

Partie I : Vibrations.

Série-1 : Généralités sur les oscillations.

- Exercice n° 1 : Mouvement oscillatoire.
- Exercice n° 2 : Amplitude et déphasage d'un mouvement harmonique.
- Exercice n° 3 : Degré de liberté.
- Exercice n° 4 : Superposition de deux oscillations.
- Exercice n° 5 : Superposition de quatre oscillations.

Série-2 : Systèmes linéaires à un degré de liberté. Oscillations libres non amorties.

- Exercice n°1 : Equation de conservation.
- Exercice n°2 : Equations du mouvement.
- Exercice n° 3 : Plan incliné.
- Exercice n° 4 : Condition d'oscillation.
- Exercice n° 5 : Translation et rotation d'un système mécanique.

Série-3 : Systèmes linéaires à un degré de liberté. Oscillations libres amorties

- Exercice n° 1 : Mouvement amorti d'un oscillateur.
- Exercice n° 2 : Mouvement amorti d'un oscillateur en rotation puis en translation.
- Exercice n° 3 : Mouvement amorti d'un oscillateur en rotation et en translation.
- Exercice n° 4 : Mouvement d'un oscillateur dans un plan incliné.

Série-4 : Systèmes linéaires à un degré de liberté. Oscillations forcées amorties.

- Exercice 1 : Système forcé.
- Exercice 2 : Circuit oscillant excité par un générateur.
- Exercice 3 : Mouvement sismique.
- Exercice 4 : Oscillateur harmonique.
- Exercice 5 : Circuit RLC.
- Exercice 6 : Mouvement de translation et de rotation.

Série-5 : Systèmes linéaires à deux degrés de liberté : oscillations libres.

- Exercice 1 : Système de deux masses ponctuelles.
- Exercice 2 : Circuits RLC couplés.
- Exercice 3 : Système de deux masses ponctuelles couplées par élasticité.
- Exercice 4 : Système de deux masses ponctuelles couplées par viscosité.
- Exercice 5 : Couplage d'une masse et un pendule.

Série-6 : Systèmes linéaires à deux degrés de liberté : oscillations forcées.

- Exercice 1 : Couplage d'un disque et une masse.
- Exercice 2 : Analogie d'un système mécanique et électrique.
- Exercice 3 : Circuit équivalent.
- Exercice 4 : Double pendule.

Partie II : Ondes mécaniques.

Série-7 : Généralités sur les ondes mécaniques.

Série-8 : Ondes transversales sur une corde

Série 1 : Généralités sur les oscillations.

Exercice n° 1 : Mouvement oscillatoire.

Un mouvement oscillatoire est caractérisé par le déplacement suivant :

$$x(t) = 5\cos\left(25t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Où x en centimètres, t en secondes et la phase en radians.

1. Déterminer l'amplitude maximale.
2. Donner la pulsation propre, la fréquence et la période du mouvement.
3. Exprimer la phase initiale (déphasage à l'origine).
4. Calculer le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants $t = 0s$ et $t = 0,5s$.

Exercice n° 2 : Amplitude et déphasage d'un mouvement harmonique.

Un mouvement harmonique est décrit par :

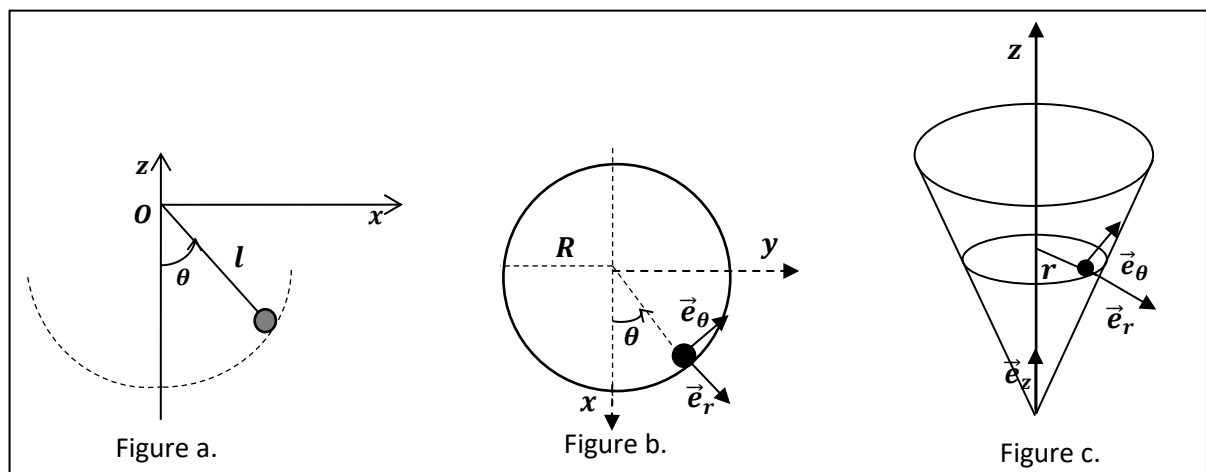
$$x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les conditions initiales sont : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$,

1. Calculer X et φ .
2. Exprimer $x(t)$ sous la forme $x(t) = B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t)$ et en déduire B et C .

Exercice n° 3 : Degré de liberté.

1. Quel est le nombre de degrés de liberté du point matériel dans chaque système.
2. Quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour définir le mouvement de ce point.



Exercice n° 4 : Superposition de deux oscillations.

Calculer l'amplitude A et la phase Φ pour les sommes suivantes :

1. $3,2\sin(\omega t) + \cos(\omega t)$.
2. $3\sin(\omega t) + 4\cos(\omega t)$.
3. $11,5\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) - 8\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice n° 5 : Superposition de quatre oscillations.

Déterminer l'amplitude A et la phase Φ du mouvement oscillatoire résultant de quatre mouvements oscillatoires de même pulsation ω .

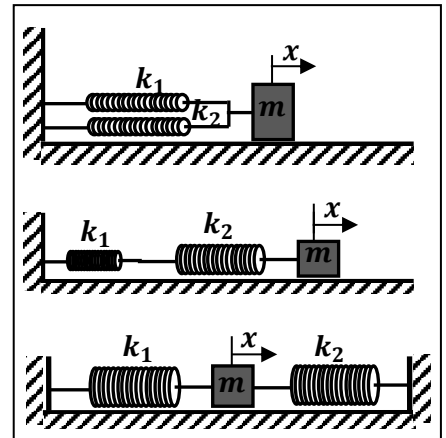
$$G = A_0[\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + 2\varphi) + \cos(\omega t + 3\varphi)]$$

Série 2 : Oscillations libres et non amorties

Exercice n° 1 : Equation de conservation.

On considère les trois systèmes mécaniques de la figure ci-contre. La masse m peut coulisser sans frottement sur le plan horizontal.

1. Trouver le ressort équivalent pour chaque système.
2. Déduire l'énergie potentielle U pour chaque système.
3. Trouver l'énergie mécanique E pour chaque système.
4. A l'aide de l'équation de conservation, trouver l'équation du mouvement et la pulsation propre de chaque système.



Exercice n° 2 : Equations du mouvement.

Etablir l'équation du mouvement pour chaque système illustré ci-dessus, déduire la pulsation propre et la forme de la solution de l'équation différentielle du mouvement :

Figure 1 : Barre de longueur l sans masse portant une masse m et oscillant autour de l'axe O . A l'équilibre la barre est horizontale et $\theta = 0$.

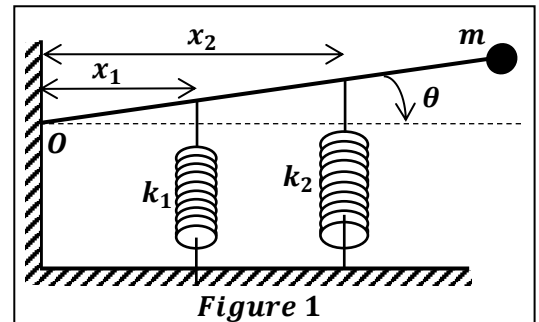


Figure 2 : Cylindre de masse M et de rayon R tourne autour d'un axe fixe O , rappelé par un ressort de raideur k . Le fil qui relie les masses m et μ s'enroule sans glisser sur le pourtour du cylindre. A l'équilibre $\theta = 0$.

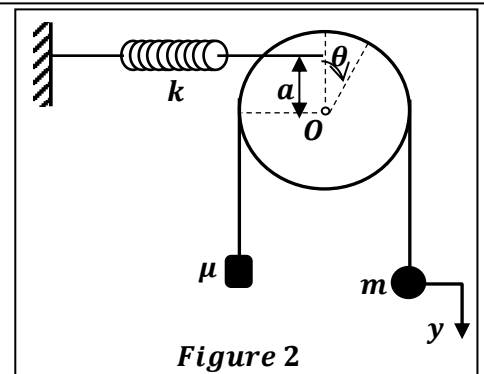


Figure 3 : Un fléau portant deux masses M et m oscillant autour d'un axe fixe O . A l'équilibre le fléau est horizontal $\theta = 0$.

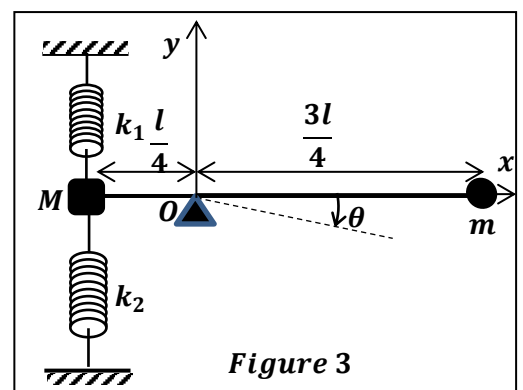


Figure 4 : Un bras de longueur l solidaire d'un cylindre de masse M et de rayon R qui roule sans glisser. A l'équilibre le bras est vertical et $\theta = 0$.

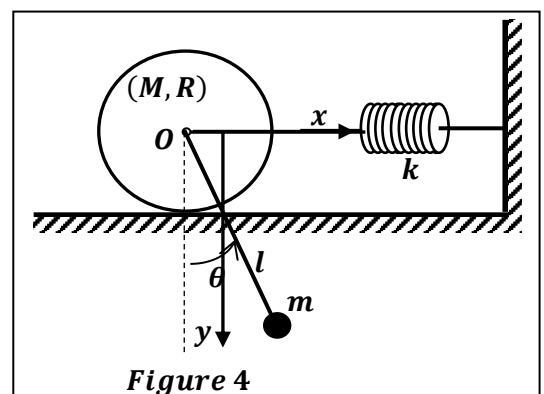


Figure 5 : Un système électrique (L, C) série.

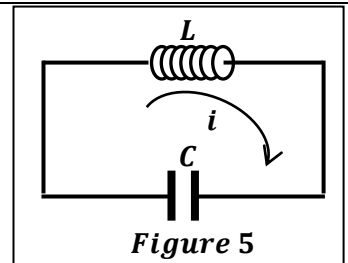


Figure 6 : Un pendule de torsion est un dispositif constitué d'une barre horizontale, de longueur l de moment d'inertie J_0 , fixée à un support par l'intermédiaire d'un fil de torsion. Ce fil d'acier exerce un couple de rappel, proportionnel à l'angle de torsion. On appelle C la constante de torsion du fil. Sur la barre, on positionne deux masselottes identiques m de façon symétrique.

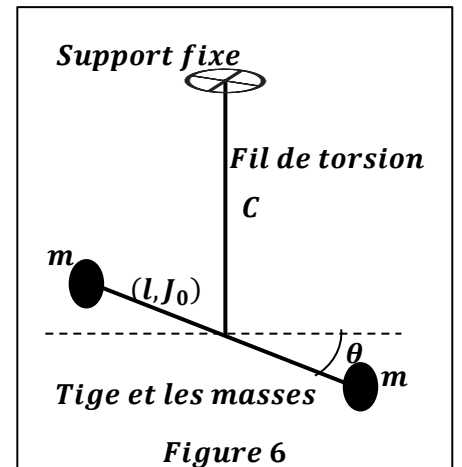
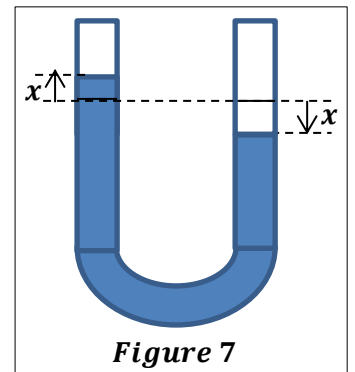


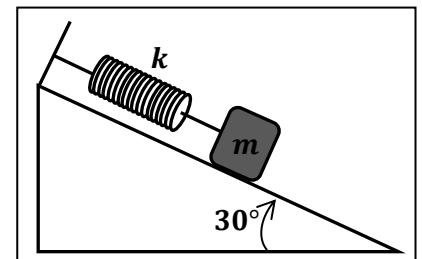
Figure 7 : Un tube en U de section faible et uniforme s contient un liquide de masse volumique ρ . La pression à la surface libre est égale à la pression atmosphérique.



Exercice n° 3 : Plan incliné.

Dans le système ci-contre, la masse peut glisser sans frottement sur le plan. On abandonne le système après l'avoir écarté de la position d'équilibre.

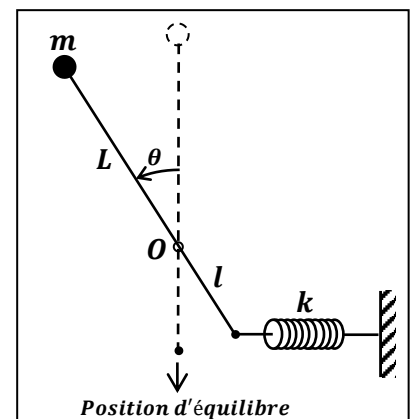
1. Exprimer l'énergie potentielle du système U .
2. Déduire la condition d'équilibre, trouver la déformation du ressort à l'équilibre et simplifier l'expression de U .
3. Exprimer l'énergie totale du système et déduire l'équation du mouvement avec le principe de conservation de l'énergie totale.



Exercice n° 4 : Condition d'oscillation.

Une tige de longueur $L + l$ et de masse négligeable, porte à son extrémité supérieure une masse m . L'autre bout de la tige est relié à un ressort de raideur k . Celui-ci n'était pas déformée à l'équilibre et supposé rester horizontal lors des petits mouvements. La tige peut tourner librement autour du point O . A l'équilibre la tige est verticale.

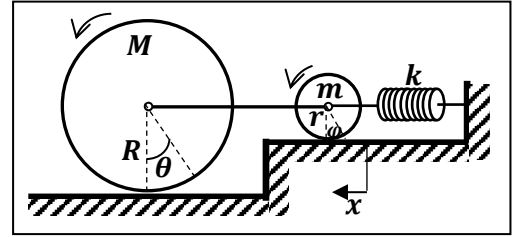
1. Trouver l'énergie potentielle U et l'énergie cinétique T du système ($\sin\theta \approx \theta$; $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$).
2. Trouver l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0 ; soit avec l'équation de Lagrange, soit avec l'équation de conservation de l'énergie totale.
3. Trouver la condition d'oscillation du système.



Exercice n° 5 : Translation et rotation d'un système mécanique.

Deux disques de rayons R et r et de masses M et m , sont reliés par une tige rigide de masse négligeable. Le petit disque est relié en son centre par un ressort de raideur k . Les deux disques roulent sans glissement sur le sol.

1. Trouver l'énergie cinétique T et potentielle U du système en termes de x .
2. Dédire l'équation du mouvement et la pulsation propre ω_0 , soit avec l'équation de Lagrange, soit avec l'équation de conservation de l'énergie totale.



Rappels : les moments d'inertie des disques sont Pour: $I_1 = \frac{1}{2}mr^2$. $I_2 = \frac{1}{2}MR^2$
Indication: Trouver une relation entre x, r, ϕ, R, θ .

Série 3 : Oscillations libres et amorties

Exercice n° 1 : Mouvement amorti d'un oscillateur.

On définit un oscillateur amorti régi par l'équation différentielle suivante :

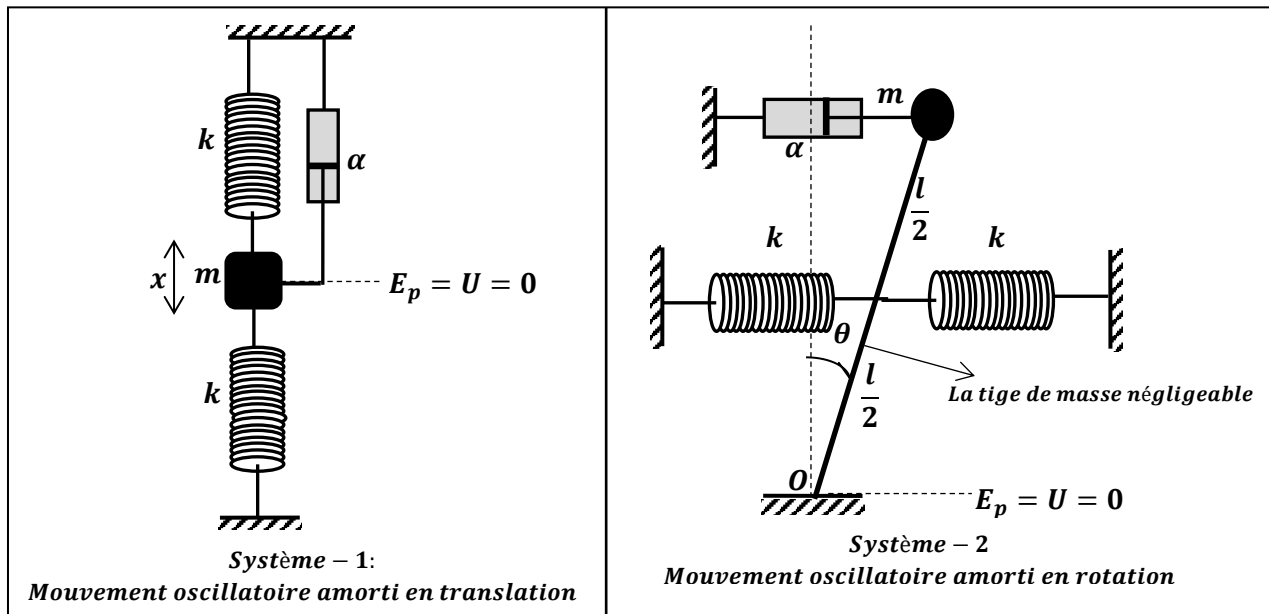
$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

Avec m est la masse du corps, k est la constante de rappel d'un ressort et x est le déplacement du corps. On lance le système avec une vitesse initiale $v_0 = 25 \text{ cm/s}$.

Donc on a : $t = 0, x = 0$ et $\dot{x} = v_0$.

1. Calculer la période propre du système,
Sachant que : $m = 150 \text{ g}$ et $k = 3,8 \text{ N/m}$.
2. Montrer que si $\alpha = 0,6 \text{ Kg/s}$, le corps a un mouvement oscillatoire amorti.
 - Résoudre dans ce cas l'équation différentielle du mouvement.
 - Calculer la pseudo-période du mouvement.
 - Calculer le temps t_m au bout duquel la première amplitude x_m est atteinte. En déduire x_m .
 - Calculer la vitesse d'une pseudo-période.

Exercice n° 2 : Mouvement amorti d'un oscillateur en rotation puis en translation.



Soient les systèmes mécaniques représentés comme suit :

Pour des petites oscillations, déterminer pour chaque système :

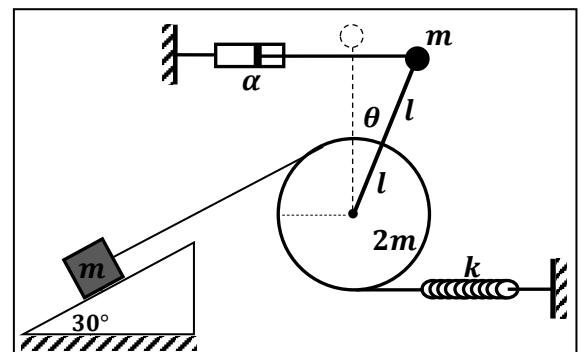
1. Le Lagrangien.
2. L'équation différentielle du mouvement.
3. La pulsation propre.
4. La solution générale pour un faible amortissement.

Exercice n° 3 : Mouvement amorti d'un oscillateur en rotation et en translation.

Dans ce système, on suppose que la poulie peut tourner autour de son centre sans frottement. Le fil est de masse négligeable et ne glisse pas sur la poulie. Le ressort est aussi de masse négligeable. A l'équilibre, la tige est verticale. La poulie est écartée de l'équilibre d'un petit angle θ puis relâchée. On considère que θ est suffisamment petit pour admettre que $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

θ et $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

1. Evaluer l'énergie potentielle U du système en fonction de θ .
2. Ecrire la condition d'équilibre à partir de U . Déduire l'allongement initial x_0 du ressort et simplifier l'expression de U .
3. Quelle est la condition à satisfaire pour que l'équilibre précédent soit stable.



4. Trouver l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange.
5. Dédire la condition nécessaire pour avoir des oscillations.

Exercice n° 4 : Mouvement d'un oscillateur dans un plan incliné.

Un cylindre de masse m et de rayon r est fixé à un support par l'intermédiaire d'un ressort de traction-compression de constante de raideur k . L'ensemble est placé sur un plan incliné faisant un angle β avec l'horizontale. Le cylindre est en mouvement mixte de translation-rotation sans glissement sur le plan incliné ($x = r\theta$). (cf. *Figure 1*)

1. On suppose que $\beta = 0$.

- a. Ecrire l'énergie cinétique de translation et celle de rotation en supposant que le moment d'inertie J du cylindre est $J = \frac{1}{2}mr^2$. Ecrire l'énergie potentielle liée à la raideur du ressort.
- b. Définir l'équation du mouvement, par exemple à partir du théorème de la conservation de l'énergie mécanique ou bien à partir de l'équation de Lagrange.

2. On suppose que $\beta \neq 0$.

Pour un angle β arbitraire différent de zéro, l'équation du mouvement est modifiée.

- a. Quelle est la nouvelle équation du mouvement.
- b. Est-ce que la pulsation ω_0 est modifiée ? Justifier votre réponse.
- c. Discuter le cas où $\beta = \frac{\pi}{2}$. Calculer alors la nouvelle pulsation des oscillations ω'_0 , interpréter le résultat $\omega'_0 > \omega_0$.

3. Le cylindre du système précédent est dorénavant monté entre deux ressorts identiques de constante de raideur k . On ajoute de plus de part et d'autre du cylindre des amortisseurs visqueux de constante d'amortissement (cf. *Figure 2*).

- a. Ecrire la nouvelle équation du mouvement.
- b. En déduire la valeur limite de α correspondant au régime critique.
- c. Calculer la valeur de la constante d'amortissement réduit $\varepsilon = \frac{\lambda}{\omega_0}$.
- d. Ecrire la solution temporelle $x(t)$ pour le régime pseudo-périodique tel que $\varepsilon < 1$.

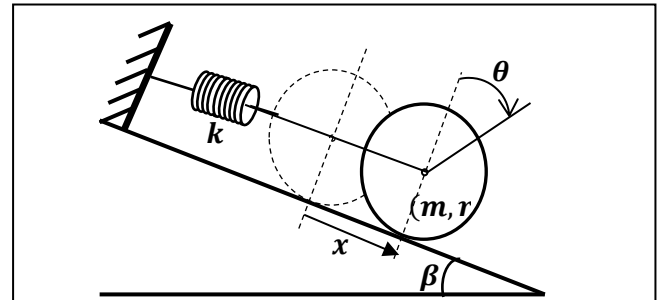


Figure 1

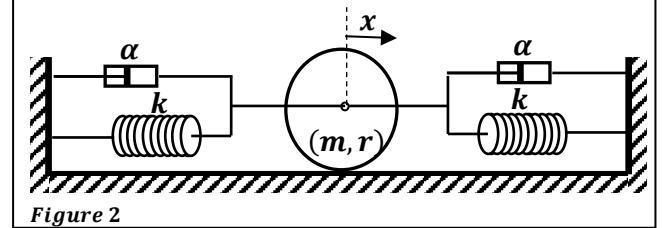
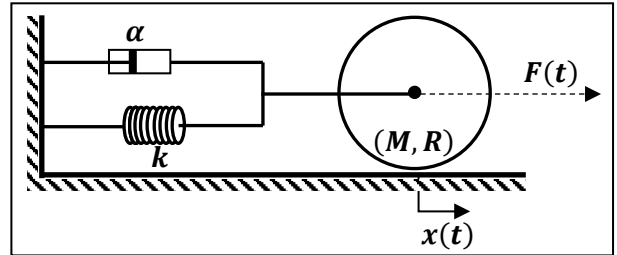


Figure 2

Série 4: Oscillations forcées e amorties

Exercice 1 : Système forcé.

Un disque de masse M et de rayon R (suspendu verticalement) peut rouler sans glissement sur un plan horizontal. Le disque est relié par son centre à un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient α . Une excitation sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ est appliquée sur le disque en son centre.



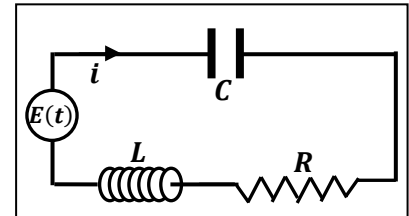
1. Trouver l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U et la fonction de dissipation D . (Pour la variable x)
2. Trouver le Lagrangien L puis l'équation du mouvement.
3. En utilisant la représentation complexe, trouver l'amplitude A et la phase ϕ de la solution permanente $x(t) = A \cos(\Omega t + \phi)$ de l'équation du mouvement.
4. Ecrire la condition de résonance d'amplitude et donner la pulsation de résonance Ω_R .

Rappels : le moment d'inertie du disque autour de son axe est: $I = \frac{1}{2} MR^2$

L'équation de Lagrange du système forcé est: $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F.$

Exercice 2 : Circuit oscillant excité par un générateur.

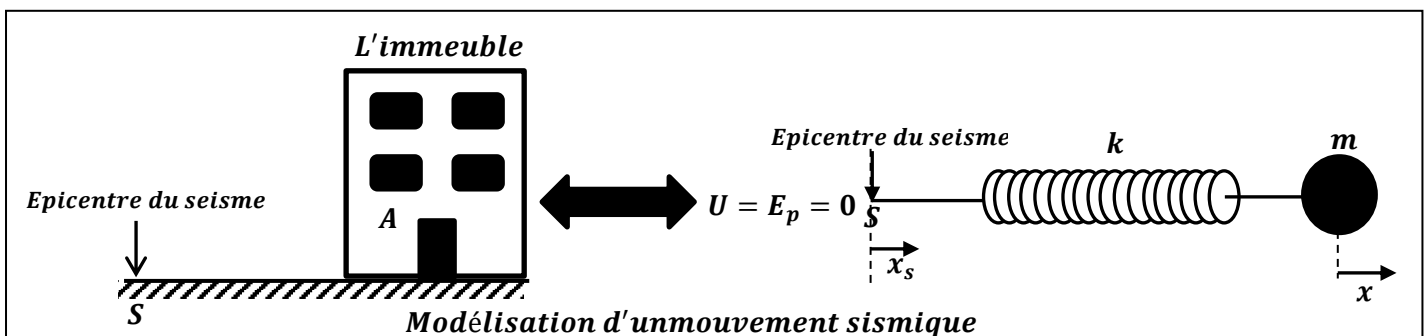
Soit le circuit ci-contre. $E(t) = E_0 \cos(\Omega t)$.



1. Trouver l'équation du mouvement de la charge q circulant dans le circuit à l'aide de la loi des mailles.
2. Trouver, à l'aide de la représentation complexe, la solution permanente. (Préciser son amplitude réelle A et sa phase Φ).
3. Donner la pulsation de résonance Ω_R .
4. Donner les pulsations de coupure Ω_{C1} et Ω_{C2} et déduire la bande passante B ($\lambda \ll \omega_0$).
5. Calculer Ω_R , B et le facteur de qualité pour $R = 20\Omega$, $C = 1\mu F$, L

Exercice 3 : Mouvement sismique.

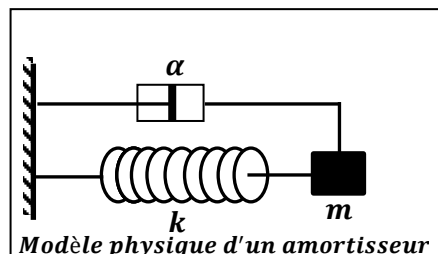
Soit un immeuble A modélisé par le système physique représenté par une masse m et un ressort de raideur k subit un mouvement sismique sinusoïdal d'amplitude a de forme $x_s = a \cos(\Omega t)$ représenté dans la figure comme suit : Quelle est la réponse du système. Justifier le résultat.



Exercice 4 : Oscillateur harmonique.

On définit le modèle d'un oscillateur harmonique, représenté par une masse m placée dans un potentiel élastique du type : $U = \frac{1}{2} kx^2$

Cette masse est soumise à une force de frottement visqueuse et dont le coefficient de frottement est α .



Partie-A : Les oscillations libres et non amorties.

1. Déterminer le Lagrangien du système.
2. Etablir l'équation du mouvement.
3. En déduire la solution générale avec les conditions initiales suivantes :

$$x(t = 0) = 0 \text{ et } \dot{x}(t = 0) = v_0$$

Partie-B : On admet que les frottements existent, la masse m effectue des oscillations forcées sous l'effet d'une force sinusoïdale de la forme :

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

On admet que la vitesse du mobile est de la forme :

$$v(t) = v_0 \cos(\Omega t - \varphi)$$

1. Etablir l'équation du mouvement.
2. Résoudre l'équation différentielle en régime permanent.
3. Déterminer l'impédance mécanique complexe défini comme le rapport entre la force appliquée et la vitesse du mobile.
4. Comparer le résultat avec le modèle électrique.

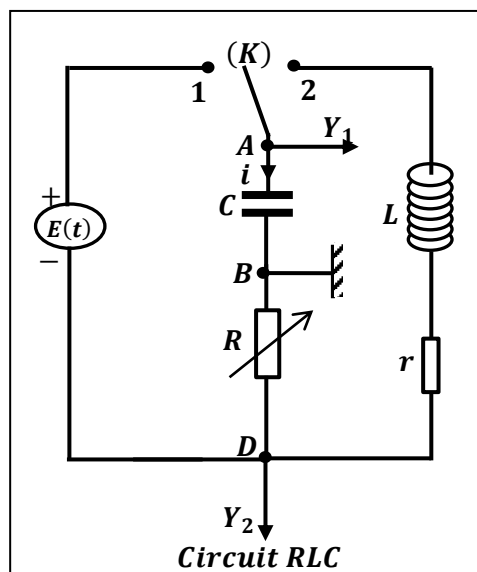
Exercice 5 : Circuit RLC .

Le commutateur K est en position **1**, une fois le condensateur chargé, on bascule le commutateur de la position **1** à la position **2** : il prend l'instant du basculement comme nouvelle origine des dates. Le condensateur se décharge alors dans la bobine.

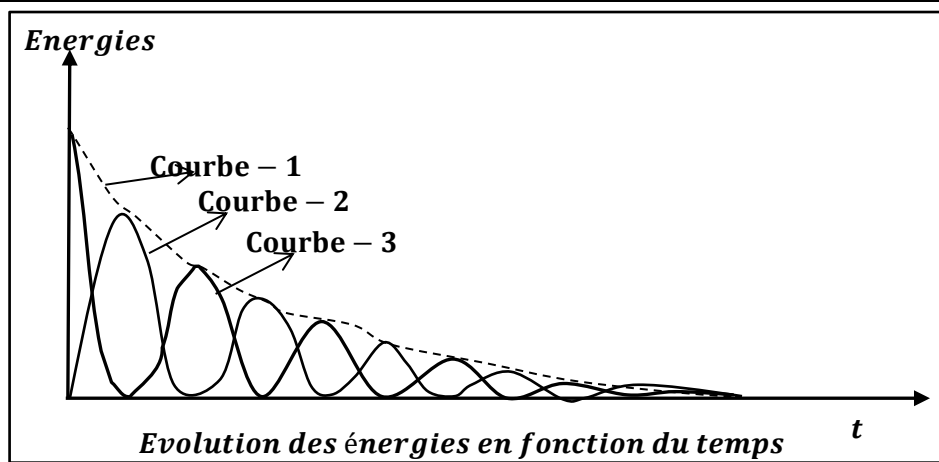
Partie-A : L'acquisition informatisée des tensions permet de visualiser l'évolution des tensions $U_{AB}(t)$ et $U_{DB}(t)$ en fonction du temps.

Après transfert de données vers un tableur-grapheur, on souhaite étudier l'évolution des différentes énergies au cours du temps.

1. Exprimer littéralement, en fonction de $i(t)$, l'énergie magnétique E_m emmagasinée dans la bobine.
2. A partir de l'une des tensions enregistrées $U_{AB}(t)$ et $U_{DB}(t)$, donner l'expression de l'intensité instantanée $i(t)$.
3. En déduire l'expression de l'énergie magnétique E_m emmagasinée dans la bobine en fonction de l'une des tensions enregistrées.
4. En déduire l'expression de l'énergie totale E_T du circuit en fonction des tensions $U_{AB}(t)$ et $U_{DB}(t)$.



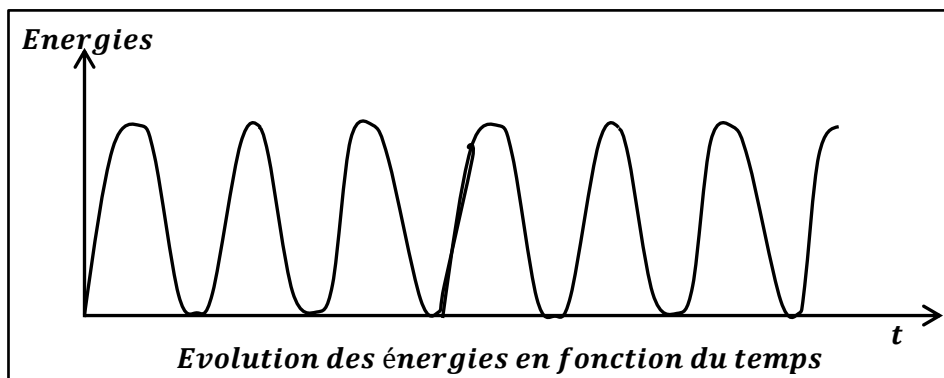
Partie-B : A partir du tableau-grapheur, on obtient le graphe qui montre l'évolution, en fonction du temps, des trois énergies : E_e énergie électrique, E_m énergie magnétique et E_T énergie totale.



5. Identifier chaque courbe en justifiant. Quel phénomène explique la décroissance de la courbe 1.

Partie-C : pour entretenir les oscillations, on ajoute en série dans le circuit précédent un dispositif assurant cette fonction. On refait alors une acquisition informatisée.

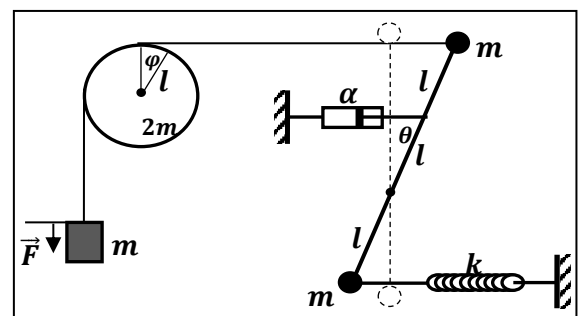
6. Tracer sur la figure suivante les deux courbes manquantes. Préciser ce que chacune des trois courbes représente.
7. Pourquoi un tel régime est-il qualifié d'entretenu ?



Exercice 6 : Mouvement de translation et de rotation.

Le système est à osciller autour de la position d'équilibre, correspondant à $\theta = 0$, par une force sinusoïdale $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ et le sens positif est choisi vers le bas. Les frottements sont modélisés par un frottement visqueux de coefficient α . On suppose que l'amplitude du mouvement reste faible pour admettre l'approximation des faibles angles.

1. Exprimer et simplifier l'expression de l'énergie potentielle U .
2. Donner l'expression de l'énergie cinétique T du système.
3. Donner l'expression du Lagrangien du système et déduire l'équation du mouvement.



Série 5: Oscillations libres à deux degrés de liberté.

Exercice 1 : Système de deux masses ponctuelles.

Les équations différentielles du mouvement d'un système à deux degrés de liberté sont les suivantes :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} k & -2k \\ -2k & 2k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On donne les conditions initiales suivantes : $x_1(0) = x_0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

Donner les solutions.

Exercice 2 : Circuits RLC couplés.

Donner le système d'équations qui décrit les oscillations des circuits de la figure suivante :

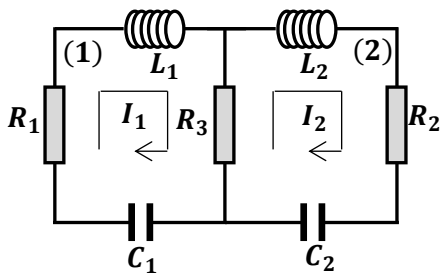


Figure (a): Circuit RLC couplé par viscosité

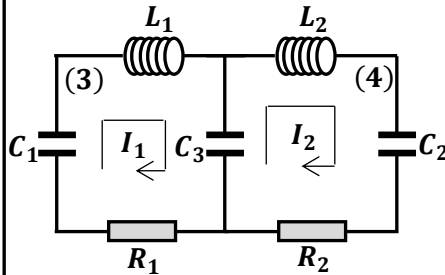


Figure (b): Circuit RLC couplé par élasticité

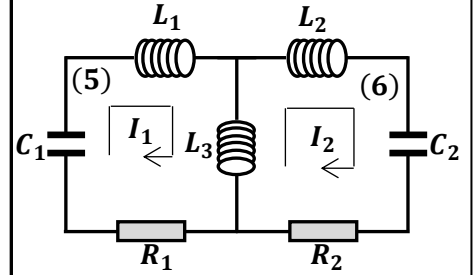
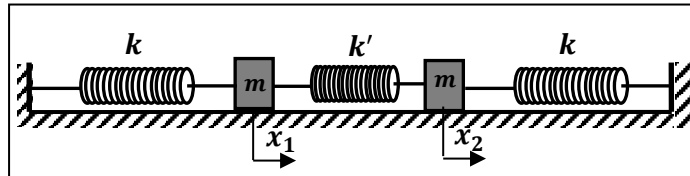


Figure (c): Circuit RLC couplé par inertie

Exercice 3 : Système de deux masses ponctuelles couplées par élasticité.

Soit un système mécanique constitué de deux oscillateurs linéaires (m, k) couplés par un ressort de raideur k .



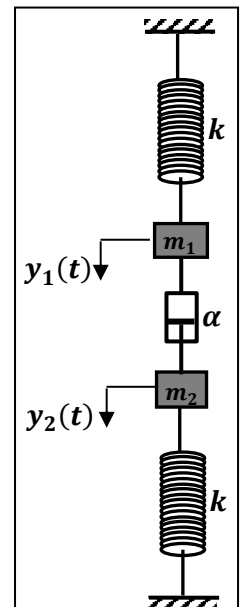
1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Mettre le Lagrangien sous la forme : $L = \frac{1}{2} m [(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \omega_0^2(x_1^2 + x_2^2 - 2Cx_1x_2)]$.
3. Donner les expressions de ω_0^2 et C (Coefficient de couplage). En déduire les équations du mouvement.
4. Déterminer les pulsations propres du système.
5. Donner les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = x_0, \dot{x}_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$$

Exercice 4 : Système de deux masses ponctuelles couplées par viscosité.

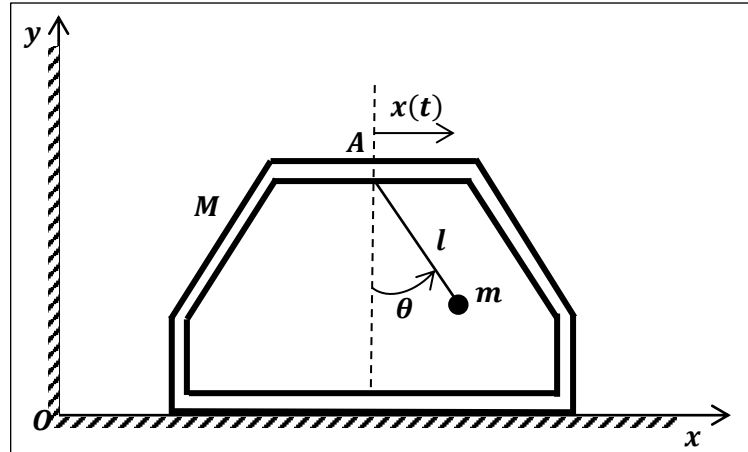
Soit un système mécanique constitué de deux oscillateurs linéaires (m_1, k) et (m_2, k) couplés par un amortisseur de constante d'amortissement α .

1. Déterminer les équations du mouvement en fonction des variables $y_1(t)$ et $y_2(t)$.
2. En utilisant deux nouvelles variables $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ (à déterminer), déduire les deux équations différentielles indépendantes si : $m_1 = m_2 = m$.



Exercice 5 : Couplage d'une masse et un pendule.

Soit un système constitué d'une masse qui glisse sans frottement sur un plan horizontal et d'un pendule (m, l) suspendu au point A . Ce pendule oscille sans frottement dans le plan xOy .



1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Montrer que les équations différentielles du mouvement de ce système s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{m}{m+M} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l} \cos \theta + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \end{cases}$$

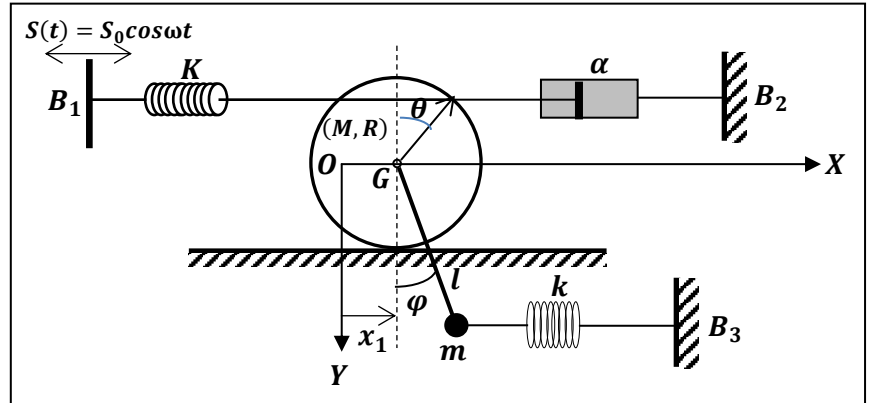
3. Montrer que dans le cas des petites oscillations ($\theta \ll 1$), l'équation différentielle pour θ s'écrit sous la forme : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$.
4. Donner la valeur de ω_0 en fonction de g, l, M et m .
5. Etablir les solutions des équations différentielles du système, dans le cas :

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0, \theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0$$

Série 6: Oscillations forcées à deux degrés de liberté.

Exercice 1 : Couplage d'un disque et une masse.

Dans le système oscillant représenté par la figure, le cylindre est homogène, de masse M et de rayon R . Ce cylindre est relié au point A par un ressort de raideur K à un bâti B_1 animé d'un mouvement sinusoïdal d'amplitude S_0 et de pulsation ω . Il est également relié à un amortisseur de coefficient α à un bâti fixe B_2 . Le cylindre roule sans glisser sur un plan horizontal. La tige est sans masse et de longueur l . L'une de ces extrémités peut osciller sans frottement autour de l'axe du cylindre. Elle porte à l'autre extrémité une masse ponctuelle m qui est reliée à un bâti fixe B_3 par un ressort de raideur k . A l'équilibre la tige est verticale et l'origine du cylindre G est à l'origine des coordonnées O , on suppose aussi que les ressorts ne sont pas déformés. La rotation de la tige par rapport à la verticale est repérée par l'angle φ et celle du cylindre par l'angle θ . On considère les oscillations de faibles amplitudes.



On pose : $3M = 2m, 4K = k = \frac{mg}{l}, x_2 = l\varphi, x_1 = R\theta$.

1. Montrer que le Lagrangien du système peut s'écrire sous la forme :

$$L = m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - kx_1^2 - kx_1x_2 - kx_2^2 + \frac{1}{2}Kx_1s - \frac{1}{8}ks^2$$

2. Déterminer les équations différentielles en $x_1(t)$ et $x_2(t)$. Montrer que le système est équivalent à un système forcé soumis à une force extérieure $F(t)$ sinusoïdale dont on précisera l'amplitude F_0 .
3. Exprimer ces équations de mouvement en fonction des vitesses $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$.
4. **a-** Déterminer $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ pour la pulsation $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$. En déduire le comportement du système à cette pulsation.
b- Déterminer l'impédance d'entrée du système, définie par $Z_e = \frac{F_0}{\dot{x}_1}$, à cette pulsation.
5. **a-** Déterminer $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ pour la pulsation $\omega = \omega_1 = \sqrt{2k/m}$. En déduire le comportement du système à cette pulsation.
b- Déterminer l'impédance d'entrée du système, définie par $Z_e = \frac{F_0}{\dot{x}_1}$, à cette pulsation.

Exercice 2 : Analogie d'un système mécanique et électrique.

1. Etablir les équations différentielles du système oscillatoire mécanique de la figure-1.
2. On donne l'excitation $F(t) = F_0 e^{j\Omega t}$. Les solutions $x_{p1}(t)$ et $x_{p2}(t)$ du régime permanent étant du même type que l'excitation, donner l'écriture matricielle des équations différentielles du mouvement en amplitudes complexes $\tilde{x}_{p1}(t)$ et $\tilde{x}_{p2}(t)$.
3. En déduire, lorsque $\alpha = 0$, la pulsation de résonance existante.
4. Etablir les équations différentielles en courant puis en charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ du système oscillatoire électrique de la figure-2.
5. Y a-t-il analogie entre ces deux systèmes ? Si oui, donner les correspondances entre les éléments mécaniques et électriques. En déduire, lorsque $R = 0$, la pulsation de résonance existante.

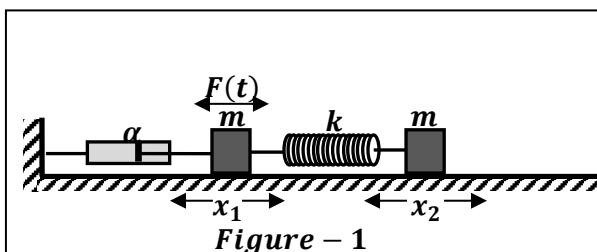


Figure – 1

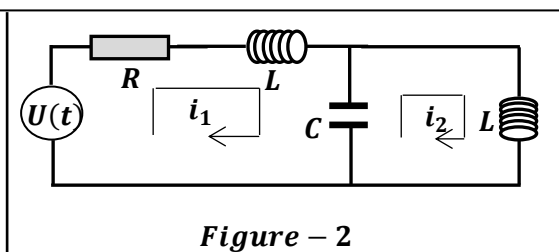
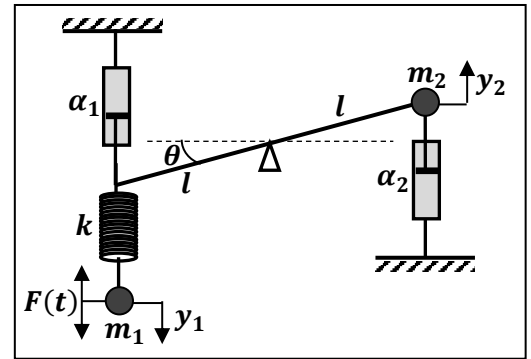


Figure – 2

Exercice 3 : Circuit équivalent.

Dans le système ci-contre $F(t) = F_0 \sin \Omega t$.

1. Trouver l'énergie cinétique T , l'énergie potentielle U et la fonction de dissipation D . ($\theta \ll 1$)
2. Trouver le Lagrangien L puis les équations du mouvement.
3. A l'aide de la représentation complexe trouver l'impédance d'entrée $\tilde{Z}_e = \frac{\tilde{F}}{\tilde{v}_1}$.
4. Dédire à l'aide de l'analogie de Maxwell, le circuit électrique équivalent.



Exercice 4 : Double pendule.

Le système est constitué d'un double pendule simple permettant des oscillations uniquement dans le plan de la figure. Les tiges de longueur l sont supposées être indéformables et de masse négligeable. Le premier pendule est couplé au niveau de la masse $m_1 = m$ par deux ressorts de même raideur k . Les frottements sont supposés négligeables. Seul le régime de faibles oscillations sera étudié ($\theta_1 \ll 1$; $\theta_2 \ll 1$).

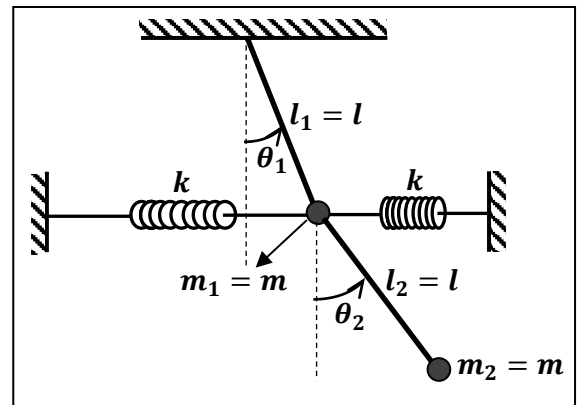
1. Calculer les énergies cinétiques et potentielles de chaque masse, ainsi que l'énergie potentielle emmagasinée par les ressorts. Montrer que les énergies cinétique et potentielle totale peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m l^2 [2\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2] \\ U = \frac{1}{2} m g l [2\theta_1^2 + \theta_2^2] + k l^2 \theta_1^2 \end{cases}$$

2. Ecrire les équations du mouvement en utilisant les équations de Lagrange, et montrer qu'elles peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} l[2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] + \left[2g + 2\frac{kl}{m}\right] \theta_1 = 0 \\ l[\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] + g\theta_2 = 0 \end{cases}$$

3. Dans le cas où les deux ressorts sont absents ($k = 0$), chercher les modes propres d'oscillations. Pour cela, en notant $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, écrire les solutions sous la forme harmonique $\theta_i = \theta_{i0} \cos(\omega t + \phi_i)$, $i = 1, 2$. Calculer les pulsations propres et les vecteurs propres correspondants. Discuter qualitativement sur les valeurs numériques des déplacements modaux obtenus.
4. Dans le cas où les deux ressorts sont très fortement rigides (*à la limite* $k \rightarrow \infty$), montrer que $\theta_1 \ll \theta_2$, c'est-à-dire que l'on retrouve à la limite le résultat d'un pendule simple. Justifier votre réponse sur un simple argument physique.
5. Pour le cas général où les ressorts ont des raideurs de valeurs non nulles ou de valeur finie, étudier les modes propres pour les équations complètes du mouvement (cf. question 2.) en notant $\omega_{01}^2 = \frac{g}{l}$; $\omega_{02}^2 = \frac{k}{m}$. On suppose de plus que $\omega_{02}^2 = \omega_{01}^2 (1 + \varepsilon)$, avec $\varepsilon \ll 1$. Exprimer l'équation aux pulsations dans ce cas, et montrer que les deux pulsations propres s'écrivent lorsque $\varepsilon = 0$ sous la forme $\omega^2 = (3 \pm \sqrt{5})\omega_{01}^2$.
6. Comparer le résultat de l'équation précédente pour les pulsations propres avec celui obtenu pour un double pendule simple sans ressorts latéraux (cf. question 3.). Justifier qualitativement l'écart plus grand qui existe entre les deux pulsations propres pour la configuration avec ressorts latéraux à celle sans ressorts latéraux. Que peut-on en déduire sur les déplacements modaux correspondants ?



Série 7: Généralités sur les ondes mécaniques

Exercice-1 : Ondes mécaniques en qcm :

1. La célérité d'une onde s'exprime en :
 - a. Joule.
 - b. Mètre par seconde.
 - c. Mètre.
2. La longueur d'onde d'une onde sinusoïdale :
 - a. Est la distance parcourue pendant une période.
 - b. Est la distance parcourue depuis la source.
 - c. Est la distance parcourue avant disparition de l'onde.
3. L'onde sonore est une onde de pression. Cela signifie que :
 - a. Un son n'est créé que par pression sur un objet.
 - b. La grandeur physique perturbée est la pression.
 - c. Les sons ne se propagent que dans l'atmosphère.
4. Si on absorbe l'énergie d'une onde :
 - a. Elle fait demi-tour (réflexion).
 - b. Elle en retrouve immédiatement après.
 - c. Elle disparaît.
5. La double périodicité fait référence à :
 - a. Une onde sinusoïdale.
 - b. Une onde avec deux perturbations successives.
 - c. Une onde qui peut se propager dans les deux sens.
6. Le retard :
 - a. Est fixe dans un milieu donné.
 - b. Diminue avec le temps.
 - c. Augmente si on est plus éloigné de la source.
7. Une onde est mécanique :
 - a. Parce qu'on la voit.
 - b. Parce qu'elle nécessite un milieu pour se propager.
 - c. Parce qu'elle a une célérité.

Exercice-2 :

Un homme se tient debout à l'entrée d'un port et voit des vagues d'eau entrer dans le port. Il assimile ces vagues à des mouvements sinusoïdaux. Il compte **50** crêtes en **1,0** minute et il estime que la distance entre deux crêtes est de **3,0 m**. Ecrire une expression de la forme de la hauteur des vagues à l'endroit où l'homme se tient. Quel est la longueur d'onde, le nombre d'onde, la fréquence, la pulsation, la vitesse des vagues et l'équation des vagues ?

Exercice-3 :

Soit une onde d'équation : $y(x, t) = 0,05 \cos \left[\frac{\pi}{2} (40t - 10x) - \frac{\pi}{4} \right]$ où x et y sont en mètres et t secondes.

Trouver :

- a. La longueur d'onde, la fréquence et la vitesse de propagation de l'onde.
- b. La vitesse et l'accélération d'une particule située sur le chemin de l'onde à $x = 0,5\text{m}$ et $t = 0,05\text{s}$

Exercice-4 :

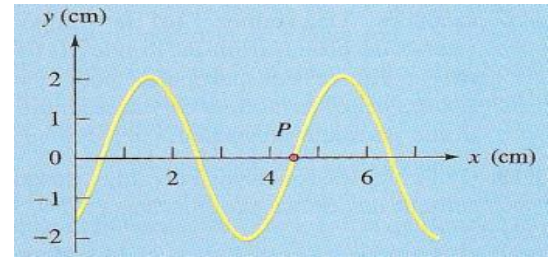
Une houle de **10m** de hauteur a une période **$T = 20\text{s}$** et une longueur d'onde **$\lambda = 100\text{m}$** . La hauteur de la houle est la dénivellation entre une crête et un creux.

- a. Quelle est l'amplitude de cette houle ?
- b. Donner la représentation temporelle de l'élongation d'un point **M** de la surface de l'eau, l'onde étant supposée sinusoïdale.
- c. Donner une représentation spatiale de la surface de l'eau à un instant **t** .
- d. Calculer la célérité de cette houle.

Exercice-5 :

Soit l'onde transversale à la figure ci-contre. Sa vitesse de propagation est de **40 cm/s** vers la droite. Déterminer :

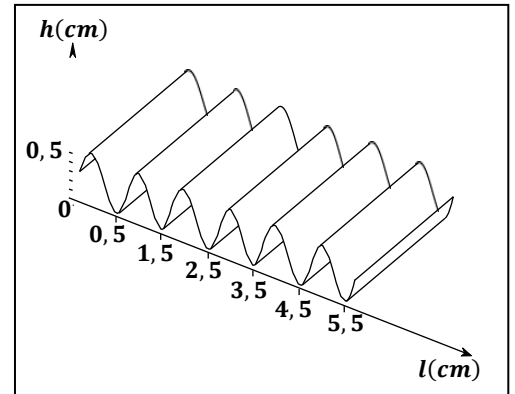
- La fréquence ;
- La différence de phase en radians entre des points distants de **2,5 cm** ;
- Le temps nécessaire pour que la phase en un point donné varie de **60°** ;
- La vitesse d'une particule au point **P** à l'instant représenté



Exercice-6:

Un vibreur de fréquence **25 Hz** provoque des ondes qui se propagent à la surface d'une cuve à eau. La distance **d** entre onze lignes de crêtes consécutives est **10,1 cm**.

- Quel est l'intérêt de mesurer la distance entre le plus grand nombre possible de crêtes pour déterminer λ ?
- Quelle est la longueur d'onde λ de l'onde se propageant à la surface de l'eau ?
- A l'instant pris comme origine des temps, la surface de l'eau a l'allure suivante représentée sur la figure. Retrouver sur ce graphique la longueur d'onde.
- Quelle est l'amplitude de l'onde ?
- Représenter l'aspect de la surface de l'eau en coupe, à l'instant $t_1 = 0,04 \text{ s}$ et $t_2 = 0,06 \text{ s}$.
- Calculer la célérité de l'onde.
- La hauteur **h** de l'eau dans la cuve est augmentée, la longueur d'onde λ' est alors égale à **1,2 cm** alors que la fréquence ne change pas. En déduire l'effet de la profondeur de l'eau dans la cuve à onde sur la célérité.



Série 8: Ondes transversales sur une corde

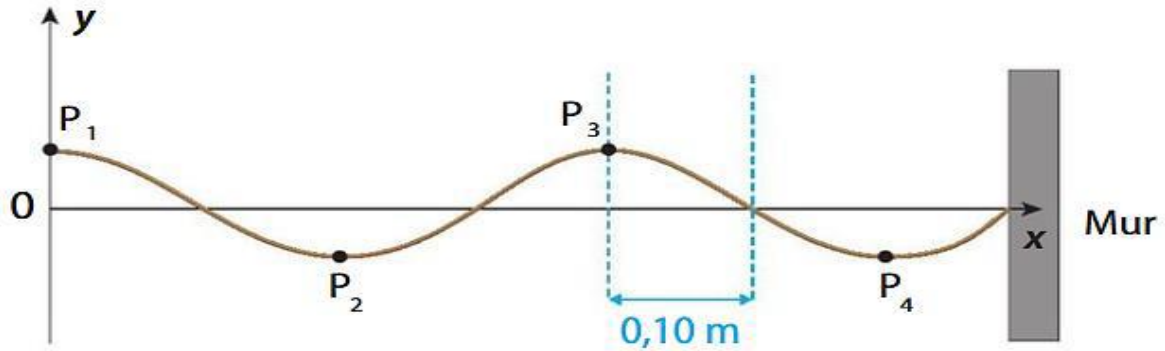
Exercice-1 : L'extrémité d'une corde est fixée à un mur, l'autre extrémité est agitée verticalement, sinusoïdalement avec une période T de 250 ms .

1. Déduire le mouvement d'un point de la corde.

Après $2,1\text{ s}$, une perturbation a parcourue la distance $d = 3,2\text{ m}$.

2. Calculer la célérité de l'onde.

A l'instant t_1 , l'aspect de la corde est le suivant :

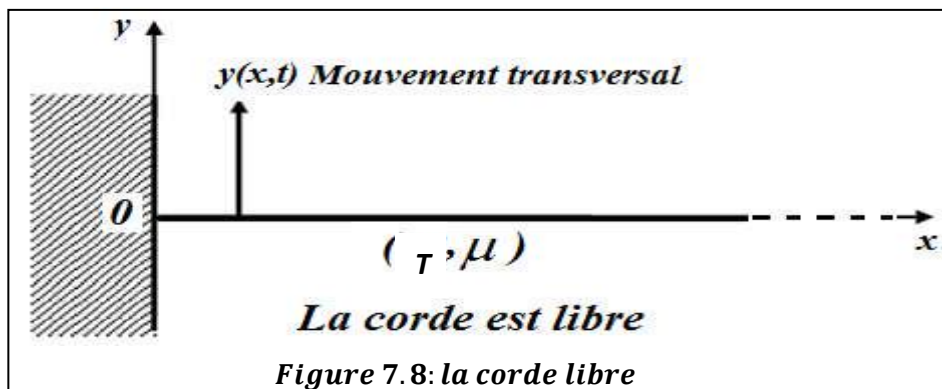


3. Déterminer la longueur d'onde λ de l'onde sinusoïdale et en déduire la célérité V_1 de l'onde à l'instant t_1 et la comparer avec la valeur V déterminée à la question 2.

4. Schématiser l'aspect de la corde à la date t_2 , 125 ms après la date t_1 .

Exercice-2 :

A. Soit une corde vibrant transversalement dans le plan Oxy . L'équation de mouvement est de la forme $y = f(x, t)$. Soient T et μ la tension et la masse linéique de la corde à l'équilibre.



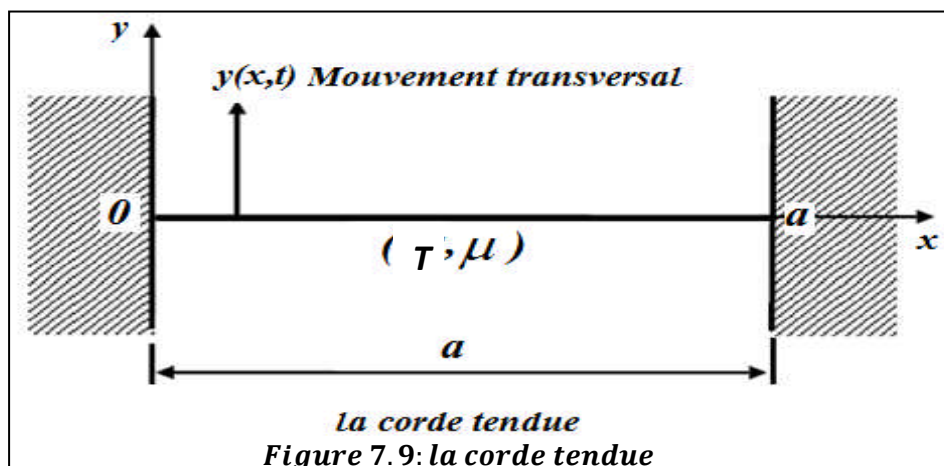
▪ Ecrire l'équation de propagation de l'onde.

▪ En déduire la célérité V des oscillations.

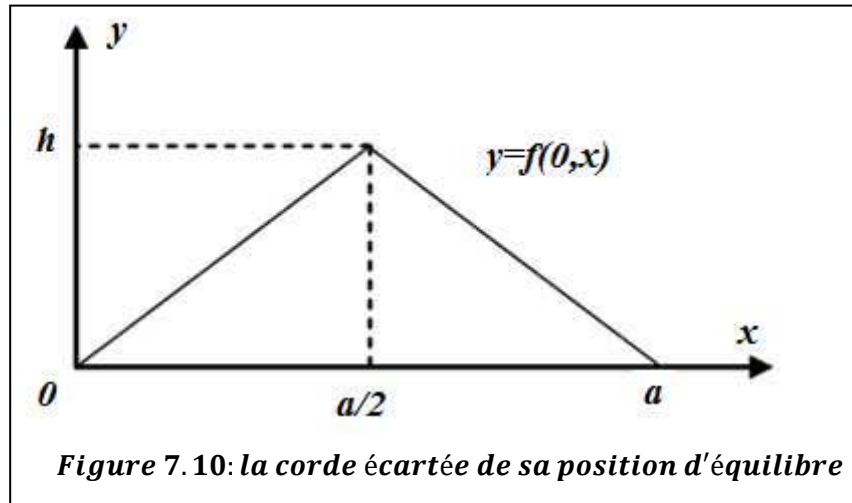
On considère que l'ébranlement est sinusoïdal.

▪ Déterminer les solutions de l'équation de propagation en utilisant la méthode des séparations des variables.

B. Maintenant la corde est fixée par les deux extrémités de distance a , lâchée sans vitesse initiale.



- Déterminer la forme de la solution générale.
 - Montrer que les fréquences de vibration de la corde sont multiples entier d'une fréquence fondamentale f_1 .
- C. Application numérique : pour la troisième corde de la guitare de longueur $a = 63 \text{ cm}$ en nylon, de masse volumique $\rho = 1200 \text{ Kg/m}^3$ et de section $S = 0,42 \text{ mm}^2$.



- Calculer la tension de cette corde pour qu'elle puisse émettre le son fondamental $f_1 = 147 \text{ Hz}$ (note ré).
- La corde maintenant est écartée de la position d'équilibre à l'instant $t = 0$, telle que représentée par la figure 7.10 et lâchée sans vitesse initiale :
Déterminer la solution générale de l'équation de propagation.

Exercice-3 :

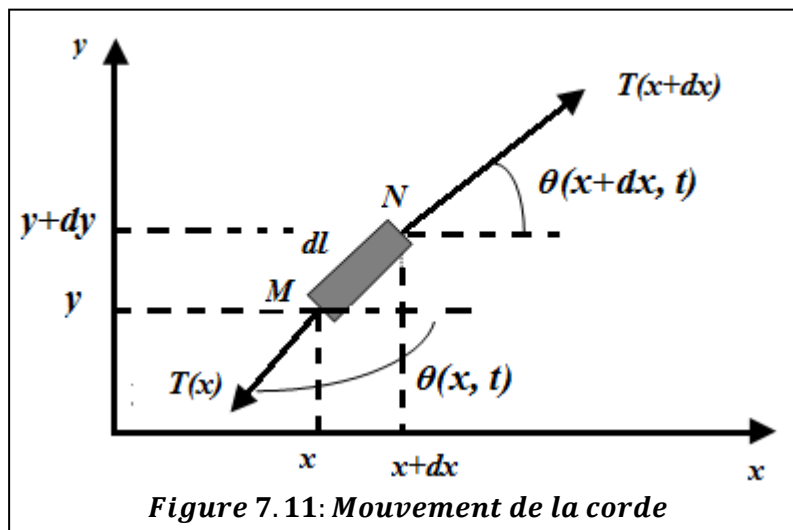
Partie A : Equation de la corde vibrante :

Une corde homogène et inextensible, de masse linéique μ , est tendue horizontalement suivant l'axe Ox avec une tension T constante, voire la figure 7.11.

La corde, déplacée de sa position d'équilibre, acquiert un mouvement décrit à l'instant t par le déplacement quasi vertical $y(x, t)$, compté à partir de sa position d'équilibre, d'un point M d'abscisse x au repos.

A l'instant t , la tension $T(x, t)$ exercée par la partie de la corde à droite de M sur la partie de la corde à gauche de M , fait un petit angle $\theta(x, t)$ avec l'horizontale.

On admettra θ petit, faible courbure de la corde, et on négligera les forces de pesanteur.



Equation des cordes vibrantes :

On considère le tronçon de la corde compris entre les abscisses x , $x + dx$.

- Etablir l'équation de propagation de l'onde de la corde vibrante.
- En déduire la célérité V de l'onde en fonction de μ et T .

Partie B : Analogie électrique :

Soit une tranche d'une cellule électrique sans perte représentée dans la figure 7.12 comme suit :

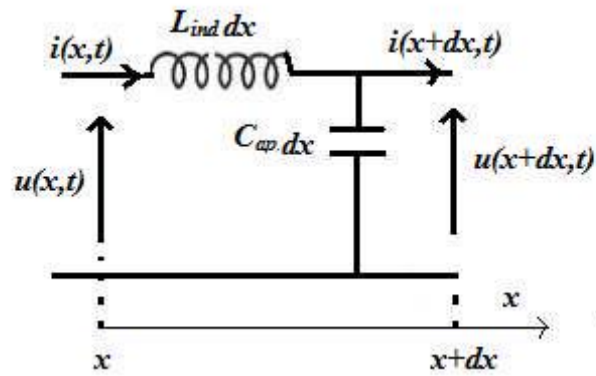
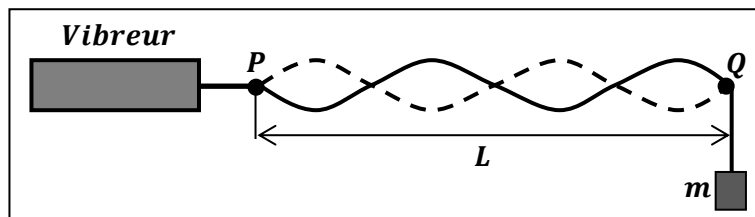


Figure 7.12: Une tranche d'une cellule électrique sans perte

- Montrer que la cellule électrique représentée ci-dessus constitue un circuit analogue d'un élément de corde vibrante de longueur dx .
- Exprimer les correspondants mécaniques de l'inductance linéique L_{ind} , de la capacité linéique C_{ap} , de l'intensité du courant $i(x, t)$ et de la tension électrique $u(x, t)$.

Exercice-4 :

Dans la figure ci-dessus, une corde est attachée au point P à un vibreur produisant des ondes sinusoïdales dans la corde. La corde passe sur un support au point Q et est tendue par un bloc de masse m . La distance L entre P et Q est de $1,2\text{ m}$. La masse linéique de la corde est $1,6\text{ g/m}$, et la fréquence f du vibreur est à 120 Hz . Au point P , l'amplitude du mouvement est assez petite pour que ce point soit considéré comme un nœud. Il y a également un nœud au point Q .



1. Quelle masse m de la corde permettant au vibreur de produire la quatrième harmonique sur la corde.
2. Quel mode d'oscillation est produit lorsque $m = 1\text{ Kg}$?

Solutions des exercices de la série :1

Exercice n° 1 : Mouvement oscillatoire.

1. L'amplitude maximale est **5cm**.
2. La pulsation propre est $\omega_0 = 25 \text{ rad/s}$, la fréquence $f = 3,98 \text{ Hz}$ et la période propre $T_0 = 0,25 \text{ s}$.
3. La phase initiale $\varphi = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.
4. Le déplacement, la vitesse et l'accélération à $t = 0 \text{ s}$:

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos\left(25t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x(0) = 5 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2,5 \text{ cm} \\ \dot{x}(t) = -125 \sin\left(25t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \dot{x}(0) = -125 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -108,25 \text{ cm/s} \\ \ddot{x}(t) = -3125 \cos\left(25t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \ddot{x}(0) = -3125 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1562,5 \text{ cm/s}^2 \end{cases}$$

A $t = 0,5 \text{ s}$:

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos\left(25t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x(0,5) = 5 \cos\left(12,5 + \frac{\pi}{3}\right) = 1,5 \text{ cm} \\ \dot{x}(t) = -125 \sin\left(25t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \dot{x}(0,5) = -125 \sin\left(12,5 + \frac{\pi}{3}\right) = -119,2 \text{ cm/s} \\ \ddot{x}(t) = -3125 \cos\left(25t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \ddot{x}(0,5) = -3125 \cos\left(12,5 + \frac{\pi}{3}\right) = -939,7 \text{ cm/s}^2 \end{cases}$$

Exercice n° 2 : Amplitude et déphasage d'un mouvement harmonique.

1. L'amplitude maximale X et le déphasage à l'origine φ :

$$\begin{cases} x(t) = X \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -X \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = X \cos(\varphi) = x_0 \\ \dot{x}(0) = -X \omega_0 \sin(\varphi) = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{x_0}{X} \dots\dots\dots (1) \\ \sin(\varphi) = -\frac{\dot{x}_0}{X \omega_0} \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

Pour obtenir l'amplitude maximale on fait la somme du carré des deux équations (1) et (2),

$$(1)^2 + (2)^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \left(\frac{x_0}{X}\right)^2 + \left(-\frac{\dot{x}_0}{X \omega_0}\right)^2 = 1 \Rightarrow X = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}$$

Et pour le déphasage, on divise l'équation (2) par l'équation (1),

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_0} \Rightarrow \varphi = -\text{Arc tan} \frac{\dot{x}_0}{x_0 \omega_0}$$

2. Pour exprimer $x(t)$ sous la forme $x(t) = B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t)$, on utilise la formule trigonométrique suivante :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \Rightarrow x(t) &= X \cos(\omega_0 t + \varphi) = X \cos(\omega_0 t) \cos(\varphi) - X \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi) = B \cos(\omega_0 t) + C \sin(\omega_0 t) \\ &\Rightarrow \begin{cases} B = X \cos(\varphi) \\ C = X \sin(\varphi) \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice n° 3 : Degré de liberté.

Le système (a) : Pendule simple :

1. Le point M est défini par :

$$\begin{cases} x = l \sin \theta \\ y = l \cos \theta \end{cases} \Rightarrow N = 2.$$

Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$$x^2 + y^2 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{Cte} \Rightarrow R = 1.$$

Le nombre de degré de liberté est : $d = N - R = 2 - 1 = 1$.

2. La coordonnée généralisée qui définit le système est : θ .

Le système (b) : Un cercle :

1. Le point M est défini par : $\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow N = 2.$$

Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{Cte} \Rightarrow R = 1.$$

Le nombre de degré de liberté est : $d = N - R = 2 - 1 = 1$.

2. La coordonnée généralisée qui définit le système est : θ .

Le système (c) : un cône :

1. Le point M est défini par :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \\ y = r \cos \theta \end{cases} \Rightarrow N = 2.$$

Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$$x^2 + y^2 = r^2 = \text{Cte} \Rightarrow R = 1.$$

Le nombre de degré de liberté est : $d = N - R = 2 - 1 = 1$.

2. La coordonnée généralisée est : θ .

Exercice n° 4 : Superposition de deux oscillations.

1. $3,2 \sin(\omega t) + \cos(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t) \cos(\varphi) - A \sin(\omega t) \sin(\varphi) \Rightarrow$

$$\begin{cases} A \cos(\varphi) = 1 \dots \dots (1) \\ -A \sin(\varphi) = 3,2 \dots (2) \end{cases} \Rightarrow \tan \varphi = -3,2 \Rightarrow \boxed{\varphi = -72,64^\circ}$$

Si on élève au carré l'expression (1) et (2) et après sommation on obtient :

$$A^2 = (3,2)^2 + 1^2 \Rightarrow A = \sqrt{(3,2)^2 + 1^2} \Rightarrow \boxed{A = 3,35}$$

2. $3 \sin(\omega t) + 4 \cos(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t) \cos(\varphi) - A \sin(\omega t) \sin(\varphi) \Rightarrow$

$$\begin{cases} A \cos(\varphi) = 4 \\ -A \sin(\varphi) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \varphi = -\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\varphi = -36,86^\circ} \\ A = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow \boxed{A = 5} \end{cases}$$

3. $11,5 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) - 8 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = A \cos(\omega t + \varphi) \dots \dots (1)$

On sait que par transformation trigonométrique que :

$$\begin{aligned} \sin(\omega t) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow 11,5 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) &= 11,5 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 11,5 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression (1) on obtient :

$$\begin{aligned} 11,5 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) - 8 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) &= 11,5 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) - 8 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = 3,5 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \\ \Rightarrow 3,5 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) &= A \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \begin{cases} \boxed{A = 3,5} \\ \boxed{\varphi = -\frac{\pi}{3}} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice n° 5 : Superposition de quatre oscillations.

On a :

$$G = A_0 [\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + 2\varphi) + \cos(\omega t + 3\varphi)] = A \cos(\omega t + \Phi)$$

$$A e^{j(\omega t + \Phi)} = A_0 [e^{j\omega t} + e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{j(\omega t + 2\varphi)} + e^{j(\omega t + 3\varphi)}]$$

$$A e^{j\Phi} = A_0 [1 + e^{j\varphi} + e^{j(2\varphi)} + e^{j(3\varphi)}] \Rightarrow A e^{j\Phi} = A_0 e^{j\frac{3\varphi}{2}} \left[e^{-j\frac{3\varphi}{2}} + e^{-j\frac{\varphi}{2}} + e^{j\frac{\varphi}{2}} + e^{j\frac{3\varphi}{2}} \right]$$

$$= A_0 e^{j\frac{3\varphi}{2}} \left[2 \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] = 2A_0 \left[\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] e^{j\frac{3\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{A = 2A_0 \left[\cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]} \\ \boxed{\Phi = \frac{3\varphi}{2}} \end{cases}$$

Exercice n° 1 : Equation de conservation.

❖ Système (i)

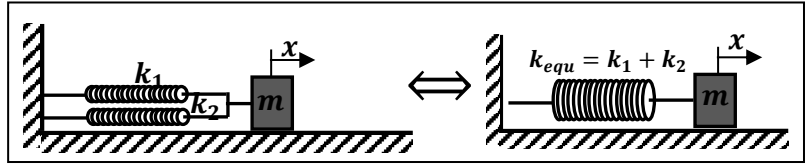
1. Les deux ressorts étant en parallèle, le ressort équivalent est de raideur : $k_{equ} = k_1 + k_2$.

$$2. U = \frac{1}{2} k_{equ} x^2 = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x^2.$$

$$3. E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x^2.$$

$$4. \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m \ddot{x} + (k_1 + k_2) x \dot{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{(k_1 + k_2)}{m} x = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m}}$$



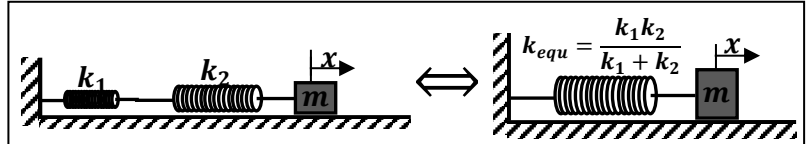
❖ Système (ii)

1. Les deux ressorts étant en série, le ressort équivalent est de raideur : $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

$$2. U = \frac{1}{2} k_{equ} x^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right) x^2.$$

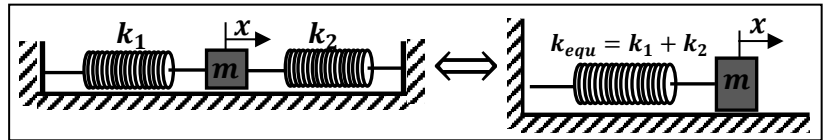
$$3. E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right) x^2.$$

$$4. \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m \ddot{x} + \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \right) x \dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)} x = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}.$$



❖ Système (iii)

1. Lorsque l'un des ressorts s'allonge d'une distance x l'autre se comprime d'une distance x et lorsque l'un tire l'autre pousse dans le même sens : ils s'agissent comme s'ils étaient en parallèle. Le ressort équivalent est donc : $k_{equ} = k_1 + k_2$.



$$2. U = \frac{1}{2} k_{equ} x^2 = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x^2.$$

$$3. E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x^2.$$

$$4. \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow m \ddot{x} + (k_1 + k_2) x \dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{(k_1 + k_2)}{m} x = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m}}$$

Exercice n° 2 : Equation du mouvement.

On traite les systèmes aux petites oscillations

1. **Figure 1** : Barre de longueur l sans masse portant une masse m et oscillant autour de l'axe O . A l'équilibre la

$$\text{barre est horizontale et } \theta = 0. \quad m \rightarrow \begin{cases} x_m = l \cos \theta \\ y_m = l \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m = -l \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}_m = l \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow v_m^2 = \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 = l^2 \dot{\theta}^2$$

- Energie cinétique : $T = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

- Energie potentielle : $U = U_{k_1} + U_{k_2} = \frac{1}{2} k_1 (x_1 \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 \sin \theta)^2 \approx \frac{1}{2} (k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2) \theta^2$
 $\Rightarrow U = \frac{1}{2} (k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2) \theta^2$

- Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} (k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2) \theta^2$

- Formalisme de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l^2 \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2) \theta \end{cases} \Rightarrow m l^2 \ddot{\theta} + (k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2) \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2)}{m l^2} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2)}{m l^2}}$$

- La solution est de la forme :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

2. Figure 2 : $y = R\theta \Rightarrow \dot{y} = R\dot{\theta}$

- Energie cinétique : $T = T_M + T_m + T_\mu = \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\mu(R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}[J_{/O} + (m + \mu)R^2]\dot{\theta}^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}[J_{/O} + (m + \mu)R^2]\dot{\theta}^2$$
- Energie potentielle : $U = \frac{1}{2}k(a \sin\theta)^2 \approx \frac{1}{2}ka^2\theta^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}ka^2\theta^2$
- Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{2}[J_{/O} + (m + \mu)R^2]\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ka^2\theta^2$
- Formalisme de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = [J_{/O} + (m + \mu)R^2]\dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = [J_{/O} + (m + \mu)R^2]\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ka^2\theta \end{cases} \\ \Rightarrow [J_{/O} + (m + \mu)R^2]\ddot{\theta} + ka^2\theta &= 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0} \\ \Rightarrow \omega_0 &= \sqrt{\frac{ka^2}{[J_{/O} + (m + \mu)R^2]}} \end{aligned}$$

- La solution est de la forme :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

3. Figure 3 :

- Coordonnées et composantes de vitesses :

$$\begin{aligned} M \rightarrow \begin{cases} x_M = -\frac{l}{4} \cos\theta \\ y_M = \frac{l}{4} \sin\theta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_M = \frac{l}{4} \dot{\theta} \sin\theta \\ \dot{y}_M = \frac{l}{4} \dot{\theta} \cos\theta \end{cases} \Rightarrow v_M^2 = \dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 = \frac{1}{16}l^2\dot{\theta}^2 \\ m \rightarrow \begin{cases} x_m = \frac{3l}{4} \cos\theta \\ y_m = -\frac{3l}{4} \sin\theta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m = -\frac{3l}{4} \dot{\theta} \sin\theta \\ \dot{y}_m = -\frac{3l}{4} \dot{\theta} \cos\theta \end{cases} \Rightarrow v_m^2 = \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 = \frac{9}{16}l^2\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\text{On pose : } \frac{l}{4} = a \text{ et } \frac{3l}{4} = b$$

- Energie cinétique : $T = T_M + T_m = \frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}[Ma^2 + mb^2]\dot{\theta}^2$
- Energie potentielle : $U = U_{k_1} + U_{k_2} = \frac{1}{2}k_1(a \sin\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(a \sin\theta)^2 \approx \frac{1}{2}(k_1 + k_2)a^2\theta^2$
- Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{2}[Ma^2 + mb^2]\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)a^2\theta^2$
- Formalisme de Lagrange :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = [Ma^2 + mb^2]\dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = [Ma^2 + mb^2]\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -(k_1 + k_2)a^2\theta \end{cases} \\ \Rightarrow [Ma^2 + mb^2]\ddot{\theta} + [k_1 + k_2]a^2\theta &= 0 \\ \Rightarrow \left[\frac{1}{16}l^2M + \frac{9}{16}l^2m\right]\ddot{\theta} + \frac{1}{16}[k_1 + k_2]l^2\theta &= 0 \Rightarrow [M + 9m]\ddot{\theta} + [k_1 + k_2]\theta \\ = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{[k_1 + k_2]}{[M + 9m]}\theta &= 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{[k_1 + k_2]}{[M + 9m]}} \end{aligned}$$

- La solution est de la forme :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

4. Figure 4 :

- Coordonnées et composantes de vitesses :

$$\begin{aligned}
 M &\rightarrow \begin{cases} x_M = -R\theta \\ y_M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_M = -R\dot{\theta} \\ \dot{y}_M = 0 \end{cases} \Rightarrow v_M^2 = \dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2 = R^2\dot{\theta}^2 \\
 m &\rightarrow \begin{cases} x_m = -R\theta + l \sin\theta \\ y_m = 0 + l \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_m = -R\dot{\theta} + l\dot{\theta} \cos\theta \\ \dot{y}_m = -l\dot{\theta} \sin\theta \end{cases} \\
 \Rightarrow v_m^2 &= \dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2 = [-R\dot{\theta} + l\dot{\theta} \cos\theta]^2 + [-l\dot{\theta} \sin\theta]^2 \\
 &= R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\theta}^2 \cos^2\theta - 2Rl\dot{\theta}^2 \cos\theta + l^2\dot{\theta}^2 \sin^2\theta \\
 &= R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\theta}^2 [\cos^2\theta + \sin^2\theta] - 2Rl\dot{\theta}^2 \cos\theta \approx R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2Rl\dot{\theta}^2 \\
 &= [l - R]^2\dot{\theta}^2
 \end{aligned}$$

Le moment d'inertie du disque : $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$.

- Energie cinétique : $T = T_M + T_m \Rightarrow \begin{cases} T_M = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 \\ T_m = \frac{1}{2}m[l - R]^2\dot{\theta}^2 \end{cases}$
 $\Rightarrow T = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m[l - R]^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}MR^2 + m[l - R]^2\right]\dot{\theta}^2}$
- Energie potentielle : $U = U_m + U_k \Rightarrow \begin{cases} U_m = -mgl \cos\theta \\ U_k = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{U = -mgl \cos\theta + \frac{1}{2}kR^2\theta^2}$
- Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}MR^2 + m[l - R]^2\right]\dot{\theta}^2 + mgl \cos\theta - \frac{1}{2}kR^2\theta^2$
- Formalisme de Lagrange :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left[\frac{3}{2}MR^2 + m[l - R]^2\right]\dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left[\frac{3}{2}MR^2 + m[l - R]^2\right]\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -kR^2\theta - mgl \sin\theta \approx -kR^2\theta - mgl\theta \end{cases} \\
 \Rightarrow \left[\frac{3}{2}MR^2 + m[l - R]^2\right]\ddot{\theta} + [kR^2 + mgl]\theta &= 0 \\
 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{[kR^2 + mgl]}{\left[\frac{3}{2}MR^2 + m[l - R]^2\right]}\theta &= 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0} \\
 \Rightarrow \omega_0 &= \sqrt{\frac{[kR^2 + mgl]}{\left[\frac{3}{2}MR^2 + m[l - R]^2\right]}}
 \end{aligned}$$

- La solution est de la forme :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

5. Figure 5 : On peut utiliser pour établir les équations différentielles du mouvement la loi de Kirchhoff ou bien le formalisme de Lagrange :

➤ Loi de Kirchhoff :

- La loi des mailles :

$$\sum_i v_i = 0 \Rightarrow v_L + v_C = L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

- L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{dq}{dt}\right] = \frac{d^2q}{dt^2} \Rightarrow L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = \ddot{q} + \omega_0^2q = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

- On a l'équivalence du système mécanique-électrique comme suit :

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

D'où :

$$\begin{cases} L \leftrightarrow m \\ q(t) \leftrightarrow x(t) \\ \frac{1}{C} \leftrightarrow k \end{cases}$$

- La solution est de la forme :

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

➤ Formalisme de Lagrange :

- Energie magnétique emmagasinée dans la bobine : $E_m = T = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 = \frac{1}{2} L \dot{q}^2$
- Energie électrique emmagasinée dans le condensateur : $E_e = U = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$
- Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$
- Formalisme de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L \dot{q} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = L \ddot{q} \\ \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{1}{C} q \end{cases} \Rightarrow L \ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

- La solution est de la forme :

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

6. Figure 6 :

- Energie cinétique : $T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[J_0 + 2m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right] \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[J_0 + 2m \frac{l^2}{4} \right] \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left[J_0 + m \frac{l^2}{2} \right] \dot{\theta}^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \left[J_0 + m \frac{l^2}{2} \right] \dot{\theta}^2$$

- Energie potentielle : $U = \frac{1}{2} C \theta^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2} C \theta^2$
- Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{2} \left[J_0 + m \frac{l^2}{2} \right] \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} C \theta^2$
- Formalisme de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left[J_0 + m \frac{l^2}{2} \right] \dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \left[J_0 + m \frac{l^2}{2} \right] \ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -C \theta \end{cases} \Rightarrow \left[J_0 + m \frac{l^2}{2} \right] \ddot{\theta} + C \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{\left[J_0 + m \frac{l^2}{2} \right]} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{\left[J_0 + m \frac{l^2}{2} \right]}}$$

- La solution est de la forme :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

7. Figure 7 :

- Energie cinétique : Puisque la section est uniforme, toutes les particules du liquide ont une vitesse $v = \dot{x}$. L'énergie cinétique du fluide est :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

- Energie potentielle : $U = mgx = (\rho s x) g x = \rho g s x^2 \Rightarrow U = \rho g s x^2$
- Fonction de Lagrange : $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \rho g s x^2$

- Formalisme de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -2\rho g s x \end{cases} \Rightarrow m\ddot{x} + 2\rho g s x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2\rho g s}{m} x = 0$$

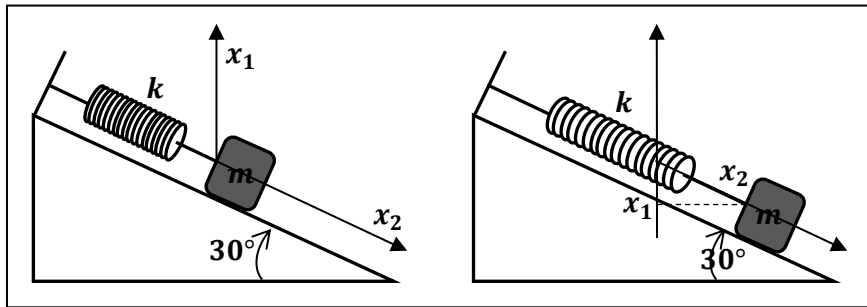
$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2\rho g s}{m}}}$$

- La solution est de la forme :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Exercice n° 3 : Plan incliné.

$$\text{Energie potentielle} \Rightarrow \begin{cases} \text{ressort} \Rightarrow \text{l'axe } Ox_2 \\ \text{gravitation} \Rightarrow \text{l'axe } Ox_1 \end{cases}$$



- La masse d'équilibre est représentée sur la figure de gauche. Lorsqu'elle est écartée de l'équilibre (figure de droite) sa position est x_2 suivant l'axe Ox_2 et x_1 suivant l'axe Ox_1 . L'allongement du ressort est $x_2 + x_0$ avec x_0 l'allongement déjà présent à l'équilibre. L'expression de l'énergie potentielle prend la forme :

$$U = \frac{1}{2} k(x_2 + x_0)^2 - mgx_1$$

Les deux coordonnées x_2 et x_1 sont reliées par $x_1 = x_2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}x_2$. On peut garder une seule coordonnée qu'on considère comme le degré de liberté du système :

$$U = \frac{1}{2} k(x_2 + x_0)^2 - \frac{1}{2} mgx_2 = \frac{1}{2} kx_2^2 + \left(kx_0 - \frac{1}{2} mg\right) x_2 + \frac{1}{2} kx_0^2$$

- A l'équilibre la dérivée de l'énergie potentielle s'annule :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = 0 \Rightarrow \left[kx_2 + \left(kx_0 - \frac{1}{2} mg\right) \right]_{x_2=0} = 0 \Rightarrow kx_0 - \frac{1}{2} mg = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{mg}{2k}} \text{ condition d'équilibre}$$

Cette condition permet de simplifier l'expression de U :

$$\boxed{U = \frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} kx_0^2}$$

- L'énergie totale du système est $E_T = T + U$. Mais l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2$ donc :

$$\boxed{E_T = \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} kx_0^2}$$

Le système est conservatif, l'énergie totale est constante donc :

$$\frac{dE_T}{dx} = m\dot{x}_2\ddot{x}_2 + kx_2\dot{x}_2 = \dot{x}_2(m\ddot{x}_2 + kx_2) = 0$$

La vitesse de la masse m est $v = \dot{x}_2$ ne peut pas être égale à zéro à tout instant, donc :

$$\boxed{\ddot{x}_2 + \frac{k}{m} x_2 = 0}$$

Qui est l'équation du mouvement.

Exercice n° 4 : Condition d'oscillation.

- L'énergie potentielle :

$$U = U_m + U_k = -mg(L - L\cos\theta) + \frac{1}{2}k(l\sin\theta)^2 \approx -\frac{1}{2}mgL\theta^2 + \frac{1}{2}kl^2\theta^2 = \frac{1}{2}[kl^2 - mgL]\theta^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}[kl^2 - mgL]\theta^2$$

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

2. Equation du mouvement :

❖ Méthode de Lagrange :

$$L = T - U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}[kl^2 - mgL]\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mL^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -[kl^2 - mgL]\theta \end{cases} \Rightarrow mL^2\ddot{\theta} + [kl^2 - mgL]\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{[kl^2 - mgL]}{mL^2}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{[kl^2 - mgL]}{mL^2}}$$

❖ Méthode de conservation de l'énergie :

$$E_T = T + U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}[kl^2 - mgL]\theta^2$$

$$\frac{dE_T}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mL^2\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} + \frac{1}{2}[kl^2 - mgL]\frac{d\theta^2}{dt} = \frac{1}{2}mL^2\left[2\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{dt}\right] + \frac{1}{2}[kl^2 - mgL]\left[2\theta\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$= mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + [kl^2 - mgL]\theta\dot{\theta} = \dot{\theta}\{mL^2\ddot{\theta} + [kl^2 - mgL]\theta\} = 0$$

$$\Rightarrow mL^2\ddot{\theta} + [kl^2 - mgL]\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{[kl^2 - mgL]}{mL^2}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{[kl^2 - mgL]}{mL^2}}$$

3. Condition d'oscillation du système \Leftrightarrow condition d'équilibre stable :

$$\text{A l'équilibre : } \frac{\partial U}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow [kl^2 - mgL]\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = [kl^2 - mgL]\theta \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\bigg|_{\theta=0} = [kl^2 - mgL] > 0 \Rightarrow kl^2 > mgL \text{ (Condition d'oscillation)}$$

Exercice 5 : Translation et rotation d'un système mécanique.

1. Puisque les deux disques roulent sans glissement on a : $x = r\varphi = R\theta$.

$$T = T_{M(\text{translation})} + T_{M(\text{rotation})} + T_{m(\text{translation})} + T_{m(\text{rotation})} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{3}{4}(M + m)\dot{x}^2 \Rightarrow T = \frac{3}{4}(M + m)\dot{x}^2$$

$$U = U_k = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}kx^2$$

2. Avec l'équation de Lagrange. Le Lagrangien est : $\mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4}(M + m)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{3(M + m)}x = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3(M + m)}}$$

Avec l'équation de conservation de l'énergie totale. $E = T + U = \frac{3}{4}(M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$.

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{3(M + m)}x = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3(M + m)}}$$

Solutions des exercices de la série :3

Exercice n° 1 : Mouvement amorti d'un oscillateur.

1. L'équation du mouvement amorti est :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\alpha}{2m} \\ \omega_0 \frac{\alpha}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

La période propre du système est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Application numérique : $\omega_0 \approx 5 \text{ rad/s}$; $T_0 \approx 1,25 \text{ s}$.

$$2. \alpha = 0,6 \text{ Kg/s} \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha}{2m} = \frac{0,6}{2 \cdot 0,15} = 2 \text{ s}^{-1} \Rightarrow \lambda < \omega_0$$

Le corps m a un mouvement oscillatoire amorti.

- La résolution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi) \text{ avec } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} \approx 4,6 \text{ rad/s}$$

En appliquant les conditions initiales :

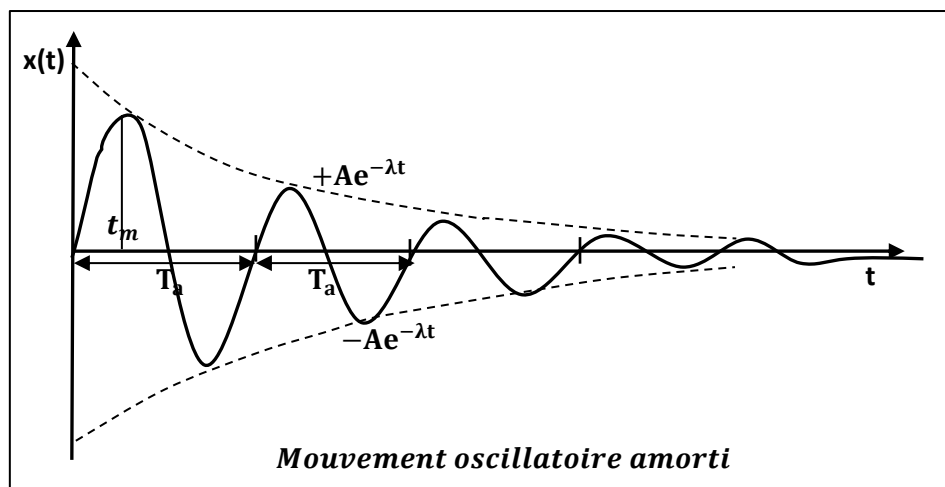
$$\begin{cases} x(0) = A \cos(\varphi) = 0 \rightarrow \cos \varphi = 0 \rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \\ \dot{x}(t) = -\lambda A e^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi) - A e^{-\lambda t} \omega_a \sin(\omega_a t + \varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = -\frac{\pi}{2} \\ \dot{x}(0) = -\lambda A \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - A \omega_a \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = A \omega_a = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}} \\ \boxed{A \frac{v_0}{\omega_a} = \frac{v_0}{\omega_a}} \end{cases}$$

La solution finale sera exprimée comme suit :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi) \Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_a} e^{-\lambda t} \cos\left(\omega_a t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{\omega_a} e^{-\lambda t} \sin(\omega_a t)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_a} e^{-\lambda t} \sin(\omega_a t)}$$



- La pseudo période se calcule :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = 1,37 \text{ s}$$

- Le temps de la première amplitude t_m :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -\lambda \frac{v_0}{\omega_a} e^{-i\lambda t} \sin(\omega_a t) + \omega_a \frac{v_0}{\omega_a} e^{-i\lambda t} \cos(\omega_a t) \\ \Rightarrow \dot{x}(t_m) &= -\lambda \frac{v_0}{\omega_a} e^{-i\lambda t_m} \sin(\omega_a t_m) + \omega_a \frac{v_0}{\omega_a} e^{-i\lambda t_m} \cos(\omega_a t_m) = 0 \\ \Rightarrow tg(\omega_a t_m) &= \frac{\sin(\omega_a t_m)}{\cos(\omega_a t_m)} = \frac{\omega_a \frac{v_0}{\omega_a}}{\lambda \frac{v_0}{\omega_a}} = \frac{\omega_a}{\lambda} \Rightarrow \omega_a t_m = \text{Arctg}\left(\frac{\omega_a}{\lambda}\right) \Rightarrow t_m = \frac{\text{Arctg}\left(\frac{\omega_a}{\lambda}\right)}{\omega_a}\end{aligned}$$

Application numérique :

$$t_m = 0,25s \neq \frac{T_a}{4}$$

Exercice n° 2 : Mouvement amorti d'un oscillateur en rotation puis en translation.

Système-1 :

1. Le Lagrangien :

- L'énergie cinétique : $T = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$.
- L'énergie potentielle : $U = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k (-x)^2 = k x^2$
- La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2} \alpha v_m^2 = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$.
- Le Lagrangien : $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - k x^2$.

2. L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -2kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x} \end{cases} \Rightarrow m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + 2kx = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \frac{2k}{m} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\alpha}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \end{cases}$$

3. La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

4. La solution générale pour un faible amortissement est :

$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi) \text{ avec } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Système-2 :

1. Le Lagrangien :

- L'énergie cinétique : $T = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$.
- L'énergie potentielle : $U = 2 \left[\frac{1}{2} k x^2 \right] + mgl \cos \theta = k \left(\frac{l}{2} \sin \theta \right)^2 + mgl \cos \theta$
 $\Rightarrow U \cong k \left(\frac{l}{2} \theta \right)^2 + mgl \cos \theta$
- La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2} \alpha v_m^2 = \frac{1}{2} \alpha l^2 \dot{\theta}^2$.
- Le Lagrangien : $L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - k \left(\frac{l}{2} \theta \right)^2 - mgl \cos \theta$.

2. L'équation différentielle du mouvement :

$$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + \alpha l^2\dot{\theta} + \left[\frac{1}{2}kl - mg\right]l\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{\left[\frac{1}{2}kl - mg\right]}{ml}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda = \frac{\alpha}{2m}} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{[\frac{1}{2}kl - mg]}{ml}} \end{cases}$$

3. La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{[\frac{1}{2}kl - mg]}{ml}}$.

4. La solution générale pour un faible amortissement est :

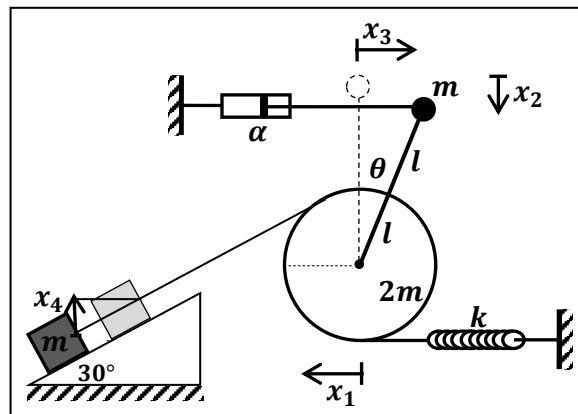
$$\theta(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi) \text{ avec } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.$$

Exercice n° 3 : Mouvement amorti d'un oscillateur en rotation et en translation.

1. L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}k(x_1 + x_0)^2 - mgx_2 + mgx_4$$

Les trois coordonnées x_1 , x_2 et x_4 dépendent de θ comme suit :



$$\begin{cases} x_1 = l\theta \\ x_2 = 2l(1 - \cos\theta) \approx l\theta^2 \\ x_4 = l\theta \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}l\theta \end{cases} \Rightarrow U = \frac{1}{2}k(l\theta + x_0)^2 - mgl\theta^2 + \frac{1}{2}mgl\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \left(\frac{1}{2}kl^2 - mgl\right)\theta^2 + \left(\frac{1}{2}mg + kx_0\right)l\theta + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

2. A l'équilibre : $\left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left| (kl^2 - 2mgl)\theta + \left(\frac{1}{2}mg + kx_0 \right) l \right|_{\theta=0} = \left(\frac{1}{2}mg + kx_0 \right) = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{mg}{2k}$

L'expression de l'énergie potentielle sera : $U = \left(\frac{1}{2}kl^2 - mgl\right)\theta^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$

3. Pour que l'équilibre précédent soit stable, la deuxième dérivée doit être positive :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = (kl^2 - 2mgl) > 0 \Rightarrow \boxed{(kl - 2mg) > 0}$$

4. L'énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique de la poulie et la tige avec la masse ponctuelle plus l'énergie de translation de la masse attachée au fil :

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

v Étant la vitesse de la masse sur le plan incliné. Le module de cette vitesse est relié à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ par $v = l\dot{\theta}$ donc :

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

Mais $J = \frac{1}{2}(2m)l^2 + m(2l)^2 = 5ml^2 \Rightarrow \boxed{T = 3ml^2\dot{\theta}^2}$

On déduit le Lagrangien :

$$L = T - U = 3ml^2\dot{\theta}^2 - \left(\frac{1}{2}kl^2 - mgl\right)\theta^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

La fonction de dissipation est :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}\alpha(2l\dot{\theta})^2 = 2\alpha l^2\dot{\theta}^2$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 6ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] = 6ml^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 4\alpha l^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -(kl^2 - 2mgl)\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6ml^2\ddot{\theta} + 4\alpha l^2\dot{\theta} + (kl^2 - 2mgl)\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{3m}\dot{\theta} + \frac{(kl - 2mg)}{6ml}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\alpha}{3m} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{(kl - 2mg)}{6ml}} \end{cases}$$

5. Pour avoir un mouvement oscillatoire il faut être dans le régime pseudopériodique $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$, donc :

$$\left(\frac{\alpha}{3m}\right)^2 - \frac{(kl - 2mg)}{6ml} < 0.$$

Exercice n° 4 : Mouvement d'un oscillateur dans un plan incliné.

1. Cas ou $\beta = 0$.

a. $T = T_{trans\ disque} + T_{rot\ disque} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}mr^2\right]\left[\frac{\dot{x}}{r}\right]^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{3}{4}m\dot{x}^2}$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kx^2}.$$

b. • La méthode de conservation de l'énergie mécanique totale aboutit à l'équation du mouvement :

$$E_M = T + U = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = \frac{3}{2}m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = \left[\frac{3}{2}m\ddot{x} + kx\right]\dot{x} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

• La méthode de Lagrange aboutit au même résultat :

$$L = T - U = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2}m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

2. Cas ou $\beta \neq 0$.

a. Pour $\beta \neq 0$ tant que la condition de roulement sans glissement est respectée, l'énergie cinétique est inchangée. Par contre l'énergie potentielle est éventuellement modifiée, car il faut introduire le terme lié à la force de pesanteur, donc l'équation du mouvement est modifiée.

$$U = \frac{1}{2}k(x+x_0)^2 - mg(x+x_0).\sin\beta = \frac{1}{2}kx^2 + [kx_0 - mg.\sin\beta]x - mgx_0.\sin\beta + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}kx^2 + [kx_0 - mg.\sin\beta]x + Cte$$

Condition d'équilibre :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = [kx + kx_0 - mg.\sin\beta]_{x=0} = kx_0 - mg.\sin\beta = 0$$

L'énergie potentielle devient :

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + Cte$$

L'équation du mouvement devient :

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{3m}x = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$$

b. Tant que la condition de roulement sans glissement est respectée, la pulsation n'est pas modifiée

c. **Cas ou $\beta = \frac{\pi}{2}$** : le cylindre perd l'appui sur le plan de contact, et il n'y a donc plus de roulement. On se retrouve dans le cas d'un oscillateur harmonique tout simple :

$$E_M = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{dE_M}{dt} = m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0; \quad \omega'_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On remarque que $\omega'_0 > \omega_0$. Ce résultat se justifie du fait que la rotation du cylindre est associée à une inertie supplémentaire, d'où une pulsation plus basse.

3. Cas du système de la Figure 2.

$$a. \begin{cases} T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 \\ U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 = kx^2 \Rightarrow L = T - U = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 - kx^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \\ D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \alpha\dot{x}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2}m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 2kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 2\alpha\dot{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + 2kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{4\alpha}{3m}\dot{x} + \frac{4k}{3m}x = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2\alpha}{3m}; \quad \omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{3m}}$$

$$b. \text{ Pour le régime critique : } \lambda_c = \omega_0 \Rightarrow \frac{2\alpha_c}{3m} = 2\sqrt{\frac{k}{3m}} \Rightarrow \alpha_c = \sqrt{3km}$$

$$c. \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{2\alpha}{3m} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3m}{k}} = \frac{\alpha}{\sqrt{3km}}$$

$$d. \quad x(t) = Ce^{-\lambda t} . \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Solutions des exercices de la série :4

Exercice 1 : Système forcé.

$$1. \begin{cases} T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 \Rightarrow T = \frac{3}{4}M\dot{x}^2, \text{ car } x = R\theta \\ U = \frac{1}{2}kx^2 \\ D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 \end{cases}$$

$$2. L = T - U = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2\alpha}{3M}\dot{x} + \frac{2k}{3M}x = \frac{2F_0}{3M}\cos\Omega t$$

L'équation est de la forme : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{2F_0}{3M}\cos\Omega t$. Avec : $\lambda = \frac{\alpha}{3M}$, $\omega_0^2 = \frac{2k}{3M}$.

3. En utilisant la représentation complexe :

$$\begin{aligned} (2F_0/3M)\cos\Omega t &\rightarrow (2F_0/3M)e^{j\Omega t} \\ x = A\cos(\Omega t + \Phi) &\rightarrow \bar{x} = \bar{A}e^{j\Omega t} \end{aligned}$$

La solution permanente est : $y = A\cos(\Omega t + \Phi)$.

$$\text{On obtient } -\Omega^2\bar{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\bar{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\bar{A}e^{j\Omega t} = (2F_0/3M)e^{j\Omega t} \Rightarrow \bar{A} = \frac{2F_0/3M}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}.$$

$$\text{L'amplitude est : } A = \frac{2F_0/3M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}. \text{ La phase est : } \tan\Phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

4. La pulsation de résonance est Ω_R telle que

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \Omega} \right|_{\Omega=\Omega_R} = 0 \Rightarrow \left. \frac{-4\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\lambda^2\Omega}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2]^{3/2}} \right|_{\Omega=\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

Exercice 2 : Circuit oscillant excité par un générateur.

$$1. \text{ La loi des mailles nous donne } u_R + u_C + u_L = E(t) \Rightarrow Ri + \frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = E(t) \\ \Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{E_0}{L}\cos\Omega t$$

$$2. \text{ L'équation est de la forme } \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2q = (E_0/L)\cos\Omega t. \text{ Avec : } \lambda = \frac{R}{2L}, \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

La solution permanente est $q = A\cos(\Omega t + \Phi)$. Utilisons la représentation complexe pour trouver A et Φ :

$$\begin{aligned} (E_0/L)\cos\Omega t &\rightarrow (E_0/L)e^{j\Omega t} \\ q = A\cos(\Omega t + \Phi) &\rightarrow \bar{q} = \bar{A}e^{j\Omega t} \end{aligned}$$

$$\text{On obtient } -\Omega^2\bar{A}e^{j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\bar{A}e^{j\Omega t} + \omega_0^2\bar{A}e^{j\Omega t} = (E_0/L)e^{j\Omega t} \Rightarrow \bar{A} = \frac{E_0/L}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda j\Omega}.$$

$$\text{L'amplitude est : } A = \frac{E_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}. \text{ La phase est : } \tan\Phi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

3. La pulsation de résonance est Ω_R telle que

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \Omega} \right|_{\Omega=\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

$$4. \text{ Lorsque } \lambda \ll \omega_0 : \langle P \rangle = \frac{\langle P \rangle_{\max}}{2} \Rightarrow [\Omega_{C1} \approx \omega_0 - \lambda, \Omega_{C2} = \omega_0 + \lambda]. [B = \Omega_{C2} - \Omega_{C1} = 2\lambda].$$

Exercice 3 : Mouvement sismique.

▪ Le Lagrangien du système :

$$\text{L'énergie cinétique s'écrit : } T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\text{L'énergie potentielle s'exprime : } U = U_k = \frac{1}{2}k(x - x_s)^2$$

$$\text{Le Lagrangien du système s'écrit alors : } L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - x_s)^2$$

▪ L'équation différentielle est de la forme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -k(x - x_s) \end{cases} \Rightarrow m\ddot{x} + k(x - x_s) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{a}{m}\cos\Omega t}$$

D'où :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \text{Rél}[\frac{a}{m} e^{j\Omega t}] \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

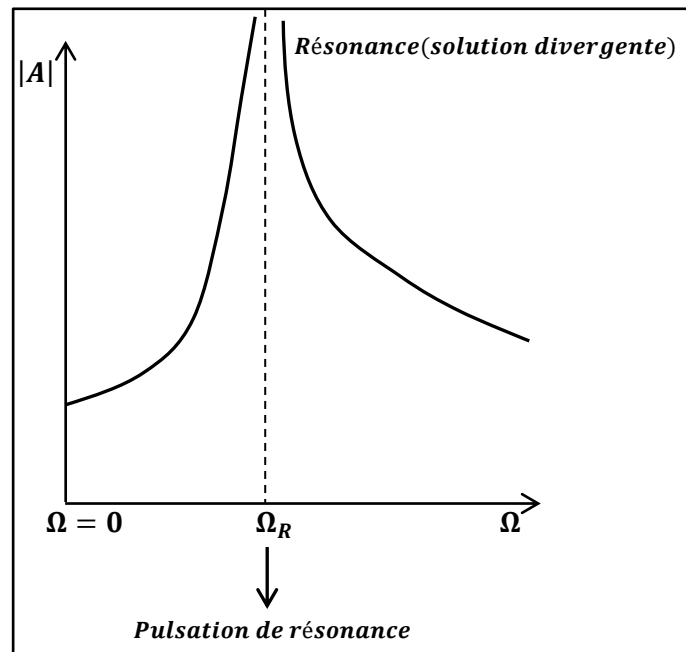
- La solution de cette équation est de la forme :

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) = \text{Rél}[Ae^{j(\Omega t + \varphi)}] \Rightarrow \tilde{x}(t) = A e^{j(\Omega t + \varphi)}$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement, on détermine l'amplitude de la réponse comme suit :

$$A(\Omega) = \frac{\frac{a}{m}}{|\Omega^2 - \omega_0^2|}$$

Le système présente une singularité au point $\Omega = \omega_0$ comme le montre la figure suivante :



- L'immeuble va s'effondrer face au séisme car le système oscille avec la pulsation propre. On appelle ce phénomène la résonance. On se propose dans ce cas-là de mettre en place un moyen d'amortir les oscillations extérieures du système qui se réduit par une force de frottement visqueuse.

Exercice 4 : Oscillateur harmonique.

Parti A : Mode libre.

- Le Lagrangien du système :

- Pour l'énergie cinétique on a : $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$
- Et pour l'énergie potentielle on a : $U = \frac{1}{2} k x^2$
- Alors Lagrangien du système s'écrit : $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$

- L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \end{cases} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- La solution générale est de la forme :

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t=0) = A \cos(\varphi) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = -A\omega_0 \sin(\varphi) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \sin(\varphi) = -\frac{v_0}{A\omega_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 = \left(\frac{v_0}{A\omega_0}\right)^2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{v_0}{\omega_0}}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \cos(\omega_0 t)}$$

Parti B : Mode forcé.

1. L'équation différentielle du mouvement s'écrit sous la forme :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = F_0 \cos(\Omega t) \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\alpha}{2m} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

C'est une équation différentielle inhomogène linéaire, d'un mouvement forcé.

2. La résolution de cette équation en régime permanent est :

$$x_p(t) = A \cos(\Omega t + \varphi) = \text{Réel}[Ae^{j(\Omega t + \varphi)}] \Rightarrow \tilde{x}(t) = A e^{j(\Omega t + \varphi)}$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement et après calcul, on obtient le module de l'amplitude :

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}$$

Et la phase du mouvement comme suit :

$$\tan \varphi = \frac{-2\lambda\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)}$$

Les variations de $A(\Omega)$ sont déterminées par :

$$\frac{dA(\Omega)}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \Omega = \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

Cette pulsation est appelée pulsation de résonance.

3. L'impédance complexe est définie comme suit :

$$\tilde{Z}_{\text{mécanique}} = \frac{F(t)}{v(t)}$$

En remplaçant dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$\tilde{Z}_{\text{mécanique}} = +j\left(m\Omega - \frac{k}{\Omega}\right)$$

4. Pour le système électrique, le résultat est donné comme suit :

$$\tilde{Z}_{\text{électrique}} = \frac{U(t)}{i(t)} \Rightarrow \tilde{Z}_{\text{électrique}} = R + j\left(L\Omega - \frac{1}{C\Omega}\right)$$

5. On conclue donc les équivalences entre le système mécanique et le système électrique comme suit :

$$\begin{cases} \alpha \Leftrightarrow R \\ m \Leftrightarrow L \\ k \Leftrightarrow \frac{1}{C} \end{cases}$$

Exercice 5 : Circuit RLC .

Partie-A :

1. L'énergie magnétique $E_m = T = \frac{1}{2}Li^2$.

2. Loi d'Ohm : $U_{DB}(t) = -Ri(t) \Leftrightarrow i(t) = -\frac{U_{DB}(t)}{R}$.

3. En remplaçant cette dernière équation dans l'énergie magnétique, on trouve : $E_m = T = \frac{1}{2}L \frac{U_{DB}(t)^2}{R^2}$

4. L'énergie totale du circuit en fonction des tensions $U_{AB}(t)$ et $U_{DB}(t)$:

$$E_T = E_m + E_e = T + U = \frac{1}{2}L \frac{U_{DB}(t)^2}{R^2} + \frac{1}{2}CU_{AB}(t)^2$$

Partie-B :

5. Initialement le condensateur est chargé et aucun courant ne circule donc : $E_T(0) = E_e(0)$ et $E_m(0) = 0J$.

On en déduit alors que :

- La courbe-1 est associée à E_T .
- La courbe-2 est associée à E_m .
- La courbe-3 est associée à E_e .

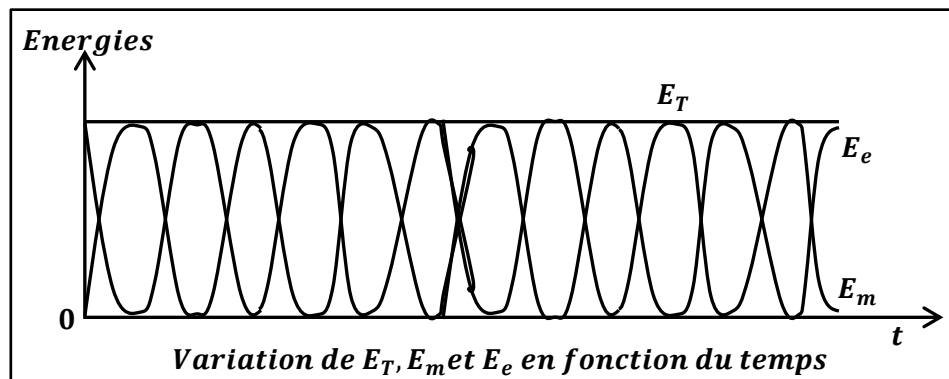
La décroissance de la courbe-1 est due à la perte d'énergie sous forme chaleur, par effet Joule, dans la résistance R .

Partie-C :

6. Lorsque les oscillations sont entretenues l'énergie totale E_T est une constante : $E_T = E_m + E_e = Cte$.

- Initialement le condensateur est chargé et aucun courant ne circule : $\mathbf{E}_T(\mathbf{0}) = \mathbf{E}_e(\mathbf{0})$ et $\mathbf{E}_m(\mathbf{0}) = \mathbf{0J}$.
- Si \mathbf{E}_e augmente alors \mathbf{E}_m diminue et inversement.
- Si \mathbf{E}_e est maximale \mathbf{E}_m est nulle et inversement.

D'où les courbes :

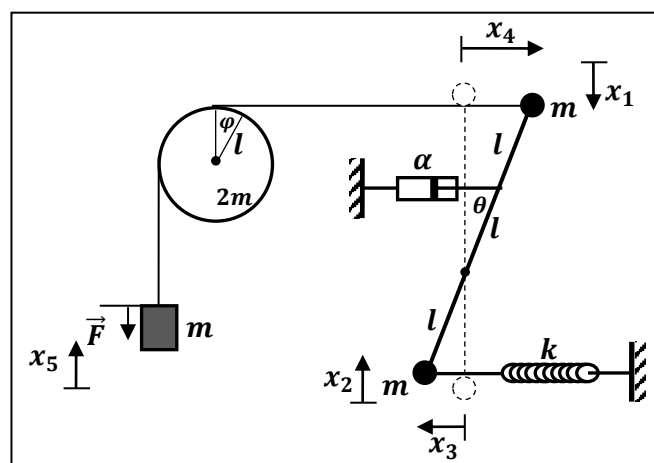


7. Le régime est entretenu car les pertes énergétiques dans la résistance sont compensées par l'apport d'énergie du dispositif d'entretien des oscillations. Les oscillations ne sont plus amorties mais ont une amplitude constante au cours du temps.

Exercice 6 : Mouvement de translation et de rotation.

1. L'énergie potentielle du système en fonction des coordonnées x_i définies à partir de la position d'équilibre :

$$U = \frac{1}{2}k(x_3 + x_0)^2 + mgx_2 - mgx_1 - mgx_5$$



$$\text{Mais : } \begin{cases} x_1 = 2l(1 - \cos\theta) \approx l\theta^2 \\ x_2 = l(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2}l\theta^2 \\ x_3 = l\sin\theta \approx l\theta \\ x_5 = 2l\sin\theta \approx 2l\theta \end{cases} \Rightarrow U \approx \frac{1}{2}k(l\theta + x_0)^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 - mgl\theta^2 - 2mgl\theta \Rightarrow$$

$$U = \frac{1}{2}(kl - mg)l\theta^2 + (kx_0 - 2mg)l\theta + \frac{1}{2}kx_0^2$$

A l'équilibre la dérivée de l'énergie potentielle s'annule $\frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0$, donc :

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = |(kl - mg)l\theta + (kx_0 - 2mg)l|_{\theta=0} = (kx_0 - 2mg) = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{2mg}{k}}$$

On peut simplifier l'expression de l'énergie potentielle :

$$\boxed{U = \frac{1}{2}(kl - mg)l\theta^2 + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

2. L'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}J_{\text{barre}}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{\text{poulie}}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_5^2 = \frac{1}{2}[ml^2 + m(2l)^2]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}2ml^2\right]\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(2l\dot{\theta})^2 \\ &= \frac{5}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + 2ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{9}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

Mais :

$$l\varphi = 2l\sin\theta \Rightarrow l\varphi \approx 2l\theta \Rightarrow l\dot{\varphi} \approx 2l\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\varphi} \approx 2\dot{\theta}$$

Donc :

$$T = \frac{9}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 = \frac{13}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{13}{2}ml^2\dot{\theta}^2}$$

3. Le Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{13}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kl - mg)l\theta^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

La fonction de dissipation est :

$$\boxed{D = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2}$$

L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 2l.F \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] = 13ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] = 13ml^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha l^2\dot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -(kl - mg)l\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow 13ml^2\ddot{\theta} + \alpha l^2\dot{\theta} + (kl - mg)l\theta = F.2l = 2lF_0 \cos\omega t \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{13m}\dot{\theta} + \frac{(kl - mg)}{13ml}\theta = \frac{2F_0}{13ml} \cos\omega t}$$

Solutions des exercices de la série :5

Exercice 1 :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} k & -2k \\ -2k & 2k \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 - 2kx_2 = 0 \dots\dots\dots (1) \\ 2m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - 2kx_1 = 0 \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

- **Calcul des pulsations propres :**

On se base sur l'hypothèse que le système admet des solutions sinusoïdales donc :

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = -\omega^2 x_1 \dots\dots\dots (3) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = -\omega^2 x_2 \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

Remplaçant (3) et (4) dans (1) et (2) :

$$\begin{cases} (k - m\omega^2)x_1 - 2kx_2 = 0 \dots\dots\dots (5) \\ -2kx_1 + 2(k - m\omega^2)x_2 = 0 \dots\dots\dots (6) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} (k - m\omega^2) & -2k \\ -2k & 2(k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow [\sqrt{2}(k - m\omega^2)]^2 - (2k)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (k - m\omega^2) = 2k \\ \text{ou} \\ (k - m\omega^2) = -2k \end{cases}$$

On remplace dans les équations (5) et (6), on obtient :

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{k(\sqrt{2}+2)}{m\sqrt{2}} \\ \text{ou} \\ \omega_2^2 = \frac{k(\sqrt{2}-2)}{m\sqrt{2}} \end{cases}$$

- **Les modes propres :**

➤ **Premier mode :** $\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{k(\sqrt{2}+2)}{m\sqrt{2}} \Rightarrow x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 \Rightarrow \vec{V}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

➤ **Deuxième mode :** $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{k(\sqrt{2}-2)}{m\sqrt{2}} \Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 \Rightarrow \vec{V}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

- **La solution générale est :**

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{2} B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

- **Pour les conditions d'équilibres suivantes :** $x_1(0) = x_0, \dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

$$\begin{cases} x_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{2} B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} A \omega_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{2} B \omega_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

On remplace avec les conditions d'équilibres et on trouve :

$$\begin{cases} x_1(0) = A \sin(\varphi_1) + B \sin(\varphi_2) = x_0 \\ x_2(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} A \sin(\varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{2} B \sin(\varphi_2) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = A \omega_1 \cos(\varphi_1) + B \omega_2 \cos(\varphi_2) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2} A \omega_1 \cos(\varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{2} B \omega_2 \cos(\varphi_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(0) = A \sin(\varphi_1) + B \sin(\varphi_2) = x_0 \dots\dots\dots (7) \\ x_2(0) = -A \sin(\varphi_1) + B \sin(\varphi_2) = 0 \dots\dots\dots (8) \\ \dot{x}_1(0) = A \omega_1 \cos(\varphi_1) + B \omega_2 \cos(\varphi_2) = 0 \dots\dots\dots (9) \\ \dot{x}_2(0) = -A \omega_1 \cos(\varphi_1) + B \omega_2 \cos(\varphi_2) = 0 \dots\dots\dots (10) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (7) + (8): 2B \sin(\varphi_2) = x_0 \\ (7) - (8): 2A \sin(\varphi_1) = x_0 \\ (9) + (10): 2B \omega_2 \cos(\varphi_2) = 0 \\ (9) - (10): 2A \omega_2 \cos(\varphi_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \\ A = B = \frac{x_0}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{x_0}{2} \sin\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{x_0}{2} \sin\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) \\ x_2(t) = \frac{x_0}{2} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \right] \end{cases}$$

Exercice 2 :

$$\text{Mailles (1) et (2)} : \begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + (R_1 + R_3) \dot{q}_1 + \frac{1}{c_1} q_1 = R_3 \dot{q}_2 \\ L_2 \ddot{q}_2 + (R_2 + R_3) \dot{q}_2 + \frac{1}{c_2} q_2 = R_3 \dot{q}_1 \end{cases}$$

$$\text{Mailles (3) et (4)} : \begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_3}\right) q_1 = \frac{1}{c_3} q_2 \\ L_2 \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right) q_2 = \frac{1}{c_3} q_1 \end{cases}$$

$$\text{Mailles (5) et (6)} : \begin{cases} (L_1 + L_3) \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{c_1} q_1 = L_3 \ddot{q}_2 \\ (L_2 + L_3) \ddot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{c_2} q_2 = L_3 \ddot{q}_1 \end{cases}$$

Exercice 3 :

1. Le lagrangien du système :

- L'énergie cinétique du système : $T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$.
- L'énergie potentielle du système : $U = U_k + U_{k'} + U_c = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k' (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} C x_2^2$.
- Donc le Lagrangien est : $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k' (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} C x_2^2$.

2. Mettons le Lagrangien sous la forme : $L = \frac{1}{2} m [(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2 - 2C x_1 x_2)]$.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k' (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} C x_2^2 \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{2} m \left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{m} (x_1^2 + x_2^2) - \frac{k'}{m} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 x_1) \right] \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{2} m \left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{(k + k')}{m} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{2k'}{m} x_2 x_1 \right] \\ \Rightarrow L &= \frac{1}{2} m \left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{(k + k')}{m} \left[(x_1^2 + x_2^2) - \frac{2k'}{(k + k')} x_2 x_1 \right] \right] \Rightarrow \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{(k + k')}{m} \\ C = \frac{k'}{(k + k')} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Les équations du mouvement :

On écrit les deux équations différentielles du mouvement en fonction des coordonnées généralisées.

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrivent le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m \dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right] = m \ddot{x}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = -m \omega_0^2 (x_1 - C x_2) \end{cases} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m \dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] = m \ddot{x}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -m \omega_0^2 (x_2 - C x_1) \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = C \omega_0^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = C \omega_0^2 x_1 \end{cases} \dots \dots (1)$$

4. Les pulsations propres du système :

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques donc :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = -\omega^2 x_1 \\ x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = -\omega^2 x_2 \end{cases}$$

On remplace dans (1) :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) x_1 - C \omega_0^2 x_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) x_2 - C \omega_0^2 x_1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{pmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & -C \omega_0^2 \\ -C \omega_0^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & -C \omega_0^2 \\ -C \omega_0^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0 &\Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (C \omega_0^2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - C} \\ \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + C} \end{cases} \end{aligned}$$

5. Solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec les conditions initiales $x_1(0) = x_0, \dot{x}_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$:

- Calcul des modes d'oscillations :

$$\begin{cases} \omega = \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1-C} \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \omega = \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1+C} \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- La solution générale est :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

- Les conditions initiales $x_1(0) = x_0, \dot{x}_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0$:

$$\begin{cases} x_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -A\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B\omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dot{x}_2(t) = -A\omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(0) = A \cos(\varphi_1) + B \cos(\varphi_2) = x_0 \\ x_2(0) = A \cos(\varphi_1) - B \cos(\varphi_2) = 0 \\ \dot{x}_1(0) = -A\omega_1 \sin(\varphi_1) - B\omega_2 \sin(\varphi_2) = 0 \\ \dot{x}_2(0) = -A\omega_1 \sin(\varphi_1) + B\omega_2 \sin(\varphi_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cos(\varphi_1) + B \sin(\varphi_2) = x_0 \dots \dots \dots (1) \\ A \sin(\varphi_1) - B \sin(\varphi_2) = 0 \dots \dots \dots (2) \\ A\omega_1 \cos(\varphi_1) + B\omega_2 \cos(\varphi_2) = 0 \dots \dots \dots (3) \\ -A\omega_1 \cos(\varphi_1) + B\omega_2 \cos(\varphi_2) = 0 \dots \dots \dots (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2) + (4): \sin(\varphi_1) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = k\pi \\ (4) - (2): \sin(\varphi_2) = 0 \Rightarrow \varphi_2 = k\pi \end{cases} \Rightarrow \text{si } k = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1) \Rightarrow A + B = x_0 \\ (3) \Rightarrow A - B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{x_0}{2} \\ B = \frac{x_0}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{x_0}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \\ x_2(t) = \frac{x_0}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \end{cases}$$

Exercice 4 :

- Equations différentielles du mouvement en fonction des variables $y_1(t)$ et $y_2(t)$:

- L'énergie cinétique du système : $T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$.
- L'énergie potentielle du système : $U = U_k + U_s = \frac{1}{2} k y_1^2 + \frac{1}{2} k y_2^2$.
- La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2} \alpha [\dot{y}_1 - \dot{y}_2]^2$
- Donc le Lagrangien est : $L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 - \frac{1}{2} k y_1^2 - \frac{1}{2} k y_2^2$
- Formalisme de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = m_1 \dot{y}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right] = m_1 \ddot{y}_1 \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} = \alpha [\dot{y}_1 - \dot{y}_2] \\ \frac{\partial L}{\partial y_1} = -k y_1 \end{cases} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} - \frac{\partial L}{\partial y_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} = m_2 \dot{y}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right] = m_2 \ddot{y}_2 \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} = -\alpha [\dot{y}_1 - \dot{y}_2] \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} = -k y_2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha [\dot{y}_1 - \dot{y}_2] + k y_1 = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 - \alpha [\dot{y}_1 - \dot{y}_2] + k y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + \alpha \dot{y}_1 + k y_1 = \alpha \dot{y}_2 \\ m_2 \ddot{y}_2 + \alpha \dot{y}_2 + k y_2 = \alpha \dot{y}_1 \end{cases}$$

- Condition : $m_1 = m_2 = m$.

$$m_1 = m_2 = m \Rightarrow \begin{cases} m \ddot{y}_1 + \alpha \dot{y}_1 + k y_1 = \alpha \dot{y}_2 \dots \dots \dots (1) \\ m \ddot{y}_2 + \alpha \dot{y}_2 + k y_2 = \alpha \dot{y}_1 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) - (2) \Rightarrow m(\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2) + 2\alpha(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k(y_1 - y_2) = 0 \dots \dots \dots (3) \\ (1) + (2) \Rightarrow m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + k(y_1 + y_2) = 0 \dots \dots \dots (4) \end{cases}$$

$$\text{On pose : } Y_2 = y_1 + y_2, Y_1 = y_1 - y_2 \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{Y}_1 + 2\alpha\dot{Y}_1 + kY_1 = 0 \\ m\ddot{Y}_2 + kY_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{Y}_1 + \frac{2\alpha}{m}\dot{Y}_1 + \frac{k}{m}Y_1 = 0 \\ \ddot{Y}_2 + \frac{k}{m}Y_2 = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 :

1. Le Lagrangien du système :

La masse M : $x(t) \rightarrow \dot{x}(t)$.

Le pendule (m, l) : $\begin{cases} x + l\sin\theta \\ -l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow v_m: \begin{cases} \dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta \\ l\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow v_m^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta \Rightarrow v_m^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie cinétique du système : $T = T_M + T_m = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2)$.
- L'énergie potentielle du système : $U = U_m = mgl(1 - \cos\theta)$.
- Le Lagrangien : $L = T - U = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) - mgl(1 - \cos\theta)$.

2. On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrivent le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right] = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{cases} \\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml\dot{x}\cos\theta + ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] = ml\ddot{x}\cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + ml^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mgl\sin\theta \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = 0 \dots \dots (1) \\ ml\ddot{x}\cos\theta + ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{m}{(M+m)}(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l}\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

3. Dans le cas des petites oscillations ($\theta \ll 1$) :

$$\begin{cases} \cos\theta \approx 1 \\ \sin\theta \approx \theta \\ \dot{\theta}^2\sin\theta \approx \dot{\theta}^2\theta \approx 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{m}{(M+m)}\ddot{\theta} = 0 \dots (3) \\ \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}}{l} + \frac{g}{l}\theta = 0 \dots \dots (4) \end{cases}$$

$$(3) - (4) \rightarrow \frac{m}{(M+m)}\ddot{\theta} - \ddot{\theta} - \frac{g}{l}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g(M+m)}{Ml}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

4. La valeur de ω_0 est : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g(M+m)}{Ml}}$.

5. Les solutions des équations différentielles du système :

- Ecriture de $\theta(t)$: $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \Rightarrow \theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.
- Ecriture de $x(t)$: $\ddot{x} = -\frac{ml}{(M+m)}\ddot{\theta} = -\frac{ml}{(M+m)}[-\omega_0^2\theta] = \frac{ml\omega_0^2}{(M+m)}\theta(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{ml\omega_0}{(M+m)}[A\sin(\omega_0 t + \varphi)] + B \Rightarrow x(t) = -\frac{ml}{(M+m)}[A\cos(\omega_0 t + \varphi)] + Bt + C \dots \dots \dots (5)$
- Calcul des coefficients A et φ :

$$\begin{cases} \theta(0) = A\cos\varphi = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = -A\omega_0\sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = \theta_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$$

- Calcul des coefficients B et C :

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ A = \theta_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = -\frac{ml\theta_0}{(M+m)}\cos(\omega_0 t) + Bt + C \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{ml\theta_0}{(M+m)}\sin(\omega_0 t) + B$$

$$\begin{cases} x(0) = -\frac{ml\theta_0}{(M+m)} + C = x_0 \Rightarrow C = x_0 + \frac{ml\theta_0}{(M+m)} \\ \dot{x}(0) = B = v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{ml\theta_0}{(M+m)}\cos(\omega_0 t) + v_0 t + x_0 + \frac{ml\theta_0}{(M+m)}$$

- Donc la solution générale est :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{ml\theta_0}{(M+m)}[1 - \cos(\omega_0 t)] \\ \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

Solutions des exercices de la série :6

Exercice 1 : Couplage d'un disque et une masse.

1. Le Lagrangien du système :

- L'énergie cinétique du système :

$$T = T_M + T_m = \left[\frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_{/O} \dot{\theta}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 \right] = \left[\frac{1}{2} M \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \dot{\theta}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} M + m \right) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2) \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} M + m \right) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2)}$$

- L'énergie potentielle du système :

$$U = U_K + U_k + U_M = \frac{1}{2} K (2x_1 - S)^2 + \frac{1}{2} k (x_1 + x_2)^2 + mgl (1 - \cos \varphi)$$

$$\approx \frac{1}{2} K (2x_1 - S)^2 + \frac{1}{2} k (x_1 + x_2)^2 + mgl \left(\frac{\varphi^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} K (2x_1 - S)^2 + \frac{1}{2} k (x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2} m \frac{g}{l} x_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2} K (2x_1 - S)^2 + \frac{1}{2} k (x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2} m \frac{g}{l} x_2^2}$$

- La fonction de dissipation du système :

$$D = \frac{1}{2} \alpha (2\dot{x}_1)^2 = \frac{1}{2} \alpha (4\dot{x}_1^2) \Rightarrow \boxed{D = \frac{1}{2} \alpha (4\dot{x}_1^2)}$$

- Le Lagrangien du système :

$$L = T - U = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} M + m \right) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2) - \frac{1}{2} K (2x_1 - S)^2 - \frac{1}{2} k (x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{2} m \frac{g}{l} x_2^2$$

Puisque : $3M = 2m, 4K = k = \frac{mg}{l}$

$$\boxed{L = m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{1}{2} m\dot{x}_2^2 - kx_1^2 - kx_1x_2 - kx_2^2 + \frac{1}{2} Kx_1S - \frac{1}{8} ks^2}$$

2. Equations différentielles en $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right] = 2m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = 4\alpha\dot{x}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = -2kx_1 - kx_2 + \frac{1}{2}KS \end{array} \right. \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] = m\ddot{x}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -kx_1 - 2kx_2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + 4\alpha\dot{x}_1 + 2kx_1 + kx_2 - \frac{1}{2}KS = 0 \\ m\ddot{x}_2 + kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + 4\alpha\dot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = \frac{1}{2}KS = \frac{K}{2}S_0 \cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_2 + kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} 2m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + 4\alpha\dot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = \frac{1}{2}KS = \frac{K}{2}S_0 \cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_2 + kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{array} \right.}$$

3. Equations différentielles en $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + 4\alpha\dot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = \frac{1}{2}K\tilde{S} = \frac{K}{2}S_0 e^{j\Omega t} \\ m\ddot{x}_2 + kx_1 + 2kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[4\alpha + 2j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) \right] \tilde{x}_1 + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) \tilde{x}_2 = \frac{K}{2}S_0 e^{j\omega t} \\ j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right) \tilde{x}_1 + j\left(m\omega - \frac{2k}{\omega}\right) \tilde{x}_2 = 0 \end{cases}$$

4. Pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$:

a. $\begin{cases} \tilde{x}_1 = \frac{1}{4\alpha} \frac{K}{2} S_0 e^{j\omega t} \\ \tilde{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{à cette fréquence la tige reste verticale.}$

b. L'impédance d'entrée est : $Z_e = \frac{\tilde{F}}{\tilde{x}_1} = 4\alpha$.

5. Pour $\omega = \omega_1 = \sqrt{2k/m}$:

a. $\begin{cases} \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 = \frac{1}{\left(m\omega_1 - \frac{k}{\omega_1}\right)^2} \frac{K}{2} S_0 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \text{le cylindre ne se déplace pas.}$

b. L'impédance d'entrée est : $Z_e = \frac{\tilde{F}}{\tilde{x}_1}$ est infinie.

Exercice 2 : Analogie d'un système mécanique et électrique.

1. Equations différentielles du système oscillatoire mécanique de la Figure-1 :

- L'énergie cinétique du système : $T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$.
- L'énergie potentielle du système : $U = U_k = \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$.
- La fonction de dissipation du système : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2$.
- Le Lagrangien du système : $L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$.
- Les équations de Lagrange : $\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F_{x_1} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$.
- Equations différentielles du système :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right] + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F_{x_1} = F(t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right] = m\ddot{x}_1 \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = \alpha\dot{x}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - x_2) \end{cases} \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] = m\ddot{x}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = k(x_1 - x_2) \end{cases} \end{cases} \quad X$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = F(t) \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\tilde{x}}_1 + \frac{\alpha}{m}\dot{\tilde{x}}_1 + \frac{k}{m}(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2) = \frac{F_0}{m} e^{j\Omega t} \\ \ddot{\tilde{x}}_2 + \frac{k}{m}(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = 0 \end{cases}$$

2. Les solutions complexes $\tilde{x}_1(t)$ et $\tilde{x}_2(t)$ s'écrivent comme :

$$\begin{cases} \tilde{x}_1(t) = X_1 e^{j(\Omega t + \varphi)} = \tilde{X}_1 e^{j\Omega t} \\ \tilde{x}_2(t) = X_2 e^{j(\Omega t + \varphi)} = \tilde{X}_2 e^{j\Omega t} \end{cases}$$

En remplaçant ces solutions dans le système d'équations :

$$\begin{cases} \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\frac{\alpha}{m}\Omega \right) \tilde{X}_1 - \frac{k}{m} \tilde{X}_2 = \frac{F_0}{m} \\ -\frac{k}{m} \tilde{X}_1 + \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} \right) \tilde{X}_2 = 0 \end{cases}$$

Le système matriciel est donné par :

$$\begin{pmatrix} \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\frac{\alpha}{m}\Omega \right) & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_0}{m} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\frac{\alpha}{m}\Omega \right) & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} \right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\frac{\alpha}{m}\Omega \right)^2 - \left(\frac{k}{m} \right)^2 = 0$$

3. Si $\alpha = 0$, le déterminant s'écrit :

$$\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} \right)^2 - \left(\frac{k}{m} \right)^2 = 0 \Rightarrow \Omega^4 - \frac{2k}{m} \Omega^2 = 0 \Rightarrow \Omega^2 \left(\Omega^2 - \frac{2k}{m} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = \Omega_R \end{cases}$$

4. Equations différentielles du système oscillatoire électrique de la Figure-2 :

D'après la loi des mailles :

$$\begin{cases} u_L + u_R + u_C = U(t) \\ u_L + u_C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = U(t) \\ L \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C} \int (i_1 - i_2) dt = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L\ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = U(t) \\ L\ddot{q}_2 - \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = 0 \end{cases}$$

5. Oui il existe une analogie, on constate :

$$\begin{cases} x \rightarrow L \\ \alpha \rightarrow R \\ m \rightarrow L \\ k \rightarrow \frac{1}{C} \\ F(t) \rightarrow U(t) \\ \Omega_R = \sqrt{\frac{2k}{m}} \rightarrow \Omega_R = \sqrt{\frac{2}{LC}} \end{cases}$$

Exercice 3 : Circuit équivalent.

1. Energie cinétique :

$$T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$$

Puisque : $R\theta = x_1$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$$

Energie potentielle :

$$\begin{aligned} U &= U_{m_1} + U_{m_2} + U_k = -m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2} k (y_1 + y_0 - l\theta)^2 \\ &\approx -m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2} k (y_1 + y_0 - y_2)^2 \text{ puisque: } y_2 = l \sin \theta \approx l\theta \\ \Rightarrow U &\approx -m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + \frac{1}{2} k (y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{2} k y_0^2 + k (y_1 - y_2) y_0 \\ &\approx [-m_1 g + k y_0] y_1 + [m_2 g - k y_0] y_2 + \frac{1}{2} k (y_1 - y_2)^2 + \frac{1}{2} k y_0^2 \end{aligned}$$

Condition d'équilibre :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial U}{\partial y_1} \right|_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = [-m_1 g + k(y_0 + y_1 - y_2)]|_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0 \rightarrow \theta=0}} = 0 \Rightarrow -m_1 g + k y_0 = 0 \\ \left. \frac{\partial U}{\partial y_2} \right|_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = [m_2 g - k(y_0 + y_1 - y_2)]|_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = 0 \Rightarrow m_2 g - k y_0 = 0 \end{cases}$$

La condition d'équilibre simplifie l'expression de l'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2} k (y_1 - y_2)^2 + Cte$$

Fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2} \alpha_1 (l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \dot{y}_2^2 \approx \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \dot{y}_2^2 = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) \dot{y}_2^2 \Rightarrow D = \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) \dot{y}_2^2$$

2. Lagrangien du système :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 - \frac{1}{2} k (y_1 - y_2)^2 + Cte$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial L}{\partial y_1} \right) = F \\ \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}_2} - \frac{\partial L}{\partial y_2} \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + k y_1 - k y_2 = F \\ m_2 \ddot{y}_2 + k y_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \dot{y}_2 - k y_1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

3. Utilisons la représentation complexe pour écrire (1) en termes des vitesses complexes \bar{v}_1 et \bar{v}_2 :

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \rightarrow \tilde{F}(t) = F_0 e^{j\Omega t}$$

$$\begin{cases} y_1(t) = A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) \rightarrow \tilde{y}_1(t) = A_1 e^{j(\Omega t + \varphi_1)} = \tilde{A}_1 e^{j\Omega t} \\ \tilde{y}_1(t) = j\Omega \tilde{y}_1(t) \Rightarrow \tilde{y}_1 = \frac{\tilde{v}_1}{j\Omega} \\ \tilde{y}_1(t) = j\Omega \tilde{v}_1(t) \\ y_2(t) = A_2 \cos(\Omega t + \varphi_2) \rightarrow \tilde{y}_2(t) = A_2 e^{j(\Omega t + \varphi_2)} = \tilde{A}_2 e^{j\Omega t} \\ \tilde{y}_2(t) = j\Omega \tilde{y}_2(t) \Rightarrow \tilde{y}_2 = \frac{\tilde{v}_2}{j\Omega} \\ \tilde{y}_2(t) = j\Omega \tilde{v}_2 \end{cases}$$

(1) Devient :

$$\begin{cases} m_1 \tilde{y}_1 + k \tilde{y}_1 - k \tilde{y}_2 = \tilde{F} \\ m_2 \tilde{y}_2 + k \tilde{y}_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) \tilde{y}_2 - k \tilde{y}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(j m_1 \Omega + \frac{k}{j\Omega} \right) \tilde{v}_1 - \frac{k}{j\Omega} \tilde{v}_2 = \tilde{F} \\ \left(j m_2 \Omega + \frac{k}{j\Omega} + \alpha_1 + \alpha_2 \right) \tilde{v}_2 - \frac{k}{j\Omega} \tilde{v}_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Posons : $j m_1 \Omega = \tilde{Z}_1$, $j m_2 \Omega + \alpha_1 + \alpha_2 = \tilde{Z}_2$, $\frac{k}{j\Omega} = \tilde{Z}_0$.

Le système d'équations (2) s'écrit :

$$\begin{cases} (\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_0) \tilde{v}_1 - \tilde{Z}_0 \tilde{v}_2 = \tilde{F} \\ (\tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_0) \tilde{v}_2 - \tilde{Z}_0 \tilde{v}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{F} = \left(\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_0 - \frac{\tilde{Z}_0^2}{\tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_0} \right) \tilde{v}_1 = \left(\tilde{Z}_1 + \frac{\tilde{Z}_0 \tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_0} \right) \tilde{v}_1$$

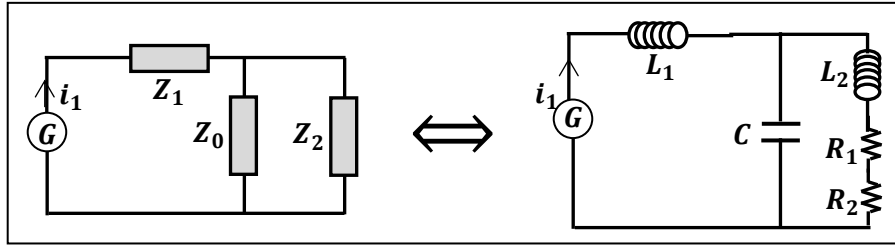
L'impédance d'entrée est donc :

$$\tilde{Z}_e = \frac{\tilde{F}}{\tilde{v}_1} = \tilde{Z}_1 + \frac{\tilde{Z}_0 \tilde{Z}_2}{\tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_0} = \tilde{Z}_1 + (\tilde{Z}_0 // \tilde{Z}_2) \Rightarrow \boxed{\tilde{Z}_e = \tilde{Z}_1 + (\tilde{Z}_0 // \tilde{Z}_2)} \quad (3)$$

4. Grace à l'analogie de Maxwell :

$$\begin{cases} m_1 \rightarrow L_1 \\ m_2 \rightarrow L_2 \\ \alpha_1 \rightarrow R_1 \\ \alpha_2 \rightarrow R_2 \\ k \rightarrow \frac{1}{C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{Z}_1 \rightarrow \text{bobine}(L_1) \\ \tilde{Z}_2 \rightarrow \text{bobine}(L_2) + \text{résistance}(R_1) + \text{résistance}(R_2) \\ \tilde{Z}_0 \rightarrow \text{condensateur}(C) \end{cases}$$

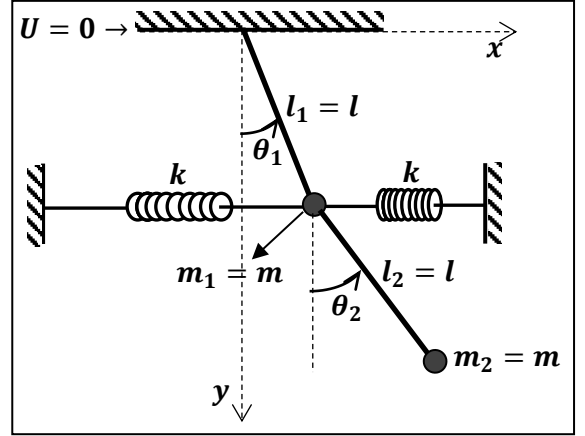
D'après (3), on a le circuit électrique équivalent :



Exercice 4 : Double pendule.

1. Soit le premier pendule de longueur l_1 et de masse m_1 , puis le deuxième pendule de longueur l_2 et de masse m_2 .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = l_1 \cos \theta_1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{y}_1 = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \end{cases} \\ \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ U_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 & \\ \Rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ U_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 \end{cases} & \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{y}_2 = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{cases} \\ \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) &= \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\ U_2 = -m_2 g [l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2] & \\ \Rightarrow \begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\ U_2 = -m_2 g [l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2] \end{cases} & \end{aligned}$$

$$\text{Si : } \begin{cases} m_1 = m_2 = m \\ l_1 = l_2 = l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 \\ U_1 = -m g l \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_2 = \frac{1}{2} m l^2 [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\ U_2 = m g l \left[\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}\right] \end{cases}$$

Soit au total :

$$\begin{aligned} \begin{cases} T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\ U = U_1 + U_2 + 2U_k = -m g l \left(1 - \frac{\theta_1^2}{2}\right) + m g l \left[\frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}\right] + 2 \left[\frac{1}{2} k l^2 \theta_1^2\right] &= \frac{1}{2} m g l [2\theta_1^2 + \theta_2^2] + k l^2 \theta_1^2 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)] \\ U = \frac{1}{2} m g l [2\theta_1^2 + \theta_2^2] + k l^2 \theta_1^2 \end{cases} & \end{aligned}$$

Puisque $\theta_1 \ll 1$ et $\theta_2 \ll 1$ on a donc :

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) \cong \cos 0 = 1 \quad \begin{cases} T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m l^2 [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2] \\ U = \frac{1}{2} m g l [2\theta_1^2 + \theta_2^2] + k l^2 \theta_1^2 \end{cases}$$

2. La fonction de Lagrange est :

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)] - \frac{1}{2}mgl[2\theta_1^2 + \theta_2^2] + kl^2\theta_1^2$$

Ecrivons les deux équations de Lagrange pour les deux coordonnées généralisées θ_1 et θ_2 .

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ml^2[2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] + mgl(2\theta_1) + 2kl^2\theta_1 = 0 \\ ml^2[\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1] + mgl\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l[2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] + \left(2g + \frac{2kl}{m}\right)\theta_1 = 0 \\ l[\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1] + g\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Avec les notations suivantes : $\omega_{01}^2 = \frac{g}{l}$; $\omega_{02}^2 = \frac{k}{m}$, les deux équations s'écrivent finalement :

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + (2\omega_{01}^2 + 2\omega_{02}^2)\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \omega_{01}^2\theta_2 = 0 \end{cases}$$

3. Pour les cas où les raideurs latérales sont absentes ($k = 0$), on obtient :

$$\begin{cases} l[2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2] + 2g\theta_1 = 0 \\ l[\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1] + g\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\omega_0^2\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Soit en considérant des solutions complexes :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \tilde{\theta}_1(t) = A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} \\ \theta_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \tilde{\theta}_2(t) = A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \tilde{A}_2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + 2\omega_0^2\theta_1 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2\omega_0^2 - 2\omega^2)\tilde{A}_1 - \omega^2\tilde{A}_2 = 0 \\ -\omega^2\tilde{A}_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)\tilde{A}_2 = 0 \end{cases}$$

Pour avoir des résultats non nuls il faut que :

$$\begin{vmatrix} (2\omega_0^2 - 2\omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^4 = [\sqrt{2}(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega^2][\sqrt{2}(\omega_0^2 - \omega^2) + \omega^2] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}\omega_0^2 = (2 - \sqrt{2})\omega_0^2 \\ \omega_2^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\omega_0^2 = (2 + \sqrt{2})\omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\omega_0^2 \\ \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})\omega_0^2 \end{cases}$$

Les vecteurs propres correspondants :

$$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}; \vec{V}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

4. La masse 2 bouge plus que la masse 1.

Pour le cas d'une condition limite de type rigide sur le premier pendule ($k \rightarrow \infty$), on obtient : $\theta_1 = 0$, et il ne reste que la deuxième équation sous la forme :

$$l\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0$$

Il s'agit donc du cas d'un unique pendule.

5. Dans le cas général, l'équation aux pulsations propres s'écrit :

$$\begin{vmatrix} (2\omega_{01}^2 + 2\omega_{02}^2 - 2\omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & (\omega_{01}^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = (2\omega_{01}^2 + 2\omega_{02}^2 - 2\omega^2)(\omega_{01}^2 - \omega^2) - \omega^4 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^4 - 2(2\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)\omega^2 + 2\omega_{01}^2(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = (2\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^2 - 2\omega_{01}^2(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) = 2\omega_{01}^2\omega_{02}^2 + 2\omega_{01}^4 + \omega_{02}^4$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = (2\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \pm \sqrt{2\omega_{01}^2\omega_{02}^2 + 2\omega_{01}^4 + \omega_{02}^4}$$

- Si ($k = 0$) $\Rightarrow \omega_{02}^2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = 2\omega_{01}^2 \pm \sqrt{2}\omega_0^2$
- Lorsque $\omega_{02}^2 = \omega_{01}^2(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\omega_{1,2}^2 &= 2\omega_{01}^2 + \omega_{01}^2(1 + \varepsilon) \pm \sqrt{2\omega_{01}^4(1 + \varepsilon) + \omega_{01}^4(1 + \varepsilon)^2 + 2\omega_{01}^4} \\
&= 3\omega_{01}^2 + \varepsilon\omega_{01}^2 \pm \sqrt{5\omega_{01}^4 + 4\omega_{01}^4\varepsilon} \approx 3\omega_{01}^2 + \varepsilon\omega_{01}^2 \pm \sqrt{5}\left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon\right) \\
&\Rightarrow \boxed{\omega_{1,2}^2 = (3 \pm \sqrt{5})\omega_{01}^2 + \varepsilon\omega_{01}^2\left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}
\end{aligned}$$

6. Pour $\varepsilon = 0$, $\omega_{02}^2 = \omega_{01}^2 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = (3 \pm \sqrt{5})\omega_{01}^2 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = 5,22\omega_{01}^2 \\ \omega_2^2 = 0,76\omega_{01}^2 \end{cases}$

Résultats à comparer avec celui du cas sans raideur latérale :

$$\omega_{1,2}'^2 = (2 \pm \sqrt{2})\omega_{01}^2 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1'^2 = 3,41\omega_{01}^2 \\ \omega_2'^2 = 0,58\omega_{01}^2 \end{cases}$$

Les nouvelles pulsations sont plus élevées que les précédentes, du fait de la contrainte mécanique supplémentaire en termes de déplacement, résultat que l'on trouve bien entendu sur les vecteurs propres associés.

$$\begin{cases} \Delta\omega_{1,2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = 6,87 \\ \Delta\omega_{1,2}' = \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 5,86 \end{cases}$$

Solutions des exercices de la série :7

Exercice-1 :

1. La célérité d'une onde s'exprime en :
 - b. Mètre par seconde.
5. La longueur d'onde d'une onde sinusoïdale :
 - a. Est la distance parcourue pendant une période.
3. L'onde sonore est une onde de pression. Cela signifie que :
 - b. La grandeur physique perturbée est la pression.
4. Si on absorbe l'énergie d'une onde :
 - c. Elle disparaît.
5. La double périodicité fait référence à :
 - a. Une onde sinusoïdale.
6. Le retard :
 - c. Augmente si on est plus éloigné de la source.
7. Une onde est mécanique :
 - b. Parce qu'elle nécessite un milieu pour se propager.

Exercice-2 :

Soit $+x$ pris dans la direction de l'entrée du port, et h la hauteur des vagues au-dessus du niveau moyen de l'eau.

L'expression de h est : $h(x, t) = h_0 \cos(\omega t - kx)$

L'amplitude, ou hauteur maximale h_0 n'est pas spécifiée, mais nous pouvons déterminer les autres grandeurs.

Le nombre d'onde : $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3,0} = 2,1 \text{ m}^{-1}$

La fréquence est de 50 crêtes par minute : $f = \frac{50}{60} = 0,83 \text{ s}^{-1}$

La pulsation est donc : $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 0,83 = 5,2 \text{ rad/s}$

La vitesse est donnée par : $v = \lambda f = 3,0 \cdot 0,83 = 2,5 \text{ m/s}$

L'équation des vagues est finalement : $h(x, t) = h_0 \cos(5,2t - 2,1x)$

Important : les équations ci-dessus, supposent que $y = 0$ en $x = 0$ et à $t = 0$. Ce ne sera pas le cas général. Il faudra alors introduire une constante de phase φ . On obtient :

$$\begin{cases} y = A \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \\ y = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\omega t \pm kx + \varphi) \\ y = A \cos(\omega t \pm kx + \varphi) \end{cases} \text{ avec } \begin{array}{l} \text{Signe - si le déplacement vers le sens des } x > 0 \\ \text{Signe + si le déplacement vers le sens des } x < 0 \end{array}$$

Exercice-3 :

- a. L'équation de l'onde est :

$$y(x, t) = 0,05 \cos \left[\frac{\pi}{2} (40t - 10x) - \frac{\pi}{4} \right] = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\omega t - kx + \varphi) \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = 5\pi \Rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$$

La pulsation est : $\omega = 2\pi f = 20\pi \Rightarrow f = 10 \text{ Hz}$

La vitesse de propagation de l'onde est : $v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = 4 \text{ m/s}$ dans le sens des x positif.

- b. Pour obtenir la vitesse et l'accélération de la particule, nous allons dériver **par rapport au temps** (c'est-à-dire que l'on considère x comme **constant**) :

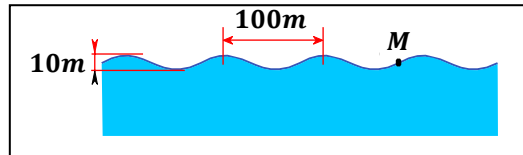
$$\begin{cases} v = \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{x \text{ constant}} = y'(x = cst, t) = -(20\pi) \cdot 0,05 \sin \left[\frac{5\pi}{2} - 20\pi \cdot t - \frac{\pi}{4} \right] = 2,22 \text{ m/s} \\ \gamma = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x \text{ constant}} = y''(x = cst, t) = -(20\pi)^2 \cdot 0,05 \cos \left[\frac{5\pi}{2} - 20\pi \cdot t - \frac{\pi}{4} \right] = 140 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = y'(x = cst, t = 0,05) = -(20\pi) \cdot 0,05 \sin \left[\frac{5\pi}{2} - 20\pi \cdot 0,05 - \frac{\pi}{4} \right] \\ \gamma = y''(x = cst, t = 0,05) = -(20\pi)^2 \cdot 0,05 \cos \left[\frac{5\pi}{2} - 20\pi \cdot 0,05 - \frac{\pi}{4} \right] = 140 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

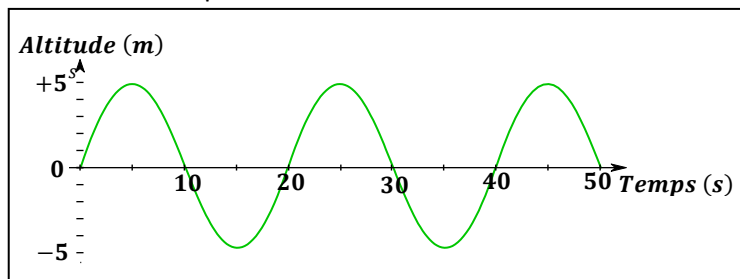
$$\Rightarrow \begin{cases} v = y'(x = cst, t = 0,05) = -(20\pi) \cdot 0,05 \sin \left[\frac{5\pi}{4} \right] = 2,22 \text{ m/s} \\ \gamma = y''(x = cst, t = 0,05) = -(20\pi)^2 \cdot 0,05 \cos \left[\frac{5\pi}{4} \right] = 140 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

Exercice-4 :

- a. L'amplitude est la moitié de l'amplitude crête à crête, donc ici, la moitié de la hauteur de la houle, donc **5m**.
b. A l'instant t :



- c. Altitude de M en fonction du temps :



d. $\lambda = vT \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T} = \frac{100 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 5 \text{ m.s}^{-1}$

Exercice-5 :

L'onde transversale, de forme sinusoïdale, se propage à **40 cm/s** vers la droite. L'analyse de la figure permet d'obtenir les autres données nécessaires.

- a. Comme $\lambda = 4\text{cm}$, on obtient : $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{0,4}{0,04} = 10\text{Hz}$.
b. La phase à une position quelconque de l'onde est fixée par $2\pi \frac{x}{\lambda}$. Si la distance entre deux points est $\Delta x = 2,5\text{cm}$, la variation de phase entre ces deux points est donnée par :

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi \frac{2,5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-2}} = 3,93\text{rad}$$

- c. La phase à un instant quelconque est fixée par $2\pi \frac{t}{T}$ et la période de l'onde est $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{10} = 0,1\text{s}$. En un point donné, si la variation de phase est $\Delta\varphi = 60^\circ \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = 1,047\text{rad}$, le temps écoulé est :

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T} \Rightarrow \Delta t = \frac{T\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{0,1 \cdot 1,047}{2\pi} = 0,0167\text{s}$$

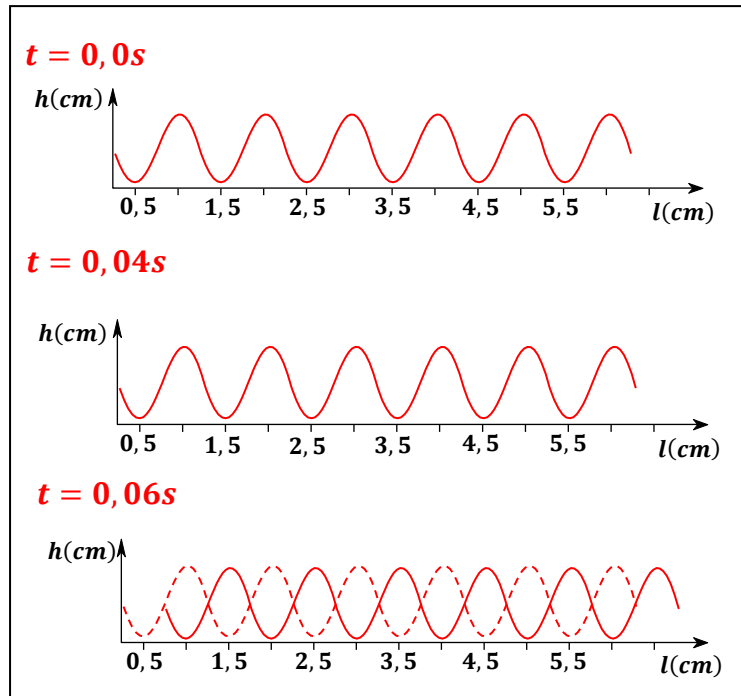
- d. Chaque point de la corde subit un mouvement harmonique simple. Nous savons que lorsque la position d'une particule est nulle la vitesse est maximale et vaut $v = \pm\omega A$ (il suffit de dériver y en fonction de t , x étant constant. On obtient un cosinus dont les extrémités valent ± 1) comme l'onde se déplace vers la droite, P se déplace vers le bas à l'instant représenté, et la vitesse est donc négative.

Donc : $v = -\omega A = -\frac{2\pi}{T} A = -\frac{2\pi}{0,1} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = -1,26 \text{ m/s}$

Exercice-6 :

- a. En prenant plusieurs périodes, on améliore la précision de mesure car on calcule une moyenne.
b. Entre 11 crêtes il y a 10 vagues, donc $10\lambda = 10,1 \text{ cm} \Rightarrow \lambda = 1,01 \text{ cm}$.
c. On observe qu'entre deux creux de vagues, il y a toujours **1,0 cm**, c'est bien la longueur d'onde.
d. L'amplitude crête à crête est de **0,5 cm**, donc l'amplitude est la moitié soit **0,25 cm**.

- e. La fréquence $f = \frac{1}{T} = 25 \text{ Hz} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = 0,04 \text{ s}$. La date $t_1 = 0,04 \text{ s}$ correspond donc à une période complète, on est en phase avec l'onde à la date initiale. La date $t_2 = 0,06 \text{ s}$ correspond à $1,5T$, on est en opposition de phase par rapport à la date initiale.
- f. $\lambda = vT \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow v = \lambda f = 1,01 \cdot 10^{-2} \cdot 25 = 0,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
- g. Si la profondeur augmente, alors la célérité augmente et à fréquence constante, la longueur d'onde augmente.



Solutions des exercices de la série :8

Exercice-1 :

1. Chaque point de la corde effectue des oscillations verticales dont la période est $T = 250 \text{ ms}$. Seul le point de fixation sur le mur reste immobile.

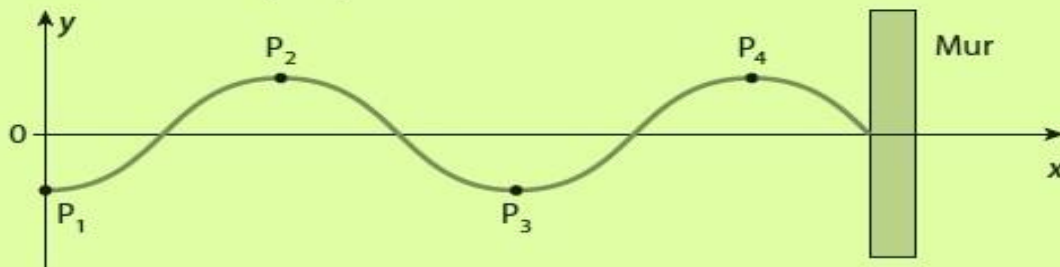
2. On a $v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{3,2 \text{ m}}{2,1 \text{ s}} = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

3. a. On lit sur le graphique $\frac{\lambda}{4} = 0,10 \text{ m}$ donc $\lambda = 0,40 \text{ m}$.

b. On a $v = \frac{\lambda}{T}$ donc $v_1 = \frac{0,40 \text{ m}}{250 \times 10^{-3} \text{ s}} = 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les deux valeurs de vitesse obtenues sont proches.

4. On a $t_2 = t_1 + 125 \text{ ms}$ donc $t_2 = t_1 + \frac{T}{2}$ donc les signaux sont décalés d'une demi-période dans le temps et d'une demi longueur d'onde dans l'espace, soit :



Exercice-2 :

A. Corde libre :

- L'équation de propagation aux dérivées partielles s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- ❖ La célérité de la corde est égale :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

- Les solutions de l'équation de propagation de l'onde libre :

- ❖ En utilisant la méthode des séparations des variables

$$y = A(x) T(t)$$

- ❖ On obtient :

$$v^2 \frac{\ddot{A}(x)}{A(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2$$

D'où la solution s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} A(x) = A_1 \cos\left(\frac{\omega}{V}x\right) + A_2 \sin\left(\frac{\omega}{V}x\right) \\ T(t) = T_1 \cos(\omega t) + T_2 \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow y(x, t) = A(x) T(t)$$

B. La corde est maintenant fixée :

- Forme de la solution générale :

❖ Les conditions aux limites nous donnent :

$$\begin{cases} y(x=0) = 0 \\ y(x=a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A(x) = A_2 \sin\left(\frac{\omega}{V}x\right) = A_2 \sin(k_x x) \end{cases} \Rightarrow A(a) = A_2 \sin(k_x a) = 0 \Rightarrow k_x^{(n)} = n \frac{\pi}{a}$$

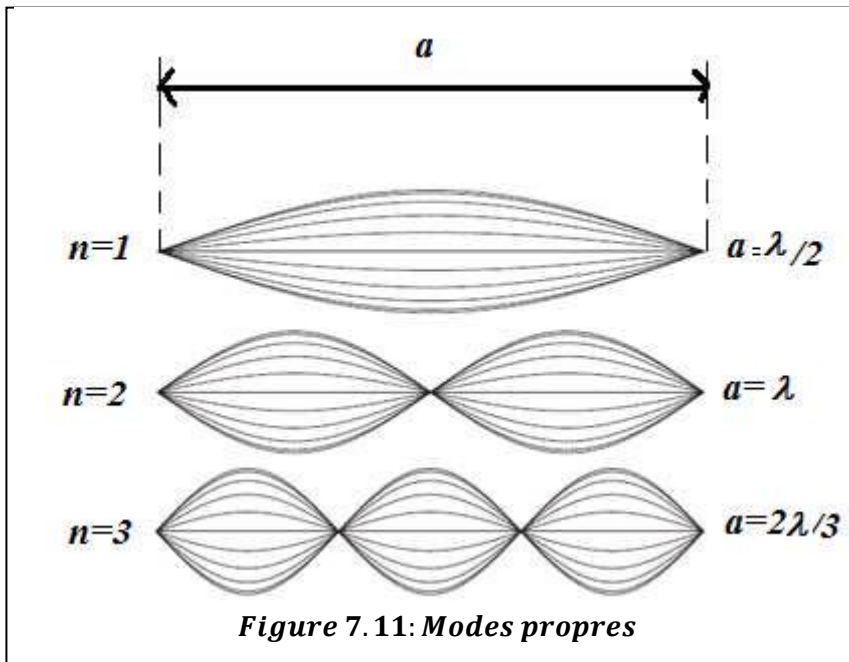
La solution s'écrit sous la forme :

$$A(x) = A_2 \sin(k_x^{(n)} x)$$

Les longueurs d'ondes associées aux modes propres sont :

$$k_x^{(n)} = \frac{2\pi}{\lambda} = \left(\frac{\omega}{V}\right)_x = n \frac{\pi}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{2a}{n}$$

La **figure 7.11** ci-dessus illustre les différents types des modes propres :



❖ Les conditions initiales nous donnent :

$$\dot{T}(t=0) = 0 = 0 \Rightarrow T(t) = T_1 \cos(\omega_n t)$$

D'où la solution finale s'écrit :

$$y_T(x, t) = \sum_{n \geq 1} \Lambda \sin(k_x^{(n)} x) \cos(\omega_n t) \text{ avec } \Lambda = A_2 T_1$$

- Les fréquences propres des vibrations de la corde :

$$k_x^{(n)} = \frac{\omega_n}{V} = \frac{2\pi f_n}{V} = n \frac{\pi}{a} \Rightarrow f_n = n \frac{1}{2a} V = n \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = n f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

C. Application numérique :

- Tension de la corde :

$$f_1 = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = 4a^2 \rho S f_1^2 \Rightarrow T = 17,3 \text{ N}$$

- La solution générale de l'équation de propagation lorsque la corde est pincée en son milieu :
L'équation de la corde à l'instant initial dans ce cas est de la forme :

$$\begin{cases} y(x, 0) = \frac{2h}{a}x & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ y(x, 0) = \frac{2h}{a}(a-x) & \text{pour } \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

En appliquant la condition initiale :

$$\dot{y}(x, t = 0) = 0$$

On obtient :

$$y(x, t = 0) = \sum_{n \geq 1} \Lambda \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \begin{cases} y(x, 0) = \frac{2h}{a}x & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \\ y(x, 0) = \frac{2h}{a}(a-x) & \text{pour } \frac{a}{2} \leq x \leq a \end{cases}$$

On multiplie les deux membres par $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$ et on intègre sur $[0, a]$:

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^a \Lambda \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{2h}{a} \int_0^{\frac{a}{2}} x \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx + \int_{\frac{a}{2}}^a 2h \left(1 - \frac{x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx$$

Après intégration, on obtient :

$$\frac{a}{2} \sum_{n \geq 1} \Lambda = \frac{4ha}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow \Lambda = \frac{8h}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

La solution générale est :

$$y_T(x, t) = \sum_{n \geq 1} \frac{8h}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos(\omega_n t)$$

Exercice-3 :

Partie A : Equation de la corde vibrante :

- En appliquant la loi de la dynamique sur l'élément de la corde, on a :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= dm \cdot \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t) \\ &= T[\cos(x+dx, t) - \cos(x, t)]\vec{e}_x + T[\sin(x+dx, t) - \sin(x, t)]\vec{e}_y = dm \cdot \gamma \vec{e}_y \\ &= dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y \Rightarrow \begin{cases} T[\cos(x+dx, t) - \cos(x, t)] = 0 \\ T[\sin(x+dx, t) - \sin(x, t)] = dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \text{ avec } dm = \mu \cdot dl \end{cases} \end{aligned}$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$\begin{cases} \sin\theta \cong \frac{\partial y}{\partial x} \text{ et } \partial l \cong \partial x \\ T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right] = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases}$$

D'où l'équation aux dérivées partielles du déplacement $y(x, t)$ s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

- La célérité est donc :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Partie B : Analogie électrique :

- L'équation de propagation de l'onde dans la cellule électrique :
- En appliquant les lois fondamentales des mailles et des nœuds, on obtient :

$$\begin{cases} \sum U_n = 0 \Rightarrow u(x+dx, t) + L_{ind} dx \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - u(x, t) = 0 \\ \sum i_n = 0 \Rightarrow -i_3 - i(x+dx, t) + i(x, t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum U_n = 0 \Rightarrow u(x+dx, t) + L_{ind} dx \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - u(x, t) = 0 \\ i_3 = -[i(x+dx, t) - i(x, t)] = \frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [C_{ap} \cdot dx \cdot u(x+dx, t)] = C_{ap} \cdot dx \cdot \frac{\partial}{\partial t} [u(x+dx, t)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{u(x+dx, t) - u(x, t)}{dx} = -L_{ind} \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \\ -\frac{[i(x+dx, t) - i(x, t)]}{dx} = -\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = C_{ap} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [u(x+dx, t)] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -L_{ind} \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -C_{ap} \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases}$$

En combinant les deux équations, on obtient les équations de propagations des ondes de courant et de tension comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -L_{ind} \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} = -C_{ap} \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -L_{ind} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -C_{ap} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_{ind} C_{ap} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

- La célérité de l'onde de courant est donc :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_{ind} C_{ap} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{1}{L_{ind} C_{ap}}}$$

- L'équivalence mécanique-électricité :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_{ind} C_{ap} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \begin{cases} L_{ind} \leftrightarrow \mu \\ C_{ap} \leftrightarrow \frac{1}{T} \\ i(x, t) \leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) \end{cases}$$

Exercice-4 :

- Le concept utilisé ici est le suivant : la corde ne résonnera qu'à certaines fréquences, déterminées par le module de la vitesse V de l'onde et la longueur L de la corde.

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \text{ où } n = 1, 2, 3,$$

n représente le mode d'oscillation, les fréquences d'oscillation sont donc :

$$\lambda_n = VT_n = \frac{V}{f_n} \Rightarrow f_n = \frac{V}{\lambda_n} = n \frac{V}{2L} \text{ où } n = 1, 2, 3,$$

Pour produire la quatrième harmonique (pour laquelle $n = 4$), on doit ajuster le terme gauche de l'équation donnant la fréquence à **120 Hz**:

$$f_4 = \frac{V}{\lambda_4} = n \frac{V}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{mg}{\mu}} = 120 \Rightarrow m = \frac{4L^2 \mu f_4^2}{n^2 g} = \frac{4(1,2)^2 (1,6 \cdot 10^{-3}) (120)^2}{(4)^2 (9,8)} \\ \Rightarrow m = 0,846 \text{ Kg} \approx 0,85 \text{ Kg}$$

- On a déjà trouvé :

$$m = \frac{4L^2 \mu f_4^2}{n^2 g} = 1 \Rightarrow n^2 = \frac{4L^2 \mu f_4^2}{mg} \Rightarrow n = 2Lf_4 \sqrt{\frac{\mu}{mg}} = 2(1,2)(120) \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-3}}{1,9,8}} \cong 3,7$$

n doit être un nombre entier, et $n = 3,7$ est donc impossible. Par conséquent, si $m = 1 \text{ Kg}$, le vibreur ne peut pas produire une onde stationnaire dans la corde, et toute oscillation de la corde sera faible, donc imperceptible.

Solutions des exercices de la série :8