الفصل الإحصائية.

مفاهيم أساسية في الاحتمالات.

الحدث العشوائي: هو كل تجربة نقوم بها تحتمل أوجه مختلفة في نتائجها أو إمكانية حدوث نتيجة أم عدمها.

احتمال الحدوث: هو التوقع حدوث نتيجة ما في حدث عشوائي وتعبر عنه بالمقدار P يكون محصور بين 0 و 1.

لكي يكون الاحتمال معبرا القلق عن مدى حقيقة ما يجري يجب أن نأخذ عينة (عدد محاولات) كبيرة جدا.

يعرف الاحتمال رياضيا بالعلاقة:

$$P_i = \frac{n_i}{N}$$

حيث: n_i: عدد المحاولات التي ظهرت فيها النتيجة.

N: العدد الكلي للمحاولات.

P_i: احتمال ظهور النتيجة.

مثال: عند إحصاء عدد الطلبة للسنة ثانية قيرتاء في المدرسة يكون مثلا:

$N = 49$

عدد الطلبة أعمارهم 21 = 35

" " " 22 = 6

" " " 23 = 3

" " " 24 = 2

" " " 25 = 3

" " " 19 = 0

احتمال تواجد العمر 21 للطالب:

$P_{21} = \frac{35}{49} =$ $\quad P_{23} = 3/49$

$P_{22} = \frac{6}{49}$ $\quad P_{24} = 0 \quad P_{25} = 0$

- كلما كان العدد كبير كلما كانت النتائج دقيقة.

الأحداث المتطاردة: تتمثل عن حدثين إنهما متطاردان إذا كان حدوث أحدهما يلغي حدوث الآخر مثل تواجد طالب في نقطة محددة (x,y) داخل القاعة ينفي بالضرورة وجود طالب آخر في نفس النقطة. هذين الحدثين متطاردين. وجود طالب داخل القاعة لا ينفي وجود آخر داخل نفس القاعة هذين الحدثين ليسا متطاردين.

مثال:

* تواجد M في A_1 حدث ①
* تواجد M في A_2 حدث ②

هذين الحدثين متطاردين

* تواجد M في A_2. هذا الحدث ليس متطارد مع حدث ① لا متطارد مع ②.

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

Generated by CamScanner from intsig.com

① جد احتمال تواجد جزيئة في ΔV_1

$$P_1 = \frac{\text{عدد الجزيئات في } \Delta V_1}{\text{عدد الجزيئات في } V_T} = \frac{N_1}{N_T} = \frac{n_1 \cancel{N}}{n_T \cancel{N}} = \frac{\Delta V_1}{V_T}$$

② ماهو احتمال تواجد جزيئتين في ΔV_1

③ " " " " " ΔV_1 و ΔV_2

④ " " " " " ΔV_1 أو ΔV_2

⑤ " " " " " خارج ΔV_1

② $P_2 = \frac{\Delta V_2}{V_2}$

③ احتمال التواجد في ΔV_1 و ΔV_2 معاً

④ احتمال التواجد في ΔV_1 أو ΔV_2:

$$P_4 = P_1 + P_2 = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2}{V_T}$$

⑤ احتمال التواجد خارج ΔV_1:

$$q_1 = P_4 = 1 - P_1$$

⑥ " " " " " ΔV_2

$$q_2 = 1 - P_2$$

- احتمال التواجد خارج ΔV_1 وخارج ΔV_2:

$$q = 1 - (P_1 + P_2)$$

الأحداث المستقلة:

نقول عن حدثين أنهما مستقلان إذا كان حدوث أحدهما غير مرتبط أو لا يؤثر اطلاقاً على حدوث الآخر.

مثال: رمي كريات حديدية صغيرة في غرفة بشكل عشوائي هذه الكريات لا تؤثر على بعض البعض في غرفة بشكل عشوائي.

- رمي كريات مغناطيسية بشكل عشوائي في غرفة لوجود يقطع التأثير المتبادل بين الكريتين.

- سحب كريات مرقمة الواحدة تلو الأخرى مع إعادة الكرة المسحوبة الأحداث هنا مستقلة.

- سحب كريات مرقمة وعدم إرجاعها هذا الحدث يؤثر على الحدث الذي يليه أي هذان الحدثان مرتبطان مع بعضهما.

- لدينا غرفة حجمها لا منتهية إلى قسمين V_1 و V_2 بحيث $V_1 = 2V_2$

- جد كل الحالات الممكنة لتوزيع جزيئتين في هذا الحجم وجد احتمال كل حالة.

V_2	V_1

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

① تواجد الجزيئتين M_1 و M_2 في V_1.

② " M_1 و M_2 في V_2.

③ M_1 في V_1 و M_2 في V_2.

④ " M_1 في V_2 و M_2 في V_1.

① احتمال تواجد M_1 في V_1 و M_2 في V_1:

$$P_1 = P_2 = \frac{V_1}{V_T} = \frac{V_1}{3V_1} = \frac{1}{3}$$

أو + و ×

احتمال P_1 و P_2 هو: $P = P_1 \times P_2 = \frac{1}{9}$

② احتمال تواجد M_1 في V_2: $P_3 = \frac{V_2}{V_T} = 2/3$

" M_2 في V_2: $P_4 = 2/3$

احتمال تواجد P_3 و P_4 هو: $P' = P_3 \times P_4 = \frac{4}{9}$

③ احتمال تواجد M_1 في V_2 و M_2 في V_2: $P_4 \cdot P_2 = V_2$

$$P = P_2 P_4 = \frac{2}{9}$$

④ احتمال تواجد M_1 في V_1 و M_2 في V_1 أي P_1 و P_3:

$$P = P_1 P_3 = \frac{2}{9}$$

لتعميم، في حالة ظاهرة لها حدثين فقط نعطي احتمال الحدث بالعلاقة:

$$P_{\text{كلية}} = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\, p^{n}_{\text{ملاءة}}\, q^{(N-n)}$$

N = عدد الحالات الكلي (الجزيئات).

n = عدد حالات الحدث المدروس.

p = احتمال حدوث الحدث المدروس.

$q = 1 - p$: احتمال عدم حدوث الحدث المدروس.

يمثل العدد $\frac{N!}{(N-n)!\,n!}$ عدد الحالات الممكنة.

احتمال حدوث n في حدث ما:

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}\, p^{n}\, q^{N-n}$$

$q = 1 - p$ احتمال عدم حدوث الحدث.

$N = 2$ جزيئتان M_1 و M_2

V_2	V_1

$V_2 = 3L$

$V_1 = L$

الحدث: تواجد M في V_1.

- تواجد جزيئة واحدة في V_1: $n = 1$
- تواجد 2 جزيئة في V_1: $n = 2$
- عدم تواجد " " " : $n = 0$

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

Generated by CamScanner from intsig.com

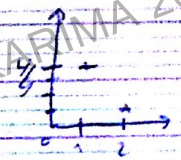
$$p(1) = \frac{2!}{1!\,1!}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{2-1}$$

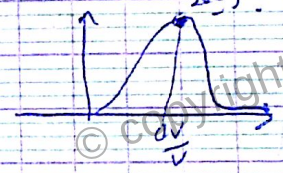
$$= 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

$$p(2) = \frac{2!}{2!\,0!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1/9$$

$$p(0) = \frac{2!}{0!\,2!}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

مستطيل





$$p = \frac{\Delta V}{V} = \frac{n}{N}$$

$$p(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}p^n$$

تقريب ستيرلينغ:

$$\ln N! = N\ln N - N$$
$$= N(\ln N - 1)$$

وفي حالة قيم كبيرة لعدد الحالات في حدود 10^{23} أي N أي:

$$\ln N - 1 \simeq \ln N$$

$$\ln N! = N\ln N$$

كثافة الإحتمال

إذا كان المتغير العشوائي مستمر يمكن كتابة احتمال حدوث بالشكل:

$$dp = \rho\, dx$$

لدى المتغير ρ كثافة الاحتمال.

القيمة المتوسطة:

$$\bar{n} = \langle n\rangle = \sum n_i\, p(n_i)$$

في المثال السابق:

$$\bar{n} = 0\left(\frac{4}{9}\right) + 1\left(\frac{4}{9}\right) + 2\left(\frac{1}{9}\right)$$
$$= \frac{2}{3}$$

- إذا كان المتغير العشوائي مستمر:

$$\bar{x} = \int x\, dp = \int x\,\rho\, dx$$

مربع القيمة المتوسطة:

يعرف بـ:

$$\langle n\rangle^2 \neq \langle n^2\rangle = \sum n_i^2\, p(n_i)$$

وفي حالة المتغير العشوائي المستمر:

$$\langle x^2\rangle = \int x^2 \rho\, dx$$

تعريف التشتت:

$$D = \langle (n - \langle n\rangle)^2\rangle$$
$$= \overline{n^2} - \bar{n}^2$$
$$= \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

Generated by CamScanner from intsig.com

الانحراف المعياري:

$$\sigma(n) = \sqrt{D(n)}$$

التوزيع ثنائي الحدين:

إن من أهم الأمثلة البسيطة في دراسة الفيزياء الإحصائية هي دراسة الحالات التي تقبل وجهين فقط لكل حالة مثل: وجهي قطعة نقدية أو نبيتين لجزيئة مثل أمثلة:

① لدينا جزيئتين لكل جزيئة عزم مغناطيسي (سبين) إما (↑) up أو (↓) down.

- ادرس كل الحالات الممكنة.
- جد احتمال كل حالة.
- جد مقدار القيمة المتوسطة لكل حالة.
- جد مربع القيمة المتوسطة.
- جد مقدار التشتت والانحراف المعياري.

الحل:

الحالات الممكنة: $N = 2$

↑↑ ، ↑↓ ، ↓↑ ، ↓↓

الحدث المدروس: عدد الجزيئات ذات السبين (↑):

- الحالات الممكنة:
  - $n = 1$ ↑ جزيئة
  - $n = 2$ ↑ جزيئة
  - $n = 0$ ↑ يوجد
- جزيئتين للأعلى $n = 1$

الاحتمال:

$$p(1) = \frac{2!}{1!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

احتمال تواجد جزيئة واحدة فقط سبين (↑) هو $\frac{1}{2}$ في حالة عدم وجود تأثير مغناطيسي (حقل مغناطيسي خارجي).

- جزيئتين نحو الأعلى: $n = 2$

$$p(2) = \frac{2!}{2!\,0!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$$

لا يوجد جزيئة نحو الأعلى: $n = 0$ عدد الجزيئات ذات سبين ↑

$$p(0) = \frac{2!}{0!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

القيمة المتوسطة:

$$\bar{n} = 0\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\bar{n} = 1$$

$$\overline{n^2} = 0^2\left(\frac{1}{4}\right) + 1^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

التشتت:

$$D = \overline{n^2} - \bar{n}^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

Generated by CamScanner from intsig.com

مفاهيم أساسية في الفيزياء الإحصائية:

1/ الخواص الإحصائية كنظام ميكروسكوبي:

عند دراسة نظام الحالة الميكروسكوبية للنظام فيزيائي مثل مجموعة الإلكترونات في المادة، الغاز المثالي، فإنه لا يمكن مطلقا تتبع الجسيمات المجهرية جسيمة جسيمة ودراستها دراسة فيزيائية كلاسيكية من أجل ذلك اتجه العلماء إلى تطبيق المفاهيم الإحصائية في دراسة هذه الأنظمة ولاحظوا أن هذه الدراسة تتوافق إلى حد كبير مع النتائج التجريبية.

2/ الديناميكا الحرارية الإحصائية: هو علم يهتم بدراسة الخواص الحرارية لنظام ماكروسكوبي، الضغط، الطاقة، وذلك بدراسة احصائية للأنظمة الميكروسكوبية المكونة له (سرعة الجسيمات موضعها، طاقتها، كمية حركتها) ويقسم علم الديناميكا إلى قسمين:

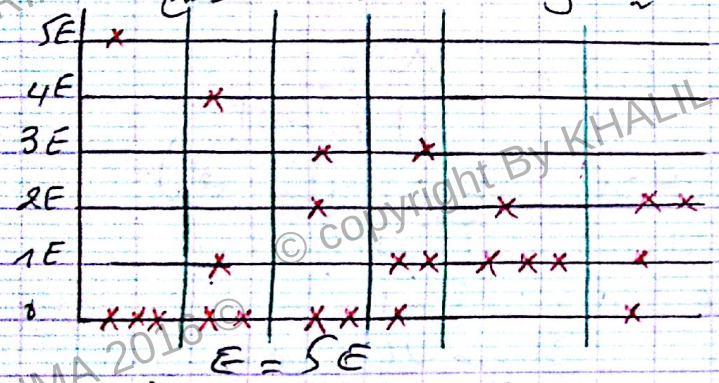
أ- ديناميكا احصائية تقليدية: هو علم أسسه أساسا العالمان ماكسويل و بولتزمان، وتعتمد إضافة الافتراض (الاحتمالات (فوابتن)) على قوانين الفيزياء الكلاسيكية (قانون نيوتن $R=mg$) في دراسة الخواص الفيزيائية للجسيمات المجهرية.

ب- ديناميكا احصائية كمومية: هو علم ظهر مع ظهور ميكانيك الكم وظهور معه الثورات الهامة للطاقة، مؤسسه: بلانك، اينشتاين، ديراك

مثال:

لدينا 4 جسيمات تتوزع في 6 مستويات للطاقة $0E, 5E, 4E, 3E, 2E, 1E$ بحيث طاقتها مجتمعة تتجاوز $E = 5E$

أعطي كل الحالات الممكنة لتوزيع هذه الجسيمات.



نظام ميكروسكوبي: هو نظام يتألف من الجسيمات الدقيقة وخواصها. أما النظام الماكروسكوبي هو مجموعة كبيرة من الأنظمة الميكروسكوبية بحيث يمكن التعامل معها عيانيا

الفضاء الإقليدي: هو فضاء رياضي به 3 محاور (3 متغيرات) x, y, z ولكن هذا الفضاء عاجز عن تقديم قاعدة لدراسة شاملة للحالات الميكروسكوبية.

$dV = dx\,dy\,dz$

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©
Generated by CamScanner from intsig.com

$d\tau = dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z$

الفضاء الطوري: هو فضاء رياضي يتكون من 6 محاور يسمح عند تعيين أي نقطة منه (سداسية) بتعريف كامل لموضع وحركة الجسيم وطاقته أيضا.

الوزن الإحصائي: هو عدد الطرق التي تتوزع بها الجسيمات في المستويات الطاقوية المسموحة أو الحالات الإحصائية الممكنة.

يرمز له بالرمز: w

$$w(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

(في حالة الجزيئات المتشابهة.

N: عدد العينات. (عدد المحاولات).

n: عدد العينات في الحدث المدروس.

w: الوزن الإحصائي.

$$P(n) = w(n)\cdot p^{n}\, q^{N-n}$$

احتمال الوجود n عينة داخل الحدث

توزيع برنولي:

في حالة N كبيرة جدا و ΔV صغير جدا أمام V أي n صغيرة جدا أمام N يكون:

$$\bar{n} = \frac{\Delta V}{V} N = p\cdot N$$

$$P(n) = \frac{\bar{n}^{n} e^{-\bar{n}}}{n!}$$

توزيع (نموذج) عوض:

N كبيرة جدا. $N = p\cdot N$

n: كبيرة جدا

و $(N-n)$ كبيرة جدا.

حيث: D هو التشتت.

$$P(n) = \frac{e^{\frac{y^2}{2D}}}{\sqrt{2\pi D}}$$

$$y = n - \bar{n}$$

$$P(n) = \frac{e^{(n-\bar{n})^2/2D}}{\sqrt{2\pi D}}$$

القيمة المتوسطة: $\bar{n} = \frac{\Delta V}{V} N = p\cdot N$

التشتت: $D = \overline{n^2} - \bar{n}^2$

علاقة بولتزمان:

$S = K \ln w$ ← الأنتروبي

الوزن الإحصائي

لقد بين بولتزمان انطلاقا من مفهوم الأنتروبيا وانطلاقا من قوانين الاحتمالات كيف يمكن إيجاد علاقة ما بين الأنتروبي والوزن الإحصائي تعتبر هذه العلاقة هي أهم العلاقات في الفيزياء الإحصائية لأنها تعبر الجسر الواصل بين الترموديناميك والإحصاء

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

Generated by CamScanner from intsig.com

النظام الميكروقانوني: هو نظام احصائي
ويدعى أيضا بالنظام الأكثر احتمالا.
ويتحقق فيه:

$N = cte \Rightarrow dN = 0$

$E = cte \Rightarrow dE = 0$

$dS = 0 \Rightarrow$ أكبر ما يمكن.

توزيع ماكسويل بولتزمان:
الفيزياء الاحصائية الكلاسيكية:
عرضها بولتزمان: من أجل إنشاء دراسة احصائية لنظام فيزيائي أعطى بولتزمان فرضيتين أساسيتين يبنى عليهما علم الفيزياء الإحصائية التقليدية:

1- لكل نظام فيزيائي وزن احصائي يعرف بأنه عدد التوزيعات لهذا النظام. (W) (Ω).

2- لكل وزن إحصائي يرافقه مقدار في الأنتروبي ويتناسب معه وفق دالة اللوغاريتم: $S \propto \ln W$

$\propto$: ثابت بولتزمان.

إذا وجدت عدة أنظمة مستقلة فإن:

1- الأوزان الإحصائية لها هي $W_1, W_2, W_3 \ldots$

الوزن الإحصائي الكلي:

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3$$

2- الأنتروبي للنظام الكلي:

$$S_T = S_1 + S_2 + S_3$$

إذن: $S \propto \ln W$

دالة التجزئة (التقسيم): في الفضاء تعرف الوزن الإحصائي بالعلاقة:

$$W = \frac{N!}{\prod_i n_i!}$$

$\prod$: جداء وفق

حيث: $N = \sum n_i$

- في الحالة الأكثر احتمالا (نظام ميروقانوني):

$$N = c^{te} \Rightarrow \begin{cases} \sum n = c^{te} \\ dn = 0 \end{cases} \Rightarrow d\sum n = 0$$

$$\Rightarrow \sum dn = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} E = c^{te} \\ dE = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = \sum n_i \varepsilon_i \\ d\sum n_i \varepsilon_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum dn_i \varepsilon_i = 0$$

أعظمية $S = c^{te} \;/\; dS = 0$

$$\Rightarrow d(k \ln W) = 0 \Rightarrow d \frac{\ln N!}{\prod n_i!} = 0$$

$$d[\ln N! - \sum \ln n!] = 0$$

$$-d\sum \ln n! = 0$$

$$-\sum d(n \ln n) = 0$$

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

Generated by CamScanner from intsig.com

$$d(n\ln n) = dn\ln n + n\,d\ln n$$
$$= \ln n\,dn + dn$$
$$= (\ln n + 1)\,dn$$
$$\sum \ln n \cdot dn = 0 \quad (3)$$

ملاحظة:

$$\begin{cases} dE = 0 \\ dN = 0 \end{cases} \quad \text{ولكن} \quad \begin{cases} dE \neq 0 \\ dn \neq 0 \end{cases}$$

بضرب (1) و (2) في α و β على التوالي والجمع مع (3):

$$\sum(\alpha\,dn + \beta\varepsilon_i\,dn + \ln n\,dn) = 0$$
$$\sum((\alpha + \beta\varepsilon_i) + \ln n)\,dn = 0$$

درجة الحرارة والعدد الكلي:

dn = لا يمكن أن تكون معدومة.

إذن:

$$\alpha + \beta\varepsilon_i + \ln n = 0$$
$$-(\alpha + \beta\varepsilon_i) = \ln n$$
$$n = e^{-\alpha - \beta\varepsilon_i}$$

هي المعادلة الأساسية لماكسويل بولتزمان والتي بموجبها يمكن تحديد عدد الجسيمات في كل مستوى طاقوي.

حيث α و β ثوابت لاغرانج.

$$\alpha = \ln\frac{Z}{N}, \quad \beta = \frac{1}{KT}$$

حيث Z: هو دالة التوزيع وتعرف بالعلاقة التالية:

$$Z = \sum e^{-\beta\varepsilon_i}$$

مثال: بين أن:

$$\alpha = \frac{\ln Z}{N}$$

- جد احتمال تواجد n جسيمة في N بدلالة Z.

$$N = \sum n = \sum e^{-\alpha - \beta\varepsilon_i}$$
$$= e^{-\alpha}\sum e^{-\beta\varepsilon_i}$$
$$N = e^{-\alpha} \cdot Z$$
$$\frac{Z}{N} = e^{\alpha} \Rightarrow \alpha = \ln\frac{Z}{N}$$

الاحتمال:

$$P = \frac{\Delta N}{N} = \frac{n}{N} = \frac{e^{-\alpha} \cdot e^{-\beta\varepsilon_i}}{\sum e^{-\alpha - \beta\varepsilon_i}}$$
$$P = \frac{e^{-\beta\varepsilon_i}}{Z}$$

هي علاقة Gibbs.

المجتمع مع الترموديناميك نكتب S بدلالة E.

تطبيق: بين أن:

$$S = K(N\ln N + \alpha N + \beta E)$$
$$S = K(N\ln N + \alpha N + \beta E)$$
$$S = K(N\ln Z + \beta E)$$

الحل:

$$S = K\ln\Omega$$
$$= K\ln\frac{N!}{\prod n!}$$
$$= K[N\ln N - \sum N(\ln n)$$

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

Generated by CamScanner from intsig.com

$$n = e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i}$$

$$\ln n = -\alpha - \beta \varepsilon_i$$

$$S = k[N \ln N + \alpha \sum n + \beta \sum n_i \varepsilon_i]$$

$$= k[N \ln N + \alpha N + \beta E]$$

$$\alpha = \ln \frac{Z}{N} = \ln Z - \ln N$$

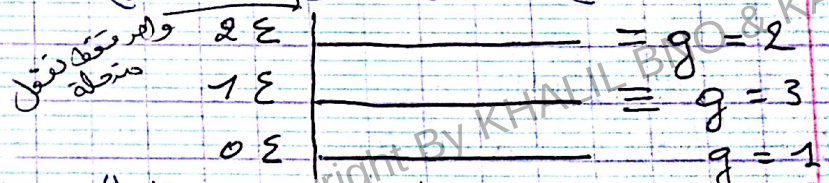
$$S = k[N \ln Z - \alpha N + \alpha N + \beta E]$$

$$= k(N \ln Z + \beta E)$$

$$E = \frac{S}{k}$$

الإحصاء ماكسويل بولتزمان في الحالات المتصلة (الطاقة المتصلة)

نقول عن نظام احصائي أنه متصل إذا كان للعناصر الجسيمية في الفضاء الطوري (سويات الطاقة) عناصر جسيمية ثانوية وسمي درجة التوالد (الانحلال) g هو عدد السويات الطاقوية الثانوية في المستوى الطاقوي الأساسي:



ويصبح عدد الجسيمات في المستوى الطاقوي ε_i كالتالي:

$$n_i = g_i e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i}$$

والوزن الإحصائي (ماكسويل بولتزمان)

$$W = N! \prod_i \left(\frac{g_i}{n_i!}\right)^{n_i}$$

$$W = N! \frac{\prod g_i^{n_i}}{\prod n_i!}$$

$$Z = \sum g_i e^{-\beta \varepsilon_i}$$

وفي حالة عدم الانحلال $g_1 = 1$

مثال: بين أن

$$S = k[N \ln N + \alpha N + \beta E] \quad (1)$$

$$S = k(N \ln N + \beta E] \quad (2)$$

$$S = k \ln W$$

$$= k \ln \frac{N! \prod g_i^{n_i}}{\prod n_i!}$$

$$= k[\ln(N! \prod g_i^{n_i}) - \ln(\prod n_i!)]$$

$$= k(\ln N! + \sum \ln g_i^{n_i} - \sum \ln n_i!)$$

$$= k[N \ln N + \sum n_i \ln g_i - \sum n_i \ln n_i]$$

$$= k[N \ln N + \sum n_i \ln g_i - \sum n_i \ln n_i]$$

$$= k[N \ln N + \sum n_i \ln \frac{g_i}{n_i}]$$

$$= k(N \ln N + \sum g_i e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i} \ln \frac{g_i}{g_i e^{-\alpha - \beta \varepsilon_i}})$$

$$= k(N \ln N + \sum n_i (\alpha + \beta \varepsilon_i))$$

$$= k(N \ln N + N\alpha + \beta E)$$

$$\alpha \sum n_i = N$$

$$\alpha = \ln \frac{Z}{N}$$ نعوض

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

Generated by CamScanner from intsig.com

تطبيقات احصاء ماكسويل:

1- احصاء السرعات: لتعرف احتمال تواجد جزيئ سرعته محصورة بين v_x و v_x+dv_x وفق المحور x بالعلاقة $f(v_x)\,dv_x$ حيث تسمى الدالة $f(v_x)$ دالة الاحتمال و يمكن البرهان أن:

$$P_i = \frac{dN_i}{N} = f(v_x)\,dv_x = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\, e^{-\frac{m}{2kT}v_x^2}\, dv_x$$

$\beta = \frac{m}{kT}$ ثابت $= m$

$$f(v_y)\,dv_y = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\, e^{-m/2kT\, v_y^2}\, dv_y$$

$$f(v_z)\,dv_z = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\, e^{-m/2kT\, v_z^2}\, dv_z$$

احتمال تواجد جسيم سرعته v_x ، v_y ، v_z ، $dv_x\,dv_y\,dv_z$

$$P = \frac{dN}{N} = \underbrace{f(v_x)\,f(v_y)\,f(v_z)\,dv_x\,dv_y\,dv_z}_{f(v_x,v_y,v_z)}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m/2kT\,(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$

$$= \frac{dN}{N} = F(v_x,v_y,v_z)\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m/2kT\,(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}$$

احتمال تواجد جسيم سرعته v

$$F(v) = 4\pi v^2\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m/2kT\, v^2}\, dv$$

مثال: جد احتمال تواجد جسيم طاقته e ، كمية حركته p.

انطلاقا من توزيع السرعات:

الحل: توزيع الطاقة:

$$\frac{1}{2}mv^2 = e$$

$$mv\,dv = de$$

$$dv = \frac{de}{mv}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = e$$

$$mv = \sqrt{\frac{2e}{m}}\,m$$

$$mv = \sqrt{2em}$$

$$mv = \sqrt{2em}$$

$$F(e) = \frac{8\pi e}{m}$$

$$F(e) = \frac{2e}{kT}\sqrt{\frac{1}{\pi kTe}}\, e^{-e/kT}\, de$$

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

احصاء الجسيمات الأولية

بوزونات: جسيمات أولية غير خاضعة لمبدأ باولي لها سبين $(0,1,2,\dots)\hbar$

فرميونات: جسيمات أولية خاضعة لمبدأ باولي لها سبين: $(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\dots)\hbar$

توزيع فارميون ديراك:

هو توزيع احصائي ظهر كنتيجة لظهور ميكانيك الكم يدرس طاقة الجسيمات الأولية متى تقع فارميونات ذات سبين $(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ وهو مثل احصاء ماكسول بولتزمان خاضع للقوانين الأساسية للاحصاء.

① — $S = k\ln w$

② — $\frac{\partial \ln w}{\partial n_i} = \frac{\varepsilon_i - \mu}{kT} = B(\varepsilon_i - \mu)$

لنستطيع فرض $S = k\ln w + \dots$

$dS = \frac{dE}{T} - \dots$

④ الوزن الاحصائي لفرميون ديراك:

$n_i < g_i$

$$w = C_{g_i}^{n_i} = \frac{g_i!}{n_i!\,(g_i - n_i)!}$$

حيث: g_i هو عدد سويات الطاقة.

n_i: عدد الجسيمات.

من ②:

$$\frac{\partial \ln w}{\partial n_i} = \frac{\partial}{\partial n_i}\left[\overbrace{g_i \ln g_i}^{\to 0} - n_i \ln n_i - (g_i - n_i)\ln(g_i - n_i)\right]$$

$$= -\ln n_i - \cancel{1} + \ln(g_i - n_i) + \cancel{1}$$

$$= \ln\frac{g_i - n_i}{n_i} = B(\varepsilon_i - \mu)$$

$$\frac{g_i}{n_i} - 1 = e^{B(\varepsilon_i - \mu)}$$

$$\frac{g_i}{n_i} = e^{B(\varepsilon_i - \mu)} + 1$$

$$n_{i_{FD}} = \frac{g_i}{e^{B(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$

توزيع بوز انشتاين:

هو توزيع اعتمد على قوانين ميكانيك الكم خاص بالبوزونات والتي هي جسيمات أولية ذات سبين $(0,1,2\dots)\hbar$ وهي أيضا خاضعة لقوانين الاحصاء العامة

$$S = k\ln w$$

$$\frac{\partial \ln w}{\partial n_i} = \frac{\varepsilon_i - \mu}{kT} = B(\varepsilon_i - \mu)$$

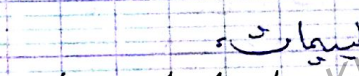
© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

Generated by CamScanner from intsig.com

شتى طاقي مرجعي. (توزيع كمياتي)

g_i سوية طاقة

n_i: عدد الجسيمات



n_i = عدد القطاع

$g_i - 1$ = الفاصل

$N = n_i + (g_i - 1)$ يشتق

$$W_{BE} = \frac{N!}{n_i!\,(g_i-1)!} = \frac{[n_i + (g_i-1)]!}{n_i!\,(g_i-1)!}$$

الوزن الإحصائي

$$\frac{\partial \ln W}{\partial n_i} = \frac{\partial}{\partial N}\left(N\ln N - n_i \ln n_i - (g_i-1)\ln(g_i-1)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial n_i}\left[(n_i+g_i-1)\ln(n_i+g_i-1) - n_i\ln n_i - (g_i-1)\ln(g_i-1)\right]$$

$$= \ln(n_i+g_i-1) + \cancel{1} - \ln n_i - \cancel{1}$$

$$= \ln(n_i+g_i-1) - \ln n_i = \beta(\varepsilon_i - \mu)$$

$$1 + \frac{g_i-1}{n_i} = e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}$$

$$\frac{g_i-1}{n_i} = e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)} - 1$$

$$n_i = \frac{g_i-1}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1}$$

g_i كبير جدا أمام 1. (10^{23})

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}-1}$$

الدوال الترموديناميكية

$$\begin{cases} E = TS - kNT\ln Z \\ F = __ \; kNT\ln Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} dE = TdS - pdV \\ dF = -SdT - pdV \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \\ T = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \end{cases}$$

F وسيط إحصائي

$$d\Phi = -SdT - pdV - \mu dN$$

في الإحصاء الكمي نعرف دالة حالة هي الكمون الأعظمي (توافق دالة الطاقة الحرة في الترموديناميك أو الإحصاء الكلاسيكي). وهي:

$$d\Phi = -SdT - pdV - Nd\mu - \mu \cancel{dN}^{\,0}$$

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©
Generated by CamScanner from intsig.com

$\Sigma \leftarrow \ln \Pi$

ايجاد S = $W = \Pi W_i \Rightarrow S = k \ln W$

$$S = k \ln \Pi \left(\frac{g_i + n_i - 1}{n_i!\,(g_i - 1)!} \right)$$

$$= k \Sigma \ln \left(\frac{g_i + n_i - 1}{n_i!\,(g_i - 1)!} \right) \qquad \ln N! = N \ln N$$

$$= k \Sigma \left[(g_i + n_i - \cancel{1}) \ln (g_i + n_i - \cancel{1}) - n_i \ln n_i - (g_i - \cancel{1}) \ln (g_i - \cancel{1}) \right]$$

$$= k \Sigma \left[(g_i + n_i) \ln (g_i + n_i) - n_i \ln n_i - g_i \ln g_i \right]$$

$$= k \Sigma \left[g_i \ln (g_i + n_i) + n_i \ln (g_i + n_i) - n_i \ln n_i - g_i \ln g_i \right]$$

$$= k \Sigma \; g_i \ln \left(\frac{g_i + n_i}{g_i} \right) + n_i \ln \left(\frac{g_i + n_i}{n_i} \right)$$

$$\left(\frac{g_i + n_i}{g_i} \right) = 1 + \frac{n_i}{g_i} = 1 + \frac{g_i}{g_i \left(e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} - 1 \right)}$$

$$= \frac{e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} \cancel{-1}}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} - 1} \quad (1)$$

$$\frac{g_i + n_i}{n_i} = 1 + \frac{\cancel{g_i} \left(e^{\alpha + \beta \varepsilon} - 1 \right)}{\cancel{g_i}} = 1 + e^{\alpha + \beta \varepsilon} - 1$$

$$= e^{\alpha + \beta \varepsilon} \quad (2)$$

حيث: $\Phi = -kTN \ln Z$

وانا هكي ان نستخرج منها الكميات الديناميكية الأساسية مثل:

$$p = -\left. \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_{T,N}$$

$$S = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{V,N}$$

$$\mu = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_{V,T}$$

ايجاد S و F:

الفرميونات:

$$W_i = \frac{g_i!}{n_i!\,(g_i - n_i)!}$$

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} + 1}$$

$\alpha = -\mu\beta$ حيث

البوزونات:

$$W_i = \frac{(g_i + n_i - 1)!}{n_i!\,(g_i - 1)!}$$

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \varepsilon_i} - 1}$$

$-\mu\beta = \alpha$ حيث

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

Generated by CamScanner from intsig.com

$$\varphi = \cancel{ST} - K\alpha NT - KTf - \cancel{TS} - \mu N$$
$$= K\beta\cancel{\mu}NT - KTf - \cancel{\mu N}$$
$$= -KTf$$

الطاقة الحرة

$$\varphi = -KTf$$

$$= -KT\sum g_i \ln\left(1 + \frac{n_i}{g_i}\right)$$

$$S = -\frac{\partial\varphi}{\partial T}\Big)_{N,\mu}$$

$$P = -\frac{\partial\varphi}{\partial V}\Big)_{T,\mu}$$

$$N = -\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\Big)_{V,T}$$

① $\Rightarrow \ln \dfrac{e^{\alpha+\beta\varepsilon}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}-1} = \alpha+\beta\varepsilon - \ln(e^{\alpha+\beta\varepsilon}-1)$

② $\Rightarrow \ln e^{\alpha+\beta\varepsilon} = \alpha+\beta\varepsilon$

$$S = K\sum\left(g_i \ln \frac{e^{\alpha+\beta\varepsilon}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}-1} + n_i(\alpha+\beta\varepsilon_i)\right)$$
$$= K(\alpha N + \beta E + f)$$

$\sum n_i\alpha = N\alpha$ = عدد

$\sum n_i\beta\varepsilon_i = \beta E$

$$f = \sum g_i \ln \frac{e^{\alpha+\beta\varepsilon}}{e^{\alpha+\beta\varepsilon}-1}$$
$$= \sum g_i \ln\left(1 + \frac{n_i}{g_i}\right)$$

$= E$ الإيجاد

$$\varphi = E - TS - \mu N$$

$$S = K(\alpha N + \beta E + f)$$

$$E = \frac{S - K\alpha N - Kf}{K\beta}$$
$$= ST - KT\alpha N - KTf$$

© copyright By KHALIL BNO & KARIMA 2016 ©

Generated by CamScanner from intsig.com