, pour ce dernier cas, à la courbe de la déformée additionnelle.

■ On remarquera que les facteurs d'amplification, relatifs aux deux cas examinés plus haut, sont formellement différents selon que l'imperfection géométrique est une déformée initiale ou une excentricité de la charge. Toutefois, en termes de valeurs, ils se différencient peu dans le domaine des rapports P/P_{cr} susceptibles d'être rencontrés en pratique, soit inférieurs à 0,5. Ceci justifie que l'on ait souvent assimilé le second au premier et retenu la seule forme (5).

3.4 Effets d'un domaine fini de comportement élastique

Le diagramme contrainte-déformation tiré d'un essai standardisé de traction sur un acier de construction est classiquement idéalisé par une loi bi-linéaire (figure 2). Le comportement élastique, représenté par la droite de Hooke, de pente égale au module d'élasticité E de l'acier, est suivi d'un comportement plastique, traduit par le palier d'ordonnée égale à la limite d'élasticité f_y de l'acier. On parle alors d'un comportement *élastique-parfaitement plastique*. Ce faisant, on néglige tout effet d'écrouissage, et on admet le matériau suffisamment ductile pour que la longueur du palier plastique ne soit pas particulièrement préoccupante.

Le comportement du poteau idéal fait d'un acier « élastique-parfaitement plastique » reste élastique aussi longtemps que la contrainte uniforme en section σ n'atteint pas la limite d'élasticité f_y .

■ La charge ultime P_u d'un tel poteau est donc conditionnée par la charge critique d'instabilité élastique $P_{cr} = \pi^2 EI / L_{fl}^2$, lorsque $\sigma < f_y$, plafonnée à la résistance axiale plastique en section $P_y = Af_y$, où A désigne l'aire de la section transversale :

$$P_u = \min[P_y, P_{cr}] \quad (11)$$

■ La charge critique élastique de flambement s'écrit :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{fl}^2} = \frac{\pi^2 EA}{(L_{fl}/i)^2} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} \quad (12)$$

où l'*élancement géométrique* λ , rapport entre la longueur de flambement L_{fl} et le rayon de giration $i = \sqrt{I/A}$ pour le sens de flambement considéré, est :

$$\lambda = \frac{L_{fl}}{i} \quad (13)$$

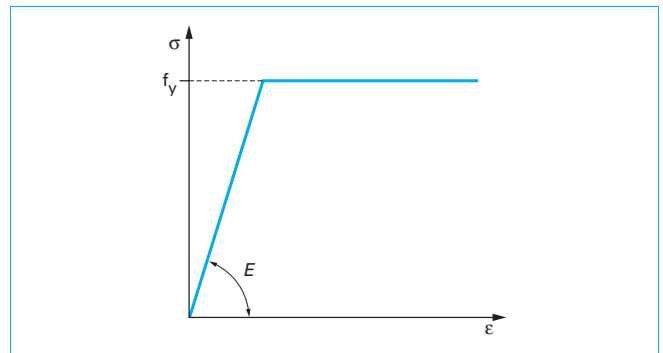


Figure 2 – Diagramme contrainte-déformation idéalisé pour un acier structural

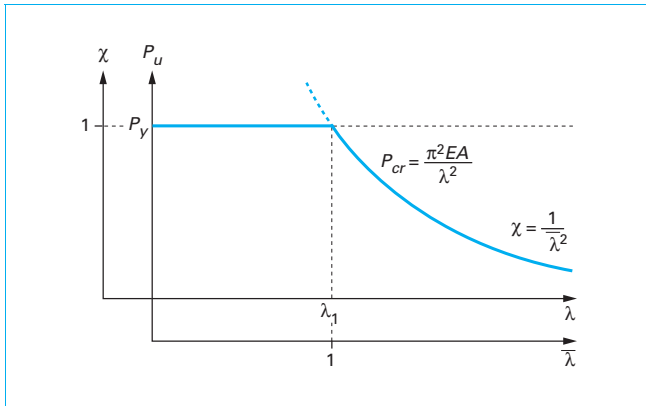


Figure 3 – Charge ultime d'un poteau idéal en acier

■ La valeur de l'élancement géométrique λ_1 en deçà de laquelle la résistance axiale plastique prend le pas sur la charge critique élastique d'instabilité est appelée **élancement de référence**. Elle s'obtient à partir de l'égalité $P_{cr} = P_y$, soit :

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (14)$$

Elle apparaît clairement comme une propriété intrinsèque du matériau, mais on notera néanmoins qu'elle varie avec la limite d'élasticité du matériau. La pratique est désormais de se référer à des valeurs relatives, à la fois, pour la charge et pour l'élancement. Ainsi, on a :

– charge relative, appelée aussi **coefficient de réduction au flambement** :

$$\chi = \frac{P_u}{P_y} \quad (15)$$

– **élancement relatif** :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{P_y}{P_{cr}}} \quad (16)$$

■ La droite $P_u = P_y$ (respect. $\chi = 1$) et l'hyperbole $P_u = \pi^2 EA / \lambda^2$ (respect. $\chi = 1 / \bar{\lambda}^2$) sont donc représentatives de la **réponse d'un poteau idéal** fait à partir d'un matériau élastique-parfaitement plastique en coordonnées dimensionnelles (respectivement en coordonnées adimensionnelles) (figure 3). Elles constituent, par ailleurs, les bornes du comportement d'un poteau industriel.

3.5 Effets des imperfections géométriques

Ainsi que déjà précisé, l'instabilité élastique d'un poteau présentant des imperfections géométriques ne se produit pas par bifurcation d'équilibre. La trajectoire de comportement (diagramme charge-déplacement) tend seulement vers la trajectoire critique (bifurcation) d'un poteau idéal lorsque l'amplitude de la déformée initiale tend vers zéro.

■ Le **poteau géométriquement imparfait** a un comportement strictement élastique jusqu'à la charge P_1 sous laquelle la fibre la plus comprimée atteint la limite d'élasticité f_y , et un comportement élasto-plastique au-delà de P_1 .

Exemple. Considérons un poteau simplement appuyé (voir **Nota**) à ses extrémités et doté d'une imperfection initiale en demi-onde de sinusoïde d'amplitude w_0 . La section critique est, de toute évidence, la section à mi-longueur, qui est soumise à effort axial P et à un

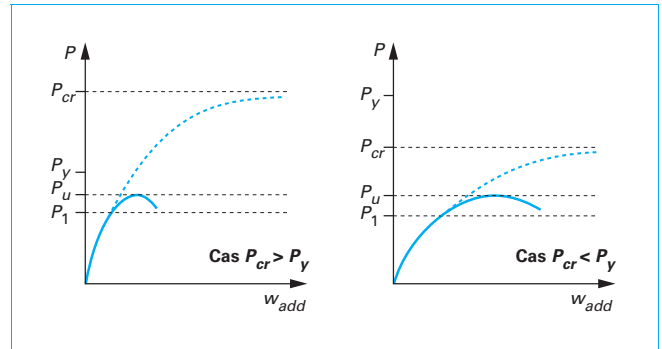


Figure 4 – Trajectoires d'équilibre d'un poteau à déformée initiale

moment égal au moment primaire Pw_0 amplifié par le facteur $1 / (1 - P/P_{cr})$. En désignant par c la distance entre l'axe neutre élastique et la fibre où se produit la contrainte maximale de compression, on peut écrire :

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pw_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \frac{c}{I} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{w_0 c}{I^2} \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \right) \quad (17)$$

La quantité $w_0 c / I^2$ peut donc être considérée comme un **facteur d'imperfection**.

La valeur P_1 de la charge se tire de la relation précédente après y avoir posé $\sigma_{max} = f_y$; la contrainte moyenne qui y correspond, soit P_1 / A , vaut :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left[f_y + \sigma_{cr} \left(1 + \frac{w_0 c}{I^2} \right) \right] - \sqrt{\left[f_y + \sigma_{cr} \left(1 + \frac{w_0 c}{I^2} \right) \right]^2 - 4 f_y \sigma_{cr}} \right\} \quad (18)$$

Cette relation, communément appelée « relation de Perry », permet de calculer la charge P_1 en fonction des propriétés de l'acier, des propriétés géométriques du poteau et de l'amplitude w_0 de l'imperfection géométrique.

Nota. Les déductions faites dans ce cas restent qualitativement valables pour d'autres cas.

Le développement qui précède correspond dans les faits à une analyse limite élastique du poteau, qui, on ne peut l'oublier, ne tient nul compte de la réserve de résistance élasto-plastique. Cette dernière dépend de la géométrie de la section transversale et sa détermination exacte exige, en général, des calculs relativement complexes.

La relation existant entre P_1 , P_y et P_u est représentée à la figure 4, où l'on notera que l'écart $(P_u - P_1)$ correspond à la réserve de résistance élasto-plastique.

La difficulté à exploiter la relation de Perry réside dans l'absence de données précises quant à l'amplitude de la déformée initiale. Robertson a été le premier à conclure, sur base de mesures des imperfections des poteaux industriels, que l'amplitude w_0 est approximativement proportionnelle à l'élancement géométrique. Il a ainsi proposé de poser $w_0 c / I^2$ égal à $0,003 \bar{\lambda}$.

Le comportement élastique d'un poteau à déformée initiale d'amplitude e_0 est représenté à la figure 5.

On notera qu'en raison de la déformée initiale, la capacité portante du poteau est réduite. Cette réduction est maximale au voisinage de $\bar{\lambda} = 1$, élancement pour lequel, dans le poteau idéal, l'atteinte de la résistance axiale plastique et l'instabilité élastique surviennent, pour ainsi dire, simultanément.

■ Si, en lieu et place d'une déformée initiale, on considère le **poteau idéal**, mais sollicité par un effort agissant avec une

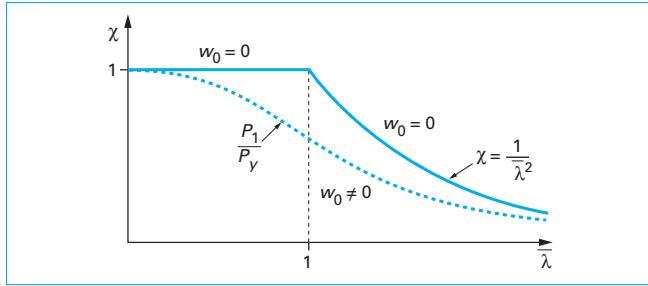


Figure 5 – Comportement élastique d'un poteau à déformée initiale

excentricité e dans le plan de flambement, on trouverait, en suivant un schéma de raisonnement similaire au précédent :

$$P_1 = \frac{4P_{cr}}{\pi^2} \left[\arccos \left(\frac{P_y - P_1}{P_1 \frac{ec}{I^2}} \right) \right]^2 \quad (19)$$

3.6 Effets des contraintes résiduelles

Un second aspect du caractère industriel des éléments structuraux réside dans la présence de contraintes résiduelles σ_{rc} .

■ Si l'on soumet un tronçon court – c'est-à-dire un poteau d'élanement très faible – dans lequel existe une distribution de contraintes résiduelles, la **réponse structurale**, en termes de contrainte moyenne appliquée et de déformation axiale, présente trois régions distinctes :

- un **tronçon linéaire**, correspondant à un comportement strictement élastique de la section ($\sigma_{max} \leq f_y$), qui se termine lorsque la contrainte moyenne appliquée $\bar{\sigma} = P/A$ est telle que, en un point, on atteint :

$$\bar{\sigma} + \sigma_{rc} \cong \sigma_p \quad (20)$$

avec σ_p limite de proportionnalité du matériau ;

- un **tronçon non linéaire**, correspondant à un comportement élasto-plastique de la section ($\sigma_{min} \leq f_y$). Au fur et à mesure que la contrainte moyenne $\bar{\sigma}$ augmente, l'étendue de la zone de la section restant élastique se réduit et la pente du diagramme $\sigma - \varepsilon$ diminue ;

- un **palier horizontal**, correspondant à un comportement plastique de la section ($\bar{\sigma} = f_y$ dans toutes les fibres longitudinales).

• La figure 6 illustre ce comportement du tronçon court de poteau dans un contexte simplifié. En effet, la section transversale en double té est idéalisée en la réduisant à ses seules semelles et la distribution des contraintes résiduelles y est modélisée par une simple forme triangulaire. Dans le domaine élastique, toute la section transversale contribue à transmettre tout surcroît dP de l'effort extérieur appliqué. Dès lors :

$$dP = Ad\bar{\sigma} = AE d\varepsilon \Rightarrow \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} = E \quad (21)$$

Ceci signifie que la pente de la loi de comportement dans ce domaine est égale au module d'élasticité de l'acier.

• Dans le domaine élasto-plastique, seules les fibres restant élastiques sont mobilisables pour transmettre l'accroissement de charge dP . On peut dès lors écrire :

$$dP = Ad\bar{\sigma} = A_{el}(P)E d\varepsilon \Rightarrow \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon} = \frac{A_{el}(P)}{A} E = \tau(P)E = E_t(P) \quad (22)$$

avec $A_{el}(P)$ aire de la zone restée élastique sous la charge P (la pente du diagramme, dans cette zone, est égale au module tangent $E_t < E$ qui diminue lorsque la charge augmente, puisque l'aire A_{el} diminue).

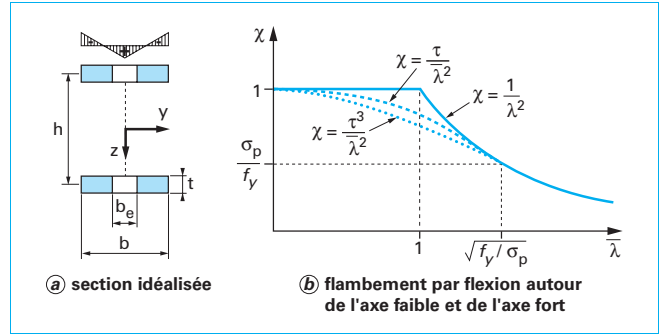


Figure 6 – Incidence des contraintes résiduelles sur la capacité portante

■ Revenons au **problème d'instabilité du poteau simplement appuyé à ses extrémités**. On notera, tout d'abord, que la présence de contraintes résiduelles n'empêche nullement l'instabilité par bifurcation de l'équilibre. Cette bifurcation peut survenir, soit en régime élastique (charge critique élastique P_{cr}), soit en régime élasto-plastique (charge critique élasto-plastique P_{cr}^*). Dans ce dernier cas, la détermination de la charge critique élasto-plastique P_{cr}^* requiert de connaître la variation du paramètre $\xi(P)$, dit **facteur de réduction plastique**, défini selon :

$$\xi(P) = \frac{I_e(P)}{I} \quad (23)$$

avec I_e moment d'inertie de l'aire restée élastique A_{el} par rapport à l'axe des centres de gravité.

• La charge critique élasto-plastique du poteau s'écrit alors :

$$P_{cr}^* = \frac{\pi^2 E I_e(P_{cr})}{L^2} = \frac{I_e(P_{cr})}{I} \frac{\pi^2 E I}{L^2} = \xi(P_{cr}) P_{cr} \leq P_{cr} \quad (24)$$

De toute évidence, elle ne peut se déterminer que par voie itérative, puisque le facteur de réduction plastique dépend de la valeur de la charge cherchée.

En fonction des résultats obtenus précédemment, il est clair que l'incidence des contraintes résiduelles dépend, à la fois, de la forme de la section, de la distribution des contraintes résiduelles et de l'axe autour duquel la section fléchit lorsque le poteau flambe. Il est pour ainsi dire impossible de formuler, en toute généralité et de manière explicite, la solution à ce problème.

Par contre, une telle solution est possible si on considère la section en double té idéalisée parce que ramenée à ses seules semelles (figure 6a). On peut ainsi écrire :

$$\tau = \frac{A_{el}}{A} = \frac{2b_e t}{2bt} = \frac{b_e}{b} \quad (25)$$

Puis, pour la flexion autour de l'axe principal yy (axe fort pour un profilé laminé) :

$$\frac{I_{el,yy}}{I_{yy}} = \frac{b_e t h^2 / 2}{b t h^2 / 2} = \frac{b_e}{b} = \tau \quad (26)$$

Et, pour la flexion autour de l'axe principal zz (axe faible pour un profilé laminé) :

$$\frac{I_{el,zz}}{I_{zz}} = \frac{b_e^3 t / 12}{b^3 t / 12} = \left(\frac{b_e}{b} \right)^3 = \tau^3 \quad (27)$$

Puisque τ est inférieur à l'unité, on peut observer que l'influence des contraintes résiduelles sur la charge critique élasto-plastique est plus grande lorsque le poteau flambe par flexion autour de l'axe faible, plutôt qu'autour de l'axe fort. Ceci est illustré à la figure 6b.

3.7 Détermination de la charge ultime de flambement par flexion

On vient de montrer que, outre l'élanement, les paramètres principaux déterminant la résistance des poteaux métalliques sont :

- la limite d'élasticité ;
- les imperfections géométriques ;
- les contraintes résiduelles.

S'agissant, principalement pour les deux derniers, de paramètres de nature aléatoire, il serait indûment conservatif de baser la pratique de la vérification des poteaux sur les valeurs les plus défavorables de ces paramètres.

■ Dans les Eurocodes, cette vérification recourt à des courbes de résistance caractéristiques, aussi appelées « **courbes européennes de flambement** » parce qu'elles ont été établies dans le cadre d'un ambitieux programme de recherche ayant associé un grand nombre de laboratoires européens. Plus de 1 100 essais ont principalement été effectués sur des poteaux, d'une part, à section doublement symétrique en double té laminée ou reconstituée par soudage et, d'autre part, à section tubulaire rectangulaire ou circulaire. Ces courbes fournissent la charge ultime relative en fonction de l'élanement relatif. Elles incorporent les effets des imperfections géométriques et des contraintes résiduelles. Elles ont donc une allure semblable à celles représentées respectivement à la figure 5 et à la figure 6.

On comprend aisément, en fonction de ce qui vient d'être développé plus haut, que l'adoption d'une courbe de flambement unique ne saurait être que peu économique dans la mesure où, devant placer en sécurité, elle devrait couvrir les situations les plus défavorables rencontrées quant aux imperfections géométriques et aux contraintes résiduelles.

■ Les **mesures des défauts de rectitude des poteaux** ayant fait l'objet de la recherche précitée ont montré qu'un défaut de rectitude sinusoïdal d'amplitude égale au millième de la longueur constituait une valeur caractéristique représentative de l'imperfection géométrique pour les poteaux à section laminée doublement symétrique.

Les **contraintes résiduelles mesurées** ont été trouvées plus élevées dans le cas de sections reconstituées par soudage que dans celui de sections laminées. Quel que soit le type de fabrication, l'évolution du refroidissement, et donc l'intensité et la distribution des contraintes résiduelles, est influencée par la massivité du profil – mesurée par le rapport hauteur/largeur de la section – et par celle des parois les plus fortes, à savoir les semelles – caractérisée par l'épaisseur de ces semelles –.

■ Enfin, ainsi que cela vient d'être montré, le **sens de flambement** joue également un rôle.

La sélection de la courbe de flambement applicable à une situation donnée est gouvernée par l'ensemble de ces facteurs. Elle s'opère en pratique au moyen d'un tableau de sélection qui est présenté ailleurs, à savoir dans le dossier consacré aux poteaux.

● Il a été convenu de définir **trois courbes de flambement fondamentales** désignées respectivement *a*, *b* et *c*. Elles couvrent les sections en double té laminées ou reconstituées par soudage et les sections tubulaires.

● Une **quatrième courbe**, désignée *d*, est également introduite avec usage exclusif aux sections soudées à semelles de forte épaisseur (> 40 mm) et flambant par flexion autour de l'axe faible. D'autres types de sections laminées, constituées de sections pleines ou de sections ne présentant qu'un axe de symétrie ont été rapportées, par souci de sécurité, à la plus défavorable des courbes fondamentales, soit la courbe *c*.

● À l'origine, une **cinquième courbe** a_0 avait aussi été introduite. Elle était destinée, en particulier, aux sections tubulaires finies à chaud ou à celles ayant fait l'objet d'un recuit. Cette courbe correspond au comportement de poteaux affectés d'une imperfection

géométrique d'amplitude $L/1\ 000$, mais dont les sections sont, pour ainsi dire, dépourvues de contraintes résiduelles. Elle a ensuite été écartée, non pas parce qu'elle aurait été invalidée, mais parce que la difficile traçabilité des méthodes de fabrication ou d'élaboration qui la justifieraient en rend l'usage problématique. Elle a, ensuite, réapparu lorsqu'on a souhaité que l'Eurocode EN1993-1-1 couvre l'acier S460 pour des raisons discutées ci-après.

■ On a déjà souligné que l'**intensité relative des contraintes résiduelles** diminue lorsque la nuance d'acier augmente. Les essais ayant fait l'objet des investigations poussées rappelées plus haut concernaient principalement la nuance désignée aujourd'hui par S235 et, accessoirement, celle désignée par S355. Lorsque les courbes européennes ont été établies, chacune d'entre elles a été dite « applicable » à l'ensemble des nuances S235 à S355, comme si la limite d'élasticité n'avait aucune incidence.

La situation est restée telle, bien que, dans l'intervalle, il ait été montré que la nuance S355 se trouve de la sorte quelque peu pénalisée. Par contre, le développement des aciers thermomécaniques en particulier de la nuance S460, a reposé le problème. Les nombreuses études qui ont été consacrées à ces aciers ont permis d'attribuer à la nuance S460 des courbes de flambement de référence en général plus favorables que pour l'ensemble des nuances inférieures.

Pour la nuance S460, à même situation donnée, on gagne en général, mais pas toujours, une courbe.

■ Si l'on se fonde sur un **comportement élastique-parfaitement plastique du matériau**, on omet implicitement tout effet d'écrouissage. En d'autres termes, les diverses courbes de comportement des poteaux devraient atteindre la valeur de charge relative $\chi = 1$ pour $\bar{\lambda} = 0$ et décroître immédiatement dès que l'élanement relatif $\bar{\lambda}$ augmente en démarant tangentiellement à l'horizontale en $\bar{\lambda} = 0$ (figure 7a). C'était en effet le cas de la toute première proposition de courbes européennes de flambement.

La réalité est quelque peu différente et les résultats d'essais montrent d'ailleurs que, dans le domaine des élanements faibles, les effets favorables de l'écrouissage font plus que compenser ceux, défavorables, des imperfections de sorte que les charges de ruine relatives, effectivement obtenues lors d'essais, dépassent l'unité. C'est pourquoi, il fut ultérieurement convenu que l'on peut négliger tout effet d'instabilité dans le domaine $\bar{\lambda} \leq 0,2$, ce qui revient à adopter un palier $\chi = 1$ dans ce domaine (figure 7b).

■ Initialement, les **courbes européennes de flambement ont été produites sous forme tabulée**. En effet, elles résultaient simplement de simulations numériques sur ordinateur de poteaux ayant les valeurs caractéristiques des dimensions, propriétés mécaniques, défaut de rectitude et contraintes résiduelles mesurées sur les pièces d'essais. Elles se présentaient sous forme de tableaux à double entrée, l'une (colonne) résidant dans la courbe applicable (*a*, *b*, *c* ou *d*), et l'autre (ligne) dans l'élanement réduit $\bar{\lambda}$. Le nombre situé à

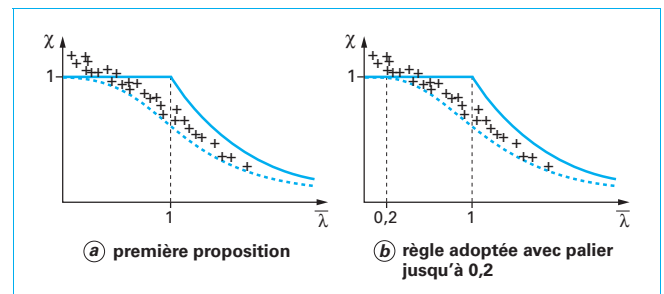


Figure 7 – Distribution des résultats expérimentaux et courbe caractéristique de comportement des poteaux

l'intersection des ligne et colonne concernées fournissait la valeur de la charge ultime relative. Est-il utile de préciser qu'en adoptant un palier pour $\bar{\lambda} \leq 0,2$ une légère distorsion des résultats des simulations numériques a dû être opérée pour établir la tabulation dans le domaine des élancements faibles à modérés ?

■ Pour le praticien, la présentation sous forme tabulée est peu satisfaisante. Une **formulation analytique** est de loin préférable. Cette dernière a mis un certain temps à voir le jour, puis à trouver sa consécration. Le modèle sur lequel se fonde la formulation analytique repose sur la relation (17) déjà établie plus haut, dans laquelle on pose qu'à la ruine ($P = P_u$), la contrainte maximale est égale à la limite d'élasticité f_y . On a ainsi :

$$\frac{P_u}{A} \left(1 + \frac{w_0 c}{j^2} \frac{1}{1 - P_u / P_{cr}} \right) = f_y \quad (28)$$

Compte tenu des expressions définissant le facteur de réduction χ et l'élancement relatif $\bar{\lambda}$, cette dernière relation s'écrit encore :

$$\chi + \chi \frac{1}{1 - \chi \bar{\lambda}^2} \eta_g = 1 \quad (29)$$

Ou encore :

$$(1 - \chi)(1 - \chi \bar{\lambda}^2) = \eta_g \chi \quad (30)$$

En posant l'imperfection géométrique relative :

$$\eta_g = \frac{w_0 c}{j^2} \quad (31)$$

Si l'on annule le second membre de (30) (pas d'imperfection géométrique), l'équation du second degré en χ a visiblement pour solutions respectives $\chi = 1$ et $\chi = 1 / \bar{\lambda}^2$, c'est-à-dire le palier plastique et l'hyperbole d'Euler (voir figure 3). Le second membre traduit l'effet de l'imperfection géométrique. Il a pour effet de générer une courbe de résistance s'inscrivant entre les courbes limites. À ce stade, on n'a pas incorporé l'effet des contraintes résiduelles ; on a toutefois vu que ces dernières sont reflétées par une courbe de même allure que celle reflétant l'effet des imperfections géométriques.

■ C'est pourquoi, il est licite de remplacer, dans la dernière relation obtenue, η_g par l'**imperfection généralisée relative** η couvrant les deux types d'imperfections. En raison du palier de 0,2 adopté pour les raisons développées plus haut, il importe que la courbe de résistance passe par le point de coordonnées [$\bar{\lambda} = 0,2$; $\chi = 1$]. Pour satisfaire cette exigence, il suffit d'écrire l'imperfection généralisée relative sous la forme :

$$\eta = \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) \quad (32)$$

Dès lors, toute courbe de résistance au flambement est susceptible de répondre à l'équation du second degré :

$$(1 - \chi)(1 - \chi \bar{\lambda}^2) = \alpha(\bar{\lambda} - 0,2)\chi \quad (33)$$

Le **paramètre d'imperfection généralisée** α règle donc l'altitude de la courbe. Les valeurs appropriées qui lui sont attribuées permettent de différencier les diverses courbes de flambement.

La seule solution de l'équation (33) qui ait un sens physique est :

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \leq 1 \quad (34)$$

avec :

$$\phi = 0,5(1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2) \quad (35)$$

La relation de départ correspond à une analyse limite élastique. Elle n'incorpore donc aucun effet de plastification. Il suffit toutefois de calibrer la valeur du paramètre α de sorte que la charge de ruine du poteau réel, qui résulte de l'interaction entre plasticité et instabilité, corresponde à celle fournie par le modèle analytique. Cette calibration s'est faite par rapport aux valeurs tabulées des courbes

de flambement (obtenues, rappelons-le, par simulations numériques). Les résultats sont repris au tableau 1. Les courbes correspondantes sont données à la figure 8.

■ Les Eurocodes ont repris ces valeurs du coefficient d'imperfection généralisée, mais en les arrondissant par souci de simplicité à, respectivement :

- courbe a_0 : 0,13 ;
- courbe a : 0,21 ;
- courbe b : 0,34 ;
- courbe c : 0,49 ;
- courbe d : 0,76.

Par ailleurs, lorsqu'elles sont encore reproduites, les valeurs tabulées ne sont désormais plus celles fournies par les simulations numériques mais bien, par souci de cohérence, celles calculées directement à partir de l'expression analytique (34) avec les valeurs arrondies précitées du paramètre d'imperfection généralisée.

Soulignons que les courbes européennes de flambement ont été établies pour les poteaux simplement appuyés à leurs extrémités et chargés en bout (effort de compression constant sur la longueur du poteau). C'est pourquoi, dans le cas d'autres conditions d'appui, il importe de déterminer la longueur de flambement avant de recourir à la procédure décrite plus haut.

■ On peut résumer les étapes de la procédure de détermination de la charge ultime en flambement par un organigramme de principe élémentaire (figure 9).

On rappellera que la procédure décrite doit être répétée pour chacun des deux axes principaux d'inertie puisque, en toute généralité, le flambement se produit par flexion, soit autour de l'axe fort, soit autour de l'axe faible. La charge ultime sera la plus faible des deux valeurs obtenues de la sorte.

Les détails relatifs à la mise en œuvre pratique de cet organigramme, dans le cadre d'une vérification au flambement d'un poteau, sont plus précisément examinés dans le dossier [7].

Tableau 1 – Valeurs du paramètre d'imperfection généralisée α pour l'acier

Courbe	a_0	a	b	c	d
α	0,125	0,206	0,339	0,489	0,756

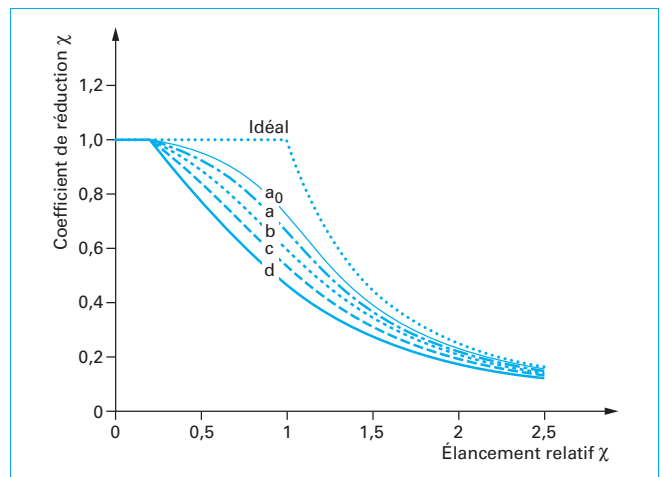


Figure 8 – Courbes européennes de flambement

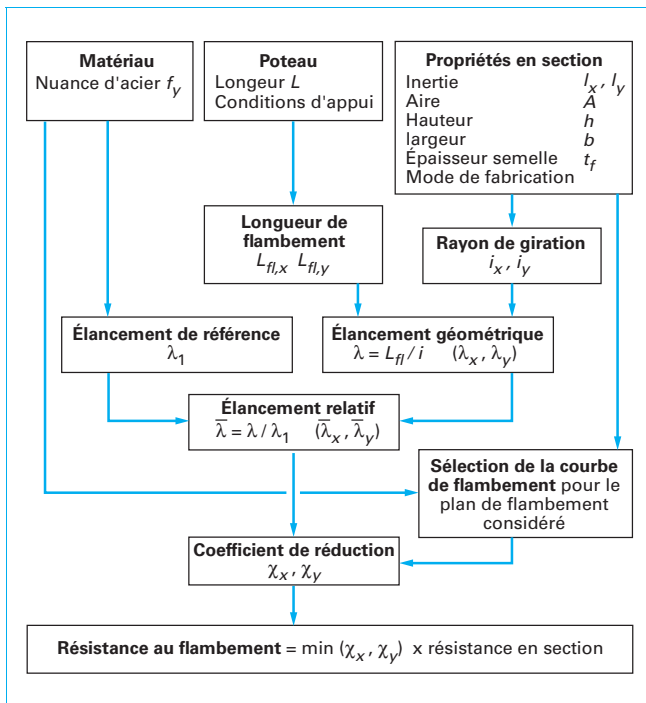


Figure 9 – Organigramme de principe pour la détermination de la charge ultime de flambement

4. Flambement par torsion et par flexion-torsion

Dans ce qui précède, on a étudié dans le détail le flambement par flexion des éléments structuraux comprimés. Ce type d'instabilité est associé à des déplacements latéraux dans un plan de symétrie de la section transversale. Ce plan est le plan faible – c'est-à-dire celui de moindre inertie – pour des conditions d'appui identiques pour la flexion dans les deux plans principaux. En toute généralité, on ne peut conclure qu'il s'agit du plan d'élancement maximum car les courbes de flambement applicables ne sont pas identiques pour les deux sens possibles de flambement.

Dans ce chapitre, on considère un autre type d'instabilité par flambement. Il s'agit toujours d'une instabilité par bifurcation, mais le champ de déplacements qui le caractérise comporte, non seulement des déplacements latéraux de flexion, mais aussi des déplacements de torsion. On parle ici de *flambement par flexion-torsion*. Ce nouveau phénomène d'instabilité est d'une très grande importance lorsque les barres comprimées ont une *section ouverte et à parois minces*. Ces deux caractéristiques entraînent une rigidité en torsion particulièrement faible. Les barres avec d'autres types de sections transversales possèdent une rigidité en torsion normalement beaucoup plus élevée et, pour cette raison, ont un comportement géométriquement non linéaire principalement influencé du fait de l'instabilité par flexion examinée plus haut.

4.1 Charges critiques élastiques

Lorsqu'une barre à section ouverte à parois minces est soumise à un moment de torsion, ses sections, non seulement tournent autour de l'axe longitudinal, mais aussi gauchissent.

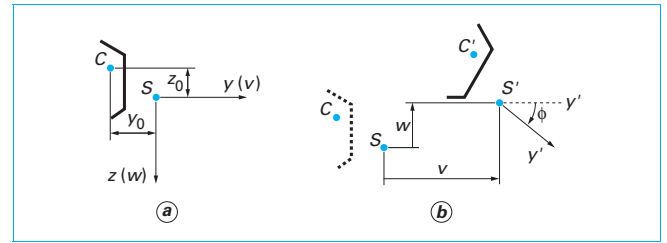


Figure 10 – Section ouverte à parois minces

Le *gauchissement* traduit le fait qu'une section plane ne reste pas plane sous l'effet de la sollicitation, mais subit un déplacement longitudinal variable de point à point de cette section.

■ Le **gauchissement** est libre lorsque, à la fois, les conditions d'appui de la barre ne brident pas le gauchissement et le moment de torsion appliqué est constant le long de la barre. La barre n'est alors soumise qu'à torsion uniforme ou torsion de Saint-Venant. Lorsque le moment de torsion est variable le long de la barre, ou que le gauchissement est totalement ou partiellement empêché en l'une ou l'autre section, la barre est dite soumise à « torsion non uniforme ». Dès lors, le moment de torsion M_t appliqué est, en toute généralité, transmis pour partie $M_{t,u}$ par *torsion uniforme* et, pour le solde, soit $M_{t,g}$, par *torsion de gauchissement* :

$$M_t = M_{t,u} + M_{t,g} \quad (36)$$

Exemple. Considérons un poteau de longueur L , de rigidités flexionnelles EI_y et EI_z , de rigidité de torsion GI_t et de rigidité de gauchissement EI_w et soumettons-le à une charge axiale P (figure 10a).

Admettons que ce poteau soit indéformable axialement, ce qui signifie que la raideur extensionnelle EA est infiniment grande. Une section transversale à parois minces peut, dans une configuration quelconque, être représentée par la ligne moyenne des parois qui la constituent. Si le poteau en question périclète en flambement par combinaison de flexion et de torsion, cela implique que la section transversale subit en toute généralité deux translations $v(x)$ et $w(x)$ (respectivement selon les axes y et z définissant la section transversale) et une rotation $\phi(x)$ autour de l'axe longitudinal x (voir figure 10b). Les axes de coordonnées de la section sont parallèles aux axes principaux centraux d'inertie et passent par le centre de cisaillement S . Dans ce référentiel, le centre de gravité C de la section a des coordonnées y_0 et z_0 (figure 10a).

■ Les **conditions d'appuis simples** (cas de référence) comportent ici des conditions flexionnelles et des conditions torsionnelles. Les conditions flexionnelles bien connues d'appuis simples existent respectivement pour la flexion dans chacun des plans principaux d'inertie. Quant aux conditions torsionnelles, les sections d'extrémité du poteau sont supposées ne pouvoir subir de rotation de torsion (encastrement à la torsion), mais pouvoir librement gauchir. L'équilibre est régi par trois équations :

$$\begin{aligned} EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} + P \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + z_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) &= 0 \\ EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} + P \left(\frac{d^2 w}{dx^2} - y_0 \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) &= 0 \\ EI_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} - GI_t \frac{d^2 \phi}{dx^2} + P \left(r_0^2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - y_0 \frac{d^2 w}{dx^2} + z_0 \frac{d^2 v}{dx^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (37)$$

avec le rayon polaire de giration r_0 de la section par rapport au centre de cisaillement S :

$$r_0^2 = \frac{1}{A} \int_A (y^2 + x^2) dA \quad (38)$$

• Pour les conditions d'appuis précitées, les solutions $v(x)$, $w(x)$ et $\phi(x)$ associées à la charge critique de flambement sont, de toute évidence, de forme sinusoïdale, soit :

$$\begin{aligned} v(x) &= C_1 \sin \frac{\pi x}{L} \\ w(x) &= C_2 \sin \frac{\pi x}{L} \\ \phi(x) &= C_3 \sin \frac{\pi x}{L} \end{aligned} \quad (39)$$

En introduisant (39) dans (37), on obtient l'équation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} (P_{cr,z} - P) & 0 & -Pz_0 \\ 0 & (P_{cr,y} - P) & Py_0 \\ -Pz_0 & Py_0 & r_0^2(P_{cr,\phi} - P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

dans laquelle on a posé :

$$\begin{aligned} P_{cr,y} &= \frac{\pi^2 E I_y}{L^2} \\ P_{cr,z} &= \frac{\pi^2 E I_z}{L^2} \\ P_{cr,\phi} &= \frac{1}{r_0^2} \left(G I_t + \frac{\pi^2 E I_w}{L^2} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

• Parmi ces dernières expressions, les deux premières ne sont rien d'autre que les charges critiques élastiques de flambement par flexion autour des axes principaux d'inertie de la section. Quant à la troisième, c'est la *charge critique élastique de flambement par torsion* ; le poteau péricule en s'enroulant en hélice autour de son axe longitudinal.

• Les solutions de (40) sont :

– $C_1 = C_2 = C_3 = 0$: il s'agit de la solution triviale pour laquelle le poteau suit la trajectoire fondamentale ; sa section transversale ne subit de déplacement d'aucune sorte ;

– $C_1 \neq 0$ et/ou $C_2 \neq 0$ et/ou $C_3 \neq 0$: le déterminant de la matrice des coefficients des C_i doit être nul :

$$\begin{aligned} r_0^2(P - P_{cr,y})(P - P_{cr,z})(P - P_{cr,\phi}) - P^2 z_0^2(P - P_{cr,y}) \\ - P^2 y_0^2(P - P_{cr,z}) = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

• Dans le cas le plus général où la section ne possède **aucun plan de symétrie**, on a alors : $y_0 \neq 0$ et $z_0 \neq 0$. La charge critique élastique est la plus petite racine de (42). Tous les C_i sont différents de zéro, ce qui signifie que le mode critique d'instabilité fait intervenir des déplacements, à la fois, de flexion et de torsion. On peut montrer que la *charge critique élastique de flambement par flexion-torsion* $P_{cr,FT}$ est telle que :

$$P_{cr,FT} < \min[P_{cr,y}; P_{cr,z}; P_{cr,\phi}] \quad (43)$$

En d'autres termes, toute charge critique élastique élémentaire $P_{cr,y}$, $P_{cr,z}$ ou $P_{cr,\phi}$ constitue une estimation non sécuritaire de $P_{cr,FT}$.

• Si la section **possède un plan de symétrie**, on a : $z_0 = 0$ ou $y_0 = 0$. Admettons que ce soit y_0 qui vaille zéro. Dans ces conditions, les solutions de (42) sont $P_{cr,y}$ et la plus petite racine \bar{P} de :

$$r_0^2(P - P_{cr,z})(P - P_{cr,\phi}) - P^2 z_0^2 = 0 \quad (44)$$

et il s'agit bien évidemment de conserver la plus petite des deux solutions comme valeur significative :

$$P_{cr,FT} = \min[P_{cr,y}; \bar{P}] \quad (45)$$

Le flambement survient donc, soit par flexion autour de l'axe yy , soit par combinaison de flexion autour de l'axe zz et de torsion autour de l'axe x .

• Si c'était z_0 – et non y_0 – qui est nul, on aurait :

$$P_{cr,FT} = \min[P_{cr,z}; \bar{P}] \quad (46)$$

où \bar{P} est, cette fois, la plus petite racine de :

$$r_0^2(P - P_{cr,y})(P - P_{cr,\phi}) - P^2 y_0^2 = 0 \quad (47)$$

Le flambement survient ici, soit par flexion autour de l'axe zz , soit par combinaison de flexion autour de l'axe yy et de torsion autour de l'axe x :

• Si la section **possède deux plans de symétrie**, on a : $z_0 = y_0 = 0$; la relation (42) se réduit à :

$$(P - P_{cr,y})(P - P_{cr,z})(P - P_{cr,\phi}) = 0 \quad (48)$$

Il y a alors découplage complet des modes d'instabilité ; les charges critiques élastiques sont $P_{cr,y}$, $P_{cr,z}$ et $P_{cr,\phi}$ et il s'agit de conserver la valeur la plus petite comme valeur significative :

$$P_{cr,FT} = \min[P_{cr,y}; P_{cr,z}; P_{cr,\phi}] \quad (49)$$

On comprend aisément que le flambement par flexion-torsion affecte bien davantage les sections ouvertes formées à froid que les sections laminées à chaud. En effet, la très faible résistance à la torsion des sections ouvertes formées à froid fait que $P_{cr,\phi}$ peut être inférieure à $P_{cr,y}$ ou $P_{cr,z}$.

■ Les résultats obtenus ci-dessus pour les poteaux avec conditions aux limites correspondant à des appuis simples sont facilement généralisés aux poteaux présentant d'autres conditions d'appuis. Comme pour le flambement par flexion, on recourt simplement au concept de longueur de flambement et on substitue à (41) les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} P_{cr,y} &= \frac{\pi^2 E I_y}{(\alpha_y L)^2} \\ P_{cr,z} &= \frac{\pi^2 E I_z}{(\alpha_z L)^2} \\ P_{cr,\phi} &= \frac{1}{r_0^2} \left(G I_t + \frac{\pi^2 E I_w}{(\alpha_\phi L)^2} \right) \end{aligned} \quad (50)$$

où les facteurs α_y et α_z traduisent les restrictions de rotation de flexion, tandis que α_ϕ tient compte des restrictions à un gauchissement libre.

4.2 Détermination de la charge ultime de flambement par torsion ou par flexion-torsion

Comme pour le flambement par flexion, il importe de fonder la vérification au flambement par torsion ou par flexion-torsion sur le concept de charge ultime et non de charge critique élastique. On a montré que, dans le cas des poteaux, les imperfections géométriques et les contraintes résiduelles ont un effet néfaste sur la résistance. En d'autres termes, la charge ultime est inférieure à la charge critique élastique, elle-même plafonnée à la résistance axiale plastique.

En ce qui concerne le flambement par torsion ou par flexion-torsion, on n'a pas entrepris de programme de recherche similaire à celui fait à propos du flambement par flexion. On s'est borné à admettre que les imperfections géométriques et les contraintes résiduelles jouent un rôle similaire si le mode de flambement comporte, entre autres, des déformations de torsion. Cette hypothèse est d'évidence sécuritaire.

Dès lors, la philosophie et la méthodologie développées à propos du flambement par flexion sont simplement transposées ici.

On recourt donc aux mêmes courbes européennes de flambement (voir figure 8), sous réserve de ce qui suit :

– définir l'élanement réduit par référence à la charge critique élastique déterminante, soit :

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{P_y}{P_{cr}}} \dots \text{pour le flambement par flexion} \quad (51)$$

$$\bar{\lambda}_\phi = \sqrt{\frac{P_y}{P_{cr,\phi}}} \dots \text{pour le flambement par torsion} \quad (52)$$

$$\bar{\lambda}_{FT} = \sqrt{\frac{P_y}{P_{cr,FT}}} \dots \text{pour le flambement par flexion – torsion} \quad (53)$$

– adopter systématiquement la courbe de flambement b lorsqu'il s'agit de flambement par torsion ou de flambement par flexion-torsion, et ce, indépendamment de la forme de la section ;

– s'agissant de la charge plastique P_y , on notera qu'elle se détermine, en principe, à partir de la limite d'élasticité moyenne sur la section formée à froid, s'il s'agit du flambement par flexion, mais de la limite d'élasticité de la bande mère, s'il s'agit du flambement par torsion ou par flexion-torsion.

5. Déversement des poutres

5.1 Généralités

Une barre sollicitée par des moments d'extrémité ou des charges transversales à son axe longitudinal est soumise à flexion ; on donne habituellement le nom de *poutre* à une barre sollicitée de la sorte.

Raisonnons d'abord sur une poutre à section symétrique par rapport au plan de flexion et réputée indéformable, telles les sections en I ou en H, qui constituent les éléments structuraux de construction métallique couramment destinés à cette fonction. La flexion d'une telle poutre autour de l'axe de faible inertie de sa section transversale se manifeste uniquement par des déplacements v dans le plan de sollicitation et ce, quelle que soit la valeur de la sollicitation.

Si, au contraire, la poutre est fléchée autour de l'axe de forte inertie de sa section transversale, elle subit d'abord des déplacements w dans le plan de flexion. Pour un certain niveau de la sollicitation, la partie comprimée de la poutre (par exemple, la semelle comprimée dans le cas d'une section en double té) a tendance à se dérober latéralement selon des déplacements v . Comme la partie tendue n'a aucune raison de manifester cette même tendance, l'indéformabilité supposée de la section entraîne que le mouvement latéral de la partie comprimée est nécessairement accompagné d'une rotation de torsion ϕ autour de l'axe longitudinal. Ce phénomène d'instabilité spécifique aux poutres associe déplacement transversal au plan de sollicitation et déformation de torsion ; il est appelé *déversement*. Il ne se produit évidemment que si la poutre n'est pas dotée de maintiens latéraux discrets ou continus suffisamment efficaces.

Le déversement s'apparente donc à un flambement latéral de la zone comprimée soumise à une restrainte élastique de la part de la partie tendue.

Le déversement est une instabilité de bifurcation, au sens développé au § 4.1. Il présente une trajectoire fondamentale d'équilibre correspondant à la flexion dans le plan de forte inertie (déplacements w) et une trajectoire d'équilibre à l'état déformé associant

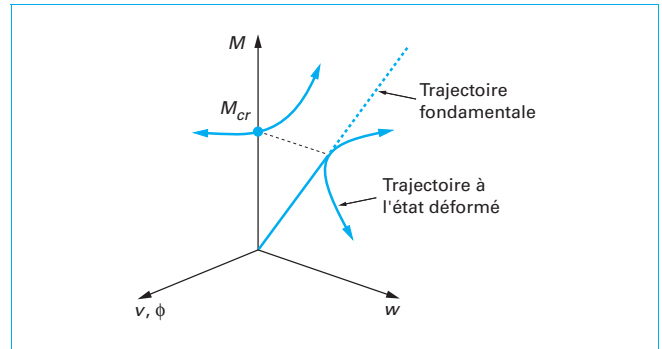


Figure 11 – Trajectoires d'équilibre pour une poutre fléchée autour de son axe de forte inertie

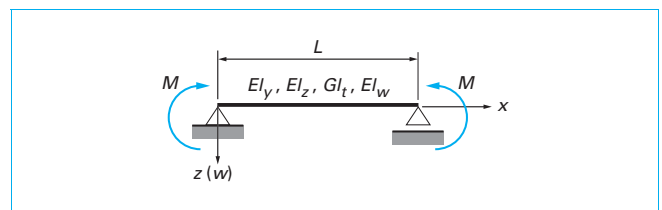


Figure 12 – Cas de référence pour le déversement des poutres

une flexion d'axe faible (déplacements v) et une torsion (déplacements ϕ). Les trajectoires d'équilibre sont représentées à la figure 11 ; s'agissant d'une instabilité spatiale, la représentation dans un plan n'est plus possible et requiert une vue en perspective.

Le point de bifurcation correspond au *moment critique élastique de déversement* M_{cr} ; la valeur de ce dernier dépend du type de charges sollicitant la poutre en flexion ou, plus précisément, du diagramme des moments de flexion sollicitants.

Quel que soit le type de chargement, le comportement géométrique non linéaire réel de la poutre, qui traduit l'instabilité, est influencé par de nombreux autres facteurs, en particulier :

- les conditions d'appui ;
- le niveau du point d'application des forces transversales, mesuré par sa distance au centre de cisaillement de la section transversale ;
- la limite d'élasticité du matériau ;
- les imperfections géométriques selon v et ϕ ;
- les contraintes résiduelles.

S'agissant de la détermination du moment critique élastique de déversement, la poutre est supposée idéale, c'est-à-dire indéfiniment élastique et sans imperfections géométriques et structurales.

5.2 Moment critique élastique de déversement

5.2.1 Cas de référence

Le cas de référence pour le déversement est la poutre de longueur L à *section uniformément doublement symétrique*, soumise à des moments d'extrémité M , égaux mais de signes contraires, appliqués rigoureusement dans le plan de forte inertie de la section (figure 12).

La sollicitation de cette poutre de référence est donc la *flexion pure*, appelée aussi sollicitation de *moment uniforme*. Les conditions d'appui aux extrémités sont des *appuis simples*, appelés

aussi *appuis à fourche*, étant entendu qu'elles concernent des conditions tant flexionnelles que torsionnelles, à savoir :

- pour la flexion : appuis simples d'extrémité :

$$v(x) = w(x) = \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

- pour la torsion : rotation de torsion empêchée et gauchissement libre aux appuis d'extrémité :

$$\phi(x) = \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0$$

Les propriétés de la section sont :

- raideurs flexionnelles EI_y (forte inertie) et EI_z (faible inertie) ;
- raideurs torsionnelles GI_t et raideur de gauchissement EI_w .

La poutre sur appuis d'extrémité à fourche et soumise à moment uniforme constitue le problème de référence pour le déversement. Elle trouve son équivalent, pour le flambement, dans la barre sur appuis simples d'extrémité et chargée axialement en bout.

Les équations d'équilibre de la poutre dans l'état déformé sont au nombre de trois : flexion autour de l'axe fort, flexion autour de l'axe faible et de torsion. Elles s'écrivent, eu égard à la figure 13 :

$$\begin{aligned} EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} &= -M \\ EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} &= -M\phi(x) \\ GI_t \frac{d\phi(x)}{dx} - EI_w \frac{d^3 \phi(x)}{dx^3} &= M \frac{dv(x)}{dx} \end{aligned} \quad (54)$$

La première des relations (54) est indépendante des deux autres, tandis que ces deux dernières sont couplées. Elle peut donc être résolue séparément ; elle représente la trajectoire fondamentale

d'équilibre dans le plan (M, w) de la figure 11. En éliminant $v(x)$ entre les 2^e et 3^e équations (54), on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d^4 \phi(x)}{dx^4} - \frac{GI_t}{EI_w} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{M^2}{EI_z \cdot EI_w} \phi(x) = 0 \quad (55)$$

Si la raideur de gauchissement était négligeable ($EI_w = 0$), cette équation se réduirait à :

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \frac{M^2}{EI_z \cdot GI_t} \phi(x) = 0 \quad (56)$$

Dont la solution est du type :

$$\phi(x) = A \sin \frac{\pi x}{L} \quad (57)$$

Ce qui entraîne une déformée latérale du type :

$$v(x) = B \sin \frac{\pi x}{L} \quad (58)$$

Le mode d'instabilité est donc en demi-onde de sinusé et on tire alors de (56) l'expression du moment critique élastique de déversement :

$$M_{cr,0} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \quad (59)$$

Si l'on tient compte de la rigidité de gauchissement, on trouve encore que le mode d'instabilité est toujours donné par (57) et (58), mais que le moment critique élastique de déversement prend la forme :

$$M_{cr,0} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t \left(1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}\right)} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \sqrt{(1 + \omega^2)} \quad (60)$$

avec ω (désigné parfois *paramètre de Timoshenko*) :

$$\omega = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI_w}{GI_t}} \quad (61)$$

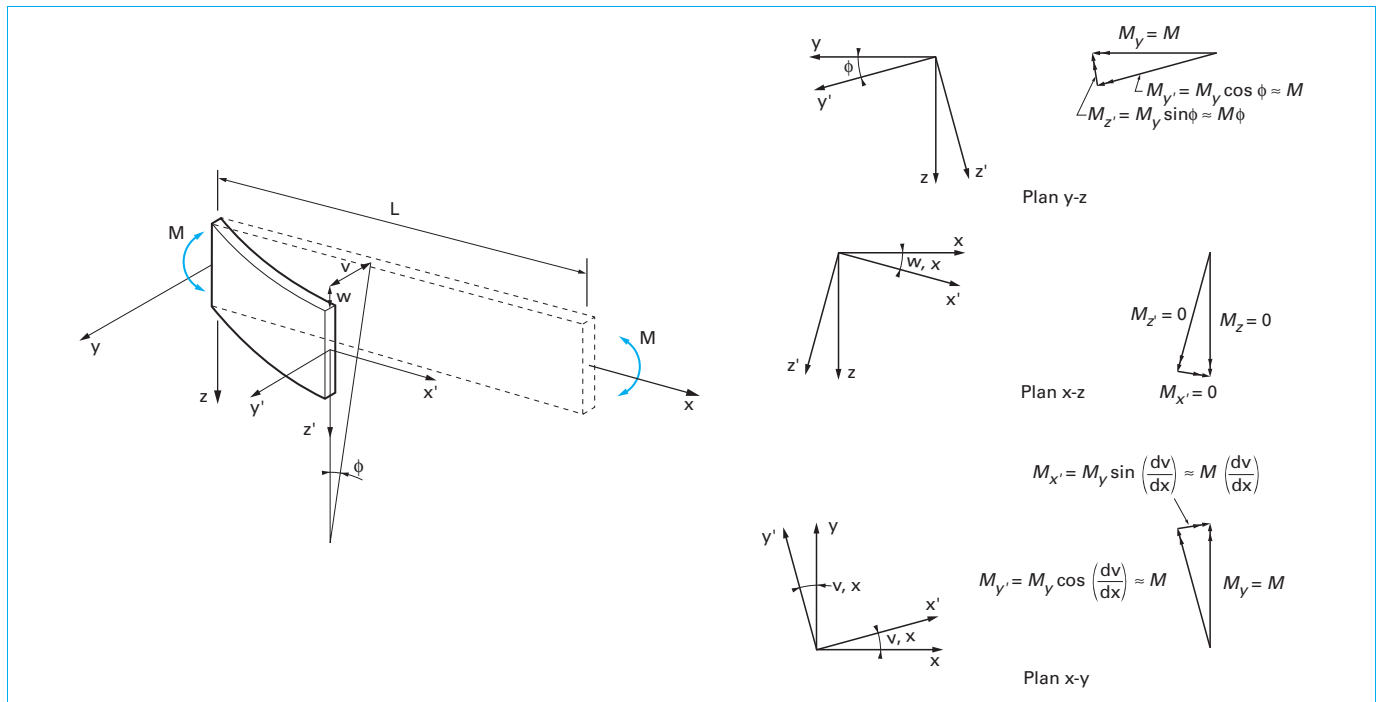


Figure 13 – Configuration déformée et décomposition du moment de flexion M_y

On constate que, d'une part, comme il fallait s'y attendre, la raideur de gauchissement a pour effet d'accroître la résistance au déversement et, d'autre part, la longueur L intervient dans l'expression du facteur ω . Il en résulte que ce dernier a une faible incidence sur le moment critique élastique de déversement de poutres longues et/ou à section massive, mais qu'un bénéfice significatif est attendu dans les poutres courtes et à section élancée.

À titre d'exemple, on donne à la figure 14 l'évolution du facteur de majoration $\sqrt{1+\omega^2}$ en fonction du rapport L/h (h désignant la hauteur de la section) pour, respectivement deux sections, respectivement en I et en H, ayant sensiblement même raideur flexionnelle dans le plan de sollicitation de flexion.

Pour une section en I ou en H, la massivité d'une section peut être mesurée par le rapport hauteur/largeur h/b . La hauteur h n'a qu'une faible influence sur la raideur flexionnelle d'axe faible EI_z et sur la raideur torsionnelle GI_t . Elle a une incidence plus significative sur la raideur de gauchissement EI_w puisque $I_w = 0,5I_f h_s^2 \approx 0,25I_z h_s^2$, où I_f est le moment d'inertie d'une semelle par rapport à l'axe de faible inertie de la section et h_s la distance entre les centres de cisaillement respectifs des deux semelles.

Pour une poutre de longueur et aire de section transversale données, le moment critique élastique de déversement diminue lorsque le rapport h/b augmente (figure 15).

À ce stade, on constate que les principaux facteurs qui affectent l'expression du moment critique élastique de déversement sont :

- la longueur L de la poutre (distance entre sections consécutives tenues latéralement). Plus cette longueur augmente, plus la sensibilité au déversement s'accroît. Si la raideur de gauchissement est

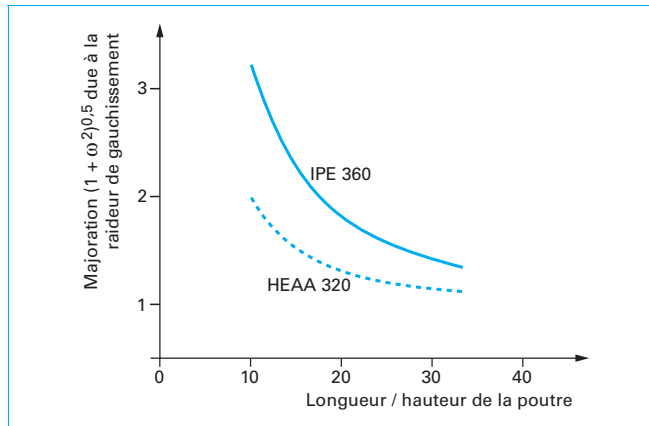


Figure 14 – Majoration du moment critique élastique de déversement due à la raideur de gauchissement

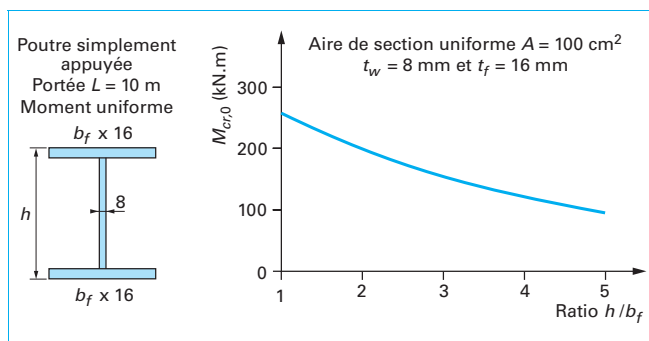


Figure 15 – Influence de la massivité de la section sur le moment critique élastique de déversement

négligée ($EI_w = 0$), le moment critique $M_{cr,0}$ varie hyperboliquement dans le rapport $1/L$. Dans le cas contraire, l'évolution est plus complexe (figure 16) ;

- les propriétés du matériau : module d'élasticité E et coefficient de Poisson ν (car $G = E/2(1 + \nu)$) ;

- les propriétés de la section : inertie d'axe faible I_z , inertie torsionnelle de Saint-Venant I_t et inertie de gauchissement I_w , ce qui traduit bien le fait que l'instabilité résulte d'une combinaison d'un déplacement de flexion v et d'une rotation de torsion ϕ . À section et longueur données, on peut examiner l'effet d'un accroissement de ces diverses propriétés prises séparément et indépendamment. Bien que cette démarche ne soit pas réellement praticable (ces quantités n'étant pas indépendantes), elle est toutefois adoptée en vue de dégager des tendances générales (figure 17). On observe que le moment critique évolue presque linéairement suivant chacune des propriétés considérées avec des effets de I_t et I_w similaires, mais plus faibles que ceux de I_z .

L'expression (60) est celle que l'on trouve le plus souvent dans la littérature scientifique à usage pratique. Si elle dépend bien de EI_z , GI_t et EI_w , elle est, par contre, trouvée indépendante de la raideur flexionnelle d'axe fort EI_y . Ceci est la conséquence directe de l'écriture des équations d'équilibre (54) dans lesquelles on néglige la déformée prise par la poutre, dans son plan de sollicitation, avant voilement. Cette simplification est justifiée lorsque EI_y est substantiellement plus grand que EI_z . Elle conduit à une évaluation sécuritaire du moment critique élastique de déversement. En effet, la déformée dans le plan de sollicitation a pour effet de transformer la poutre en une sorte d'« arc inversé » et contribue ainsi à accroître le moment critique.

La prise en compte de ces déplacements conduirait (les développements utiles pour aboutir à ce résultat ne sont pas données) à multiplier le second membre de l'expression (60) par le facteur :

$$K = \frac{1}{\sqrt{(1 - EI_z/EI_y)(1 - GI_t/2EI_y)(1 + \omega^2)}} \quad (62)$$

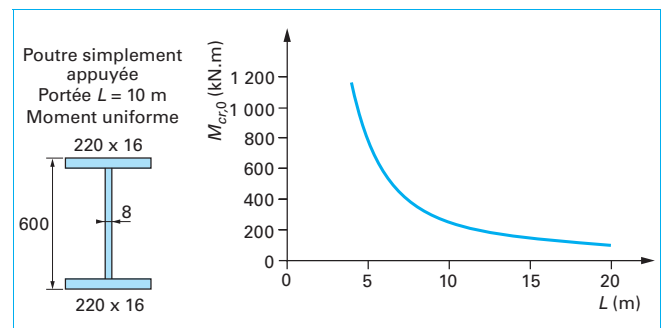


Figure 16 – Influence de la longueur sur le moment critique élastique de déversement

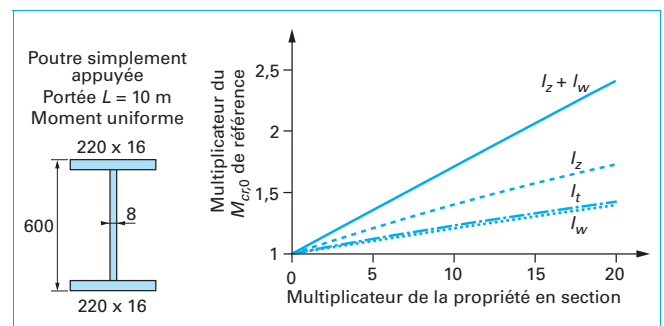


Figure 17 – Influence des propriétés en section (moment uniforme)

Il apparaît clairement que le moment critique élastique augmente avec le rapport I_z/I_y et devient infini lorsque $I_z = I_y$. Ceci explique l'affirmation selon laquelle une poutre ne déverse pas lorsque $I_z > I_y$.

Toutefois, si cette assertion est vraie dans la plupart des situations rencontrées dans la pratique, elle ne l'est pas en toute généralité. Ainsi lorsque des charges transversales de gravité sont appliquées largement au-dessus du centre de cisaillement, on peut avoir une instabilité à mode de torsion prédominant.

Pour les sections en I ou en H, il est courant de se référer à l'expression (60). En effet, EI_y est normalement largement plus grand que EI_z , GI_t et EI_w/L^2 , de sorte que le facteur de correction K est juste supérieur à l'unité pour la plupart de telles sections. Par contre, pour les sections tubulaires, EI_z et GI_t sont très souvent comparables à EI_y et on peut tirer un bénéfice substantiel en faisant usage du facteur correctif donné par (62).

Les hypothèses posées jusqu'à présent, à savoir section doublement symétrique et moment uniforme, ne permettent pas de couvrir toutes les situations rencontrées en pratique. Il importe en effet d'examiner les effets suivants :

- section mono-symétrique ou à point de symétrie ;
- sollicitation par moments d'extrémité inégaux et/ou par forces transversales avec, s'agissant de ces dernières, influence du niveau d'application des charges.

5.2.2 Influence d'une mono-symétrie de la section

Lorsque la section est doublement symétrique, le centre de gravité C et le centre de cisaillement S – appelé aussi centre de torsion – coïncident. Lorsque la section est mono-symétrique et sollicitée en flexion dans son seul plan de symétrie, ces deux points sont différents, bien que tous deux soient situés dans le plan de symétrie.

Pour une section en I ou en H, la mono-symétrie résulte simplement du fait que les semelles ne sont pas identiques. Elle est mesurée par le rapport :

$$\Psi_f = (I_{f,c} - I_{f,t}) / (I_{f,c} + I_{f,t}) \gg (I_{f,c} - I_{f,t}) / I_z \quad (63)$$

avec $I_{f,c}$ et $I_{f,t}$ moments d'inertie, respectivement de la semelle comprimée (indice c) et de la semelle tendue (indice t), par rapport à l'axe faible de la section (une section doublement symétrique est donc caractérisée par $\Psi_f = 0$).

Partant d'une section symétrique autour de l'axe de flexion, la réduction progressive de la largeur d'une des semelles entraîne une diminution continuellement croissante du moment critique élastique de déversement.

L'importance de cette réduction est très largement tributaire de celle des semelles dont on diminue la largeur. Elle est nettement plus grande si elle concerne la semelle comprimée (figure 18), ce

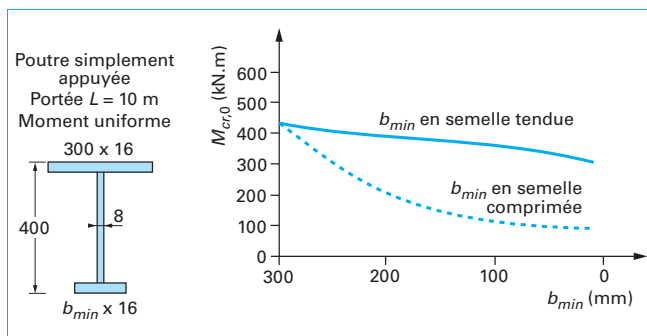


Figure 18 – Influence de la mono-symétrie de la section transversale

qui n'est guère surprenant dans la mesure où cette dernière est la plus propice au flambement latéral.

Une poutre à section mono-symétrique soumise à *moment uniforme autour de l'axe de symétrie* se comporte comme une poutre à section doublement symétrique. Par contre, si la flexion est due à l'action de forces transversales, le comportement dépend de la position du plan contenant les forces sollicitantes. Lorsque ce plan passe par le centre de cisaillement, le déversement se produit par bifurcation. Pour toute autre position du plan de sollicitation, la poutre n'est pas l'objet d'une instabilité soudaine, mais subit une flexion bi-axiale et une torsion dès le début de la mise en charge. Le comportement est non linéaire et procède par *divergence* de l'équilibre.

5.2.3 Influence d'un point de symétrie

Dans une section à point de symétrie, le centre de gravité coïncide avec le centre de cisaillement, mais les axes principaux de la section ne sont normalement plus respectivement parallèle et perpendiculaire au plan de sollicitation de flexion.

L'exemple le plus courant de poutres à section à point de symétrie est sans doute la panne Z formée à froid, utilisée principalement dans les couvertures de bâtiments industriels en acier.

Lorsque les charges agissent dans le plan de forte inertie (figure 19a), le déversement fait naître des déplacements verticaux et horizontaux et une torsion.

Toutefois, la flexion autour de l'axe fort de la section n'est pas la situation courante pour les sections à point de symétrie. Très souvent, les charges sont appliquées approximativement dans le plan de l'âme (figure 19b), auquel cas elles entraînent une flexion bi-axiale : la section subit une flèche impliquant un déplacement vertical w , un déplacement horizontal v et une rotation de torsion ϕ .

Le comportement d'une poutre idéale (au sens déjà défini) est ici non linéaire et correspond à une divergence de l'équilibre.

La section peut se trouver forcée, par certaines liaisons, à se déplacer dans un plan particulier, par exemple celui de l'âme (figure 19c). Dans une telle situation, les liaisons empêchent tout déversement.

5.2.4 Influence de la forme du diagramme des moments

La flexion pure d'une poutre est une sollicitation à caractère plutôt académique car elle n'est que très rarement rencontrée en pratique.

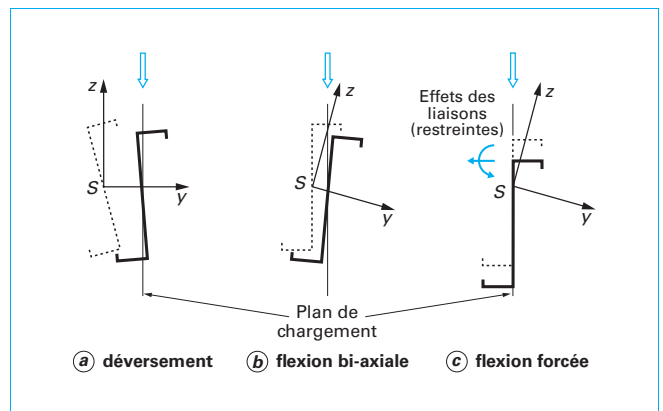
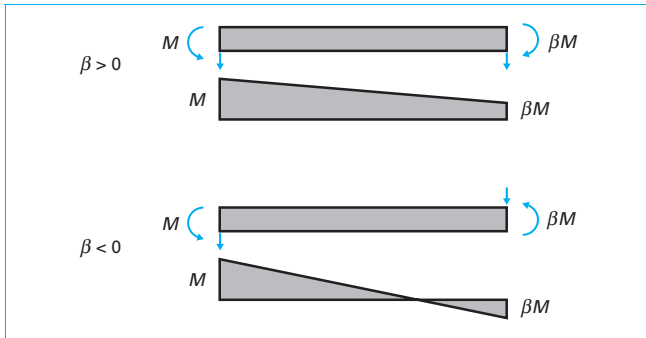


Figure 19 – Comportement d'une section à point de symétrie soumise à flexion


 Figure 20 – Rapport β des moments d'extrémité

Les sollicitations suivantes, toujours admises agir strictement dans le plan de forte inertie et conserver une direction constante lorsque la poutre déverse, constituent par contre des situations usuelles :

- **moments d'extrémité inégaux.** Le diagramme des moments varie linéairement le long de la longueur L (figure 20) et est complètement déterminé par le rapport β des valeurs des moments d'extrémité ($-1 \leq \beta \leq 1$). Ceci est la situation de toute travée non chargée d'une poutre continue (le poids mort de la poutre est supposé négligeable) ;

- **charges transversales.** La forme du diagramme des moments n'est généralement pas linéaire et elle dépend de l'intensité et de la position des charges sur la longueur L . Ceci est, par exemple, le cas d'une poutre sur appuis simples d'extrémité sollicitée par des charges supposées appliquées au centre de cisaillement (pour le niveau d'application des charges transversales, voir § 5.2.5) ;

- **combinaison de moments d'extrémité et de charges transversales.** Le diagramme des moments résulte de la superposition des diagrammes relatifs, respectivement, aux moments d'extrémité et aux forces transversales. Ce type de sollicitation constitue le cas le plus général. Elle se rencontre dans toute travée chargée transversalement de poutre continue ou de cadre à nœuds continus ou semi-continus, et encore dans tout segment compris entre sections efficacement entretoisées de poutres chargées transversalement.

La variation du moment rend l'intégration analytique de (55) impossible pour ainsi dire ; il faut alors recourir à des méthodes approchées ou procéder par voie numérique. En utilisant ce dernier outil, on a déterminé les valeurs du *coefficient de moment équivalent* $M_{cr}/M_{cr,0}$, où $M_{cr,0}$ est la valeur M_{cr} pour le cas du moment uniforme ($\beta = 1$) ; ces valeurs sont reportées à la figure 21.

La différence observée par rapport au moment uniforme, lorsqu'on diminue β , à partir de l'unité, augmente non linéairement. Ceci est dû à la modification du mode d'instabilité qui passe d'une demi-onde symétrique de sinusoïde, lorsque $\beta = 1$, à une forme en double demi-sinusoïde antisymétrique, lorsque β tend vers -1 (flexion en double courbure). Toutefois, la valeur du rapport $M_{cr}/M_{cr,0}$ est maximum pour une valeur $\beta \approx -0,8$. On peut montrer qu'elle dépend, non seulement du rapport des moments d'extrémité β , mais aussi du paramètre $\omega = (\pi/L)\sqrt{EI_w/I_{Gt}}$ dont l'influence n'est pas du tout négligeable.

Les expressions de $M_{cr}/M_{cr,0}$ fournies dans la littérature technique reflètent rarement cette influence de ω et ne laissent ainsi apparaître que la seule dépendance de β .

Les valeurs du coefficient de moment équivalent pour quelques distributions de moments correspondant, soit à des charges transversales, soit à une combinaison de charges transversales et de moments d'extrémité, sont reportées sur l'échelle à droite de la figure 21 pour une poutre donnée.

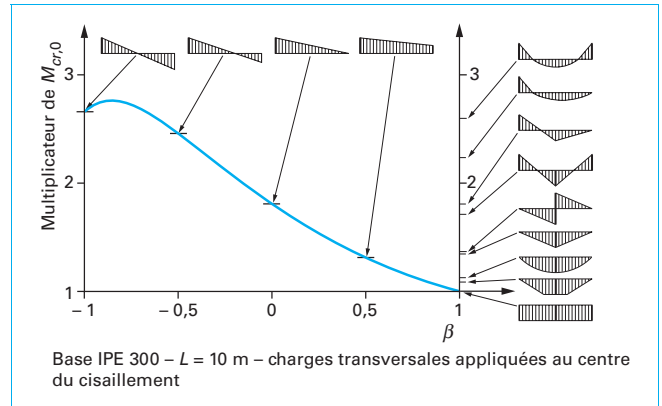


Figure 21 – Influence de la distribution des moments de flexion sollicitants (poutre à section uniforme)

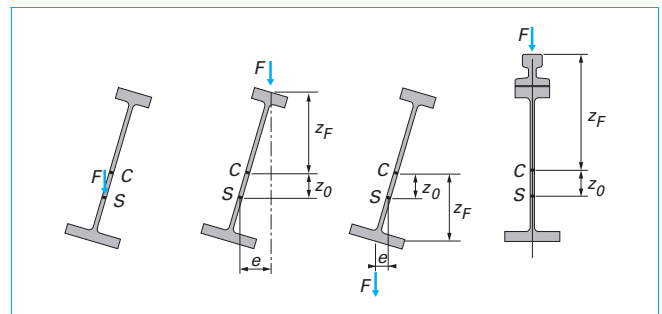


Figure 22 – Schéma du niveau d'application des charges transversales

À des fins pratiques et en admettant que les charges transversales sont appliquées au centre de cisaillement de la section transversale, le moment critique élastique de déversement est présenté sous la forme simplifiée suivante (il s'agit de la valeur critique du moment dans la section de moment maximum) :

$$M_{cr} = C_1 M_{cr,0} = C_1 \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z(GI_t + \frac{\pi^2}{L^2} EI_w)} \quad (64)$$

avec C_1 coefficient de moment équivalent (destiné à traduire l'effet du diagramme des moments de flexion le long de la poutre).

5.2.5 Influence du niveau d'application des charges transversales

Dans ce qui précède, les forces transversales sont des forces de gravité et agissent dans le plan de forte inertie de la section transversale. Leur direction reste constante et elles sont admises se déplacer avec la poutre lorsque celle-ci déverse.

Le *point d'application neutre*, pour de telles charges, est le centre de cisaillement de la section : lorsque la poutre déverse, aucun moment de torsion parasite ne naît du fait que, en configuration déformée, les charges transversales agiraient avec un bras de levier par rapport au centre de cisaillement S .

Si l'on se réfère à la figure 22, on constate aisément que des charges de gravité F appliquées en un point situé au-dessus du centre de cisaillement S , font naître un moment de torsion de déstabilisation Fe lorsque la poutre déverse. Ce moment augmente au fur et à mesure que le déversement se développe (puisque e s'accroît simultanément), de sorte qu'il tend à accélérer l'instabilité.

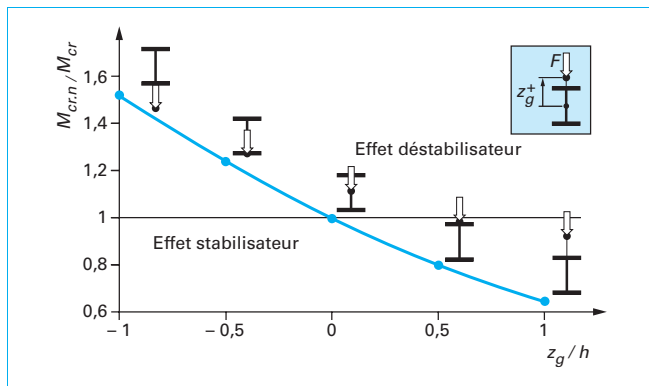


Figure 23 – Diagramme des effets du niveau d'application des charges transversales

Ces mêmes charges F , appliquées en-dessous de S , font naître un moment de torsion de stabilisation Fe puisque tendant à s'opposer au déversement. En d'autres termes, le moment critique élastique de déversement se trouve minoré dans le premier cas et majoré dans le second.

On notera, en particulier, qu'une section mono-symétrique (symétrie par rapport au plan de flexion) a un centre de cisaillement S distinct du centre de gravité C . Des charges transversales appliquées au centre de gravité induisent donc l'effet de stabilisation, ou de déstabilisation, précité selon la position relative de S et C .

Tout niveau d'application des charges transversales appliquées dans le plan de forte inertie, mais en-dehors du centre de cisaillement (point neutre), est caractérisé par sa distance algébrique z_g (en valeur et signe) mesurée depuis le centre de cisaillement S .

Le moment critique élastique de déversement correspondant à de telles situations est désigné par $M_{cr,n}$. La comparaison des résultats, obtenus par des méthodes numériques approchées, et relatifs à des charges de gravité appliquées avec une même intensité, à diverses distances du centre de cisaillement S d'une section en double té de hauteur h , est illustrée à la figure 23. L'évolution des valeurs obtenues trouve son explication à la figure 22.

L'expression du moment critique élastique de déversement (64) devrait donc être aménagée pour tenir compte du niveau d'application des charges transversales.

5.2.6 Influence des conditions d'appui

Les conditions d'appui du cas de référence (voir § 5.2.1) correspondent à des situations idéales. Celles rencontrées en pratique peuvent en diverger très significativement en raison de restraints élastiques procurées par les appuis et les dispositions constructives mises en œuvre. De telles restraints proviennent d'encastres élastiques aux extrémités ou, simplement, de la continuité d'une poutre sur ses appuis intermédiaires.

■ Les conditions d'appui aux extrémités de la longueur L sont relatives à la flexion dans le plan de sollicitation, à la flexion latérale, à la torsion uniforme et à la torsion de gauchissement. Les restraints en flexion dans le plan de sollicitation ont pour effet de modifier la forme du diagramme des moments de flexion sollicitants. Il en résulte une majoration de la valeur du moment critique élastique de déversement par comparaison à celui de la poutre de référence.

Toute modification des conditions d'appui relatives au comportement hors plan (flexion latérale, torsion uniforme et torsion de gauchissement), comparativement aux appuis simples (voir § 5.2.1),

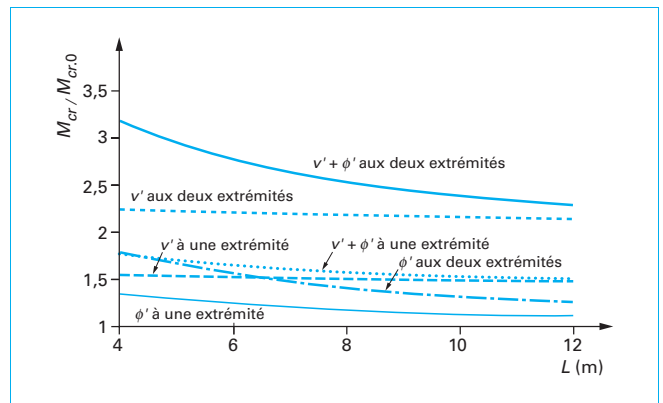


Figure 24 – Effets d'un encastrement à la flexion latérale $v' = 0$ et d'un empêchement de gauchissement $\phi' = 0$ (moment uniforme)

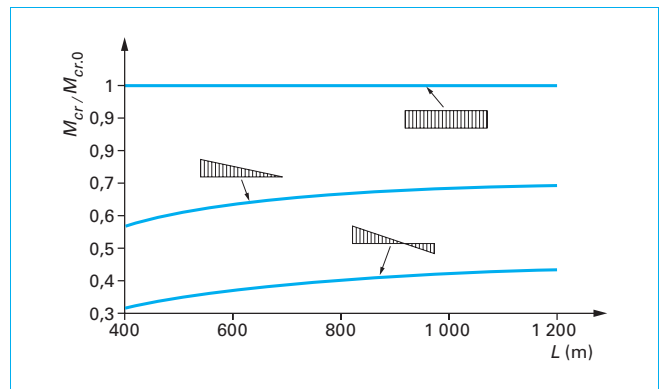


Figure 25 – Effet d'une rotation de torsion rendue libre à une extrémité

est susceptible d'avoir, à son tour, une influence sur la valeur du moment critique élastique de déversement. En particulier, les restraints vis-à-vis du gauchissement résultent, soit de la continuité sur appuis intermédiaires, soit d'un empêchement total ou partiel de gauchissement aux extrémités en raison des assemblages à d'autres éléments de la structure.

■ Les effets de diverses restraints d'extrémité apportées à la poutre de référence (moment uniforme) sont illustrées à la figure 24 ;

$\phi' \equiv \frac{d\phi}{dx}$ ($= 0$) signifie un encastrement à la flexion latérale et $v' \equiv \frac{dv}{dx}$ un empêchement de gauchissement. De toute évidence, les effets d'un empêchement de gauchissement diminuent lorsque la longueur L augmente, tandis que ceux d'un encastrement à la flexion latérale ne sont que peu affectés par cette même longueur L .

Ainsi, bien que ces deux types de restraints aient des effets comparables pour les poutres courtes, seuls ceux relatifs à l'encastrement à la flexion latérale restent significatifs pour les poutres longues.

■ Le fait de permettre à une des extrémités de la poutre de tourner librement en rotation de torsion θ a une influence particulièrement défavorable sur la valeur du moment critique élastique, ainsi que le montre la figure 25 pour deux types de diagramme des moments de flexion sollicitants, caractérisés respectivement par $\beta = 0$ et $\beta = -0,50$. On insistera sur le fait que les résultats ne dépendent pas de l'extrémité qui est libérée de son encastrement à la torsion.

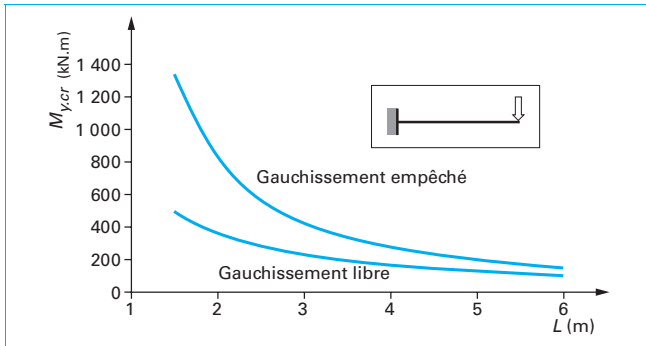


Figure 26 – Effet d'un empêchement de gauchissement à l'appui d'une poutre en console

■ L'absence de toute restrainte à l'extrémité libre d'une poutre en console a une influence considérable sur le comportement structural. Ainsi, la semelle tendue d'une poutre en console, sollicitée par une charge concentrée appliquée à son extrémité libre, subit un déplacement latéral plus important que la semelle comprimée. En son seul appui, une poutre en console est habituellement admise encastree, en particulier vis-à-vis de la flexion latérale et de la torsion, et libre de gauchir. Toute restrainte au gauchissement est susceptible d'accroître substantiellement le moment critique élastique de déversement. (figure 26). C'est pourquoi, il importe de se montrer très circonspect dans l'usage d'expressions du moment critique de poutres en console disponibles dans la littérature, mais non accompagnées d'indications précises quant aux hypothèses relatives aux conditions d'appui.

5.2.7 Restreintes intermédiaires

Assez souvent, une poutre reçoit son chargement d'autres éléments structuraux auxquels elle est, ou non, assemblée mécaniquement. Ces éléments peuvent exercer des restraints entre les extrémités de la longueur L , dites dès lors « *restraints élastiques intermédiaires* », qui peuvent influencer le moment critique élastique de déversement.

On peut distinguer les *restraints continues*, réparties tout le long de la longueur L (assurées par la fixation à intervalles réguliers de pannes, de tôles de couverture ou de bardage, d'éléments de plancher) et les *restraints discrètes* (assurées particulièrement par des poutres secondaires transversales ou des bracons de stabilisation).

En toute généralité, une restrainte intermédiaire peut assurer l'une et/ou l'autre des fonctions suivantes (figure 27) :

- **maintien élastique latéral**, agissant à une distance \bar{b} du centre de cisaillement S de la section transversale ;
- **maintien élastique en rotation de torsion**, agissant au niveau du centre de cisaillement S de la section transversale.

5.2.8 Expression générale du moment critique élastique de déversement

On a déjà indiqué, à plusieurs reprises, qu'une solution analytique rigoureuse à l'équation différentielle régissant le déversement des poutres – et donc une expression rigoureuse du moment critique élastique de déversement – n'est possible que dans des cas relativement simples. On doit donc envisager de mettre en œuvre des méthodes approchées. Toutefois, la multiplicité des paramètres susceptibles d'influencer le phénomène confère aussi des limites à ce genre de démarche.

■ L'expression la plus générale du moment critique élastique de déversement est ainsi réservée à la poutre, ou au segment de poutre, rectiligne à section uniforme, symétrique par rapport au plan de forte inertie et fléchié dans ce plan (plan de sollicitation de flexion), munie à ses deux extrémités de restraints élastiques vis-à-

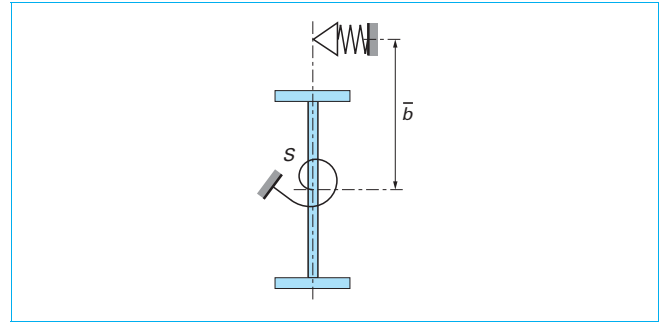


Figure 27 – Modélisation d'une restrainte intermédiaire

vis du déplacement latéral et de la rotation de torsion et dépourvue de restraints de toute nature entre ses extrémités.

Ce moment critique élastique de déversement M_{cr} – à considérer comme la valeur critique du moment de flexion maximum dans la poutre ou segment de poutre – peut être évalué par la relation approchée suivante :

$$M_{y,cr} = C_1 \frac{\pi^2 E I_z}{(k_z L)^2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{k_z}{k_w} \right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(k_z L)^2 G I_t}{\pi^2 E I_z} + (C_2 z_g - C_3 z_j)^2} - [C_2 z_g - C_3 z_j] \right\} \quad (65)$$

avec $G = E/2 (1 + \nu)$

- I_t inertie torsionnelle de Saint-Venant,
- I_w inertie de gauchissement,
- I_z inertie flexionnelle d'axe faible,
- L longueur de poutre, ou de tronçon de poutre, entre sections tenues latéralement et en rotation de torsion,
- C_1, C_2 et C_3 facteurs dépendant du diagramme des moments de flexion sollicitants et des conditions d'appui aux extrémités de la poutre ou du tronçon de poutre,
- C_1 facteur principal reflétant la forme du diagramme des moments,
- C_2 facteur lié à la coordonnée z_g déterminant le niveau d'application des charges transversales (mesuré depuis le centre de cisaillement),
- C_3 facteur lié à la mono-symétrie de la section transversale dans le plan de sollicitation de flexion,
- k_z et k_w facteurs de longueurs effectives dépendant des conditions de restrainte aux extrémités : k_z couvre la restrainte élastique en rotation de torsion dans le plan de faible inertie et k_w la restrainte élastique au gauchissement. Ces deux facteurs varient individuellement de 0,5, pour une restrainte complète aux deux extrémités, à 1 pour l'absence de restrainte en ces extrémités, avec une valeur de l'ordre de 0,7 pour une extrémité totalement restrainte, tandis que l'autre extrémité est dépourvue de restrainte. Pour les conditions dites d'« appuis à fourche » (ϕ et ν totalement restraints aux extrémités) ou pour une approche délibérément sécuritaire, on adopte $k_z = k_w = 1$. Sauf si des dispositions particulières sont mises en œuvre pour empêcher le gauchissement, on adoptera alors $k_w = 1$,
- z_g distance verticale entre le point d'application de la charge et le centre de cisaillement S ,

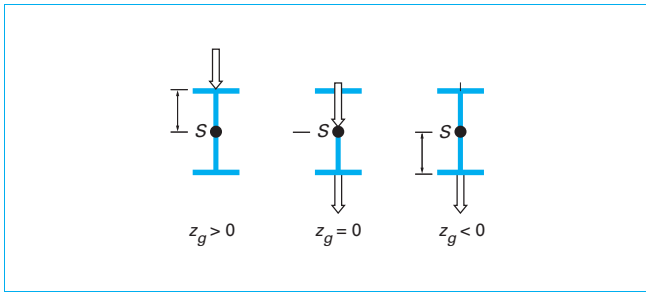


Figure 28 – Convention de signes pour z_g

z_j facteur de non symétrie verticale ($= -\beta_z$, appelé *facteur de Wagner*) :

$$z_j = z_s - 0,5 \int_A (y^2 + z^2) \frac{z}{I_y} dA$$

avec z_s distance entre le centre de cisaillement S et le centre de gravité C .

- Pour des charges de gravité, la distance z_g est positive lorsque le point d'application des charges est situé plus haut que le centre de cisaillement.
- En règle générale, la distance z_g est positive pour des charges transversales agissant vers le centre de cisaillement depuis leur point d'application (figure 28).

On trouvera, dans le dossier [8], les tableaux utiles permettant la détermination des coefficients C_1 , C_2 et C_3 nécessaires à la pratique de la vérification au déversement.

■ Il existe maintenant des **outils informatiques** permettant de calculer très rapidement la valeur numérique du moment critique élastique de déversement pour des poutres (ou segments de poutre) à propriétés variables sur leur longueur, soumises à des chargements, des conditions d'appui et des contraintes élastiques quelconques, tant aux appuis, qu'entre les appuis. Un tel outil, de très grande utilité, est le logiciel LTBeam librement téléchargeable sur le site du CTICM. (Ce logiciel a été développé dans le cadre d'un projet de recherche financé par l'Union européenne et coordonné par l'auteur du présent dossier.) Ce logiciel a d'ailleurs été utilisé pour simuler les influences, sur le moment critique, de divers facteurs abondamment illustrés dans les paragraphes précédents ([4] et [5]).

5.3 Détermination du moment ultime de déversement

Tout comme pour le flambement, la résistance des poutres au déversement ne peut être assimilée à la charge de bifurcation (moment critique élastique) car, outre l'élanement de la poutre, elle est affectée par les paramètres suivants :

- limite d'élasticité ;
- imperfections géométriques ;
- contraintes résiduelles.

Le déversement des poutres n'a pas fait l'objet d'une vaste recherche expérimentale et numérique coordonnée, comme cela a été fait pour le flambement des poteaux. Néanmoins, on dispose dans la littérature d'un grand nombre de résultats d'essais disparates qui ont été analysés et exploités statistiquement. L'observation faite pour le flambement, à savoir la nécessité de définir plusieurs courbes de flambement, reste *a fortiori* vraie pour le déversement.

Il a été observé que les résultats d'essais de poutres au déversement présentent une dispersion nettement plus grande que les essais de flambement, ce qui peut se comprendre à la lumière du plus grand nombre de paramètres et des plus grandes difficultés à effectuer les essais dans les conditions d'appui idéales auxquelles on se réfère dans les développements théoriques du déversement.

Dans un diagramme moment relatif – élanement relatif (de déversement), ces résultats se disposent selon un nuage de points semblable à la représentation de la figure 7.

On a tenté, sur des bases mécaniques, d'établir une formulation analytique de courbes de déversement. Une équation du 3^e degré (au lieu d'une équation du 2^e degré pour le flambement) a été obtenue. Il a toutefois été constaté que l'expression utilisée pour les courbes de flambement pouvait être tout aussi efficace. Le souci de simplicité a voulu que l'on adopte pour le déversement une formulation analytique de flambement et que l'on ne multiplie pas à l'envi le nombre de courbes.

Les critères retenus de sélection des courbes sont la forme et/ou le mode de fabrication, ainsi que la nuance d'acier. L'exploitation statistique des résultats d'essais relatifs aux catégories ainsi définies a permis de calibrer les valeurs du paramètre d'imperfection généralisée α_{LT} à associer à ces courbes.

Compte tenu du fait que les valeurs obtenues de la sorte diffèrent très peu de certaines de celles déjà utilisées pour le flambement, il a été décidé purement et simplement de recourir à des courbes de flambement pour couvrir le déversement, à tout le moins dans la règle générale que donne l'Eurocode 3 dans sa partie 1-1. Celui-ci offre quelques règles alternatives applicables à des situations particulières pour lesquelles la formulation analytique a été distordue et manipulée sans raison, en lui faisant perdre son sens physique d'origine.

En l'absence de déversement, la résistance de la poutre est déterminée par la résistance en section M_R . En présence de déversement, cette résistance ne peut être atteinte et elle est limitée à la résistance ultime, désignée M_u . Cette résistance ultime est obtenue comme une pénalisation de la résistance en section M_R :

$$M_u = \chi_{LT} M_R$$

Comme pour le flambement, une courbe de déversement est représentée en coordonnées relatives dans un diagramme moment – élanement de déversement.

Les coordonnées relatives sont affectées de l'indice LT (pour « lateral torsional » voir **Nota**). Ainsi, on a :

– charge relative, appelée aussi *coefficient de réduction au déversement* :

$$\chi_{LT} = \frac{M_u}{M_R} \quad (66)$$

– élanement relatif :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \frac{\lambda_{LT}}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{M_R}{M_{cr}}} \quad (67)$$

La droite $M_u = M_R$ (resp. $\chi_{LT} = 1$) et l'hyperbole $M_u = M_{cr}$ (resp. $\chi_{LT} = 1 / \bar{\lambda}_{LT}^2$) sont donc représentatives de la réponse d'une poutre idéale faite d'un matériau élastique-parfaitement plastique en coordonnées dimensionnelles (respect. en coordonnées adimensionnelles). Elles constituent les bornes du comportement d'une poutre industrielle dont la réponse structurale est représentée par la courbe en trait plein de la figure 29.

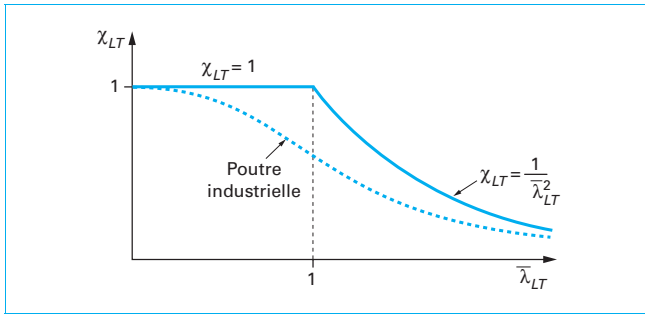


Figure 29 – Comportement d'une poutre idéale et d'une poutre industrielle

Le facteur de réduction au déversement χ_{LT} s'obtient selon :

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}} \leq 1 \quad (68)$$

avec :

$$\phi_{LT} = 0,5 \left(1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2 \right) \quad (69)$$

Il peut s'obtenir à partir de la figure 8 et du tableau 1, à condition d'y faire la substitution $\chi \rightarrow \chi_{LT}$, $\bar{\lambda} \rightarrow \bar{\lambda}_{LT}$ et $\alpha \rightarrow \alpha_{LT}$, en se référant à une table de sélection appropriée (voir [8]).

Dans le cas de moments de flexion fortement variables le long de la poutre et dans le domaine des élancements $\bar{\lambda}_{LT} \leq 1,5$, l'effet de la forme du diagramme correspondant n'est trouvé qu'imparfaitement traduit par le coefficient C_1 dans l'expression du moment critique. C'est pourquoi l'Eurocode 3 propose, dans ces conditions,

d'en répercuter aussi l'effet du côté de la résistance en se référant à un coefficient de réduction modifié selon :

$$\chi_{LT,mod} = \frac{\chi_{LT}}{f} \leq 1 \quad (70)$$

où le facteur $f \leq 1$ dépend de l'élancement $\bar{\lambda}_{LT}$ et d'un facteur k_c tributaire de la forme du diagramme.

Nota. L'indice anglo-saxon est conservé par souci de cohérence avec les symboles des Eurocodes.

6. Conclusion

Le présent dossier visait à introduire les phénomènes élémentaires d'instabilité structurale spécifiques aux barres, à stigmatiser, pour chacun d'entre eux, la différence entre charge critique élastique et charge ultime et à développer le modèle physique permettant de déterminer cette dernière.

L'accent y a été délibérément mis sur les concepts et principes plutôt que sur des modalités détaillées de la vérification, au plan réglementaire, des éléments structuraux vis-à-vis de l'instabilité. C'est pourquoi, la manière d'assurer la sécurité structurale requise dans le cadre de projets n'y est notamment ni traitée, ni même évoquée.

La procédure de mise en œuvre pratique, dans un contexte de vérification réglementaire, de toutes les notions exposées ici est développée et discutée dans les dossiers spécifiques aux composants métalliques susceptibles d'être affectés par un ou plusieurs des phénomènes d'instabilité passés en revue ici.