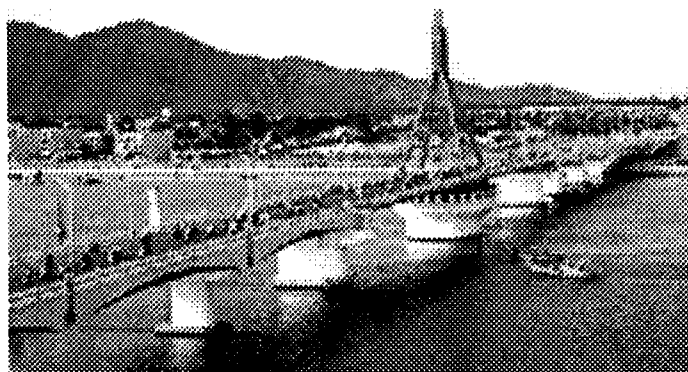


ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA SƯ PHẠM KỸ THUẬT
— ๘ ๓ ๔ —

GIÁO TRÌNH **ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH**

DÙNG CHO SINH VIÊN CHUYÊN NGÀNH XÂY DỰNG
(LƯU HÀNH NỘI BỘ)



BIÊN SOẠN :
PGS. TS LÊ VIỆT GIẢNG - BỘ MÔN CƠ KỸ THUẬT

ĐÀ NẴNG 2007

MỤC LỤC GIÁO TRÌNH

CHƯƠNG I. MỞ ĐẦU	2
§1. Ý NGHĨA CỦA ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH	2
§2. KHÁI NIỆM VỀ SỰ ỔN ĐỊNH VÀ MẤT ỔN ĐỊNH CỦA CÔNG TRÌNH	2
§3. KHÁI NIỆM VỀ BẬC TỰ DO	7
§4. CÁC BIỂU HIỆN VỀ SỰ CÂN BẰNG ỔN ĐỊNH	8
CHƯƠNG II. CÁC PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU	12
§1. KHÁI NIỆM VỀ CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH	12
§2. PHƯƠNG PHÁP THIẾT LẬP VÀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN	13
§3. PHƯƠNG PHÁP THIẾT LẬP VÀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ	15
§4. PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN	18
§5. PHƯƠNG PHÁP BUPNOV - GALERKIN	21
§6. PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG ÁP DỤNG TRỰC TIẾP NGUYÊN LEJEUNE - DIRICHLET	23
CHƯƠNG III. ỔN ĐỊNH CỦA CÁC THANH THẲNG	26
§1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG ĐÀN HỒI TRONG THANH CHỊU UỐN DỌC	26
§2. ỔN ĐỊNH CỦA CÁC THANH THẲNG CÓ LIÊN KẾT CỨNG Ở 2 ĐẦU	28
§3. ỔN ĐỊNH CỦA CÁC THANH THẲNG CÓ LIÊN KẾT ĐÀN HỒI	29
§4. ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU LỰC ĐẶT BẤT KỲ DỌC THEO CHIỀU DÀI THANH	32
§5. ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU TẢI TRỌNG PHÂN BỐ THEO TRỤC THANH	37
§6. ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CÓ TIẾT DIỆN THAY ĐỔI	40
CHƯƠNG IV. ỔN ĐỊNH CỦA CÁC KHUNG PHẪNG	46
§1. CÁC GIẢ THIẾT	46
§2. CÁCH XÁC ĐỊNH PHẢN LỰC VÀ NỘI LỰC TRONG NHỮNG THANH CHỊU NÉN KHI CÁC LIÊN KẾT CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC	46
§3. CÁCH TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CÁC KHUNG PHẪNG THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ	56
§4. CÁCH SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG KHI TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CÁC KHUNG PHẪNG	65
§5. CÁCH XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG NHỮNG THANH CHỊU UỐN CÙNG VỚI NÉN HOẶC KÉO.	71
§6. CÁCH TÍNH ỔN ĐỊNH KHUNG THEO PHƯƠNG PHÁP LỰC	75
CHƯƠNG V. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM LIÊN TỤC VÀ CỦA DÀN	79
§1. CÁCH TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA DẦM LIÊN TỤC THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ	79
§2. ỔN ĐỊNH CỦA CÁC THANH CHỊU NÉN TRONG DÀN	84
§3. ỔN ĐỊNH CỦA THANH LIÊN TỤC CÓ GỐI TỰA ĐÀN HỒI	85
§4. CÁCH TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA DẦM LIÊN TỤC THEO PHƯƠNG PHÁP LỰC PHƯƠNG TRÌNH 3 MÔMEN	95
CHƯƠNG VI. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM UỐN PHẪNG	100
§1. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM CÓ MẶT CẮT CHỮ NHẬT HẸP CHỊU UỐN THUẦN TUYỆT	100
§2. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM CÓ MẶT CẮT CHỮ NHẬT HẸP CHỊU NÉN LỆCH TÂM	103
§3. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM CÓ MẶT CẮT CHỮ NHẬT HẸP CHỊU UỐN NGANG PHẪNG	105
§4. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM CÓ MẶT CẮT CHỮ I	111
PHỤ LỤC	119

CHƯƠNG I. MỞ ĐẦU

§1. Ý NGHĨA CỦA ỔN ĐỊNH CÔNG TRÌNH

1. Khi thiết kế công trình, nếu chỉ kiểm tra điều kiện bền và điều kiện cứng thì chưa đủ để phán đoán khả năng làm việc của công trình.

Trong nhiều trường hợp, đặc biệt với các công trình chịu nén, hoặc nén cùng uốn, tuy tải trọng chưa đạt tới giá trị phá hoại, và có khi còn nhỏ hơn giá trị cho phép về điều kiện bền và điều kiện cứng, nhưng kết cấu vẫn có thể mất khả năng bảo toàn dạng cân bằng ban đầu ở trạng thái biến dạng của nó, mà chuyển sang dạng cân bằng khác. Dạng cân bằng mới này sẽ gây ra trọng hệ những ứng suất phụ làm cho công trình bị phá hoại. Ta gọi hiện tượng này là hiện tượng công trình bị mất ổn định.

Cuối thế kỷ XIX đầu thế kỷ XX đã xảy ra một số tai nạn mà nguyên nhân là do công trình không đảm bảo điều kiện ổn định.

Hiện nay, yêu cầu phát triển kinh tế đòi hỏi phải xây dựng những công trình lớn, trong đa số các công trình đó, người ta thường dùng những thanh chịu nén có chiều dài lớn. Do đó, việc nghiên cứu sự ổn định của công trình là cần thiết và có ý nghĩa thực tế.

2. Trong giáo trình SBVL, đã nghiên cứu bài toán ổn định của thanh thẳng chịu nén đúng tâm. Trong phạm vi giáo trình ổn định công trình, sẽ nghiên cứu các phương pháp tính ổn định của hệ thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi tải trọng tác dụng tĩnh.

§2. KHÁI NIỆM VỀ SỰ ỔN ĐỊNH VÀ MẤT ỔN ĐỊNH CỦA CÔNG TRÌNH

Trong giáo trình cơ học, hiện nay có hai quan điểm về ổn định: Ổn định về chuyển động của Liapunov và quan niệm ổn định tĩnh của Euler. Trong phạm vi giáo trình ổn định công trình này, chỉ trình bày định nghĩa ổn định theo quan điểm của Euler

1. Định nghĩa:

Ổn định là tính chất của công trình giữ nguyên được:

- Vị trí ban đầu của nó;
- Dạng cân bằng ban đầu trong trạng thái biến dạng tương ứng với các tải trọng tác dụng.

Tính chất của ổn định công trình thường có giới hạn khi tăng lực tác dụng lên công trình. Khi tính chất nói trên mất đi, công trình không có đủ khả năng chịu đựng tải trọng. Lúc này, công trình được gọi là không ổn định.

Như vậy:

- Vị trí của công trình có khả năng ổn định hoặc không ổn định
- Dạng cân bằng của công trình ở trạng thái biến dạng cũng có khả năng ổn định hoặc không ổn định.

a. **Ổn định:**

Vị trí của công trình hay dạng cân bằng của công trình ở trạng thái biến dạng được gọi là ổn định, nếu như sau khi gây cho công trình một độ lệch rất nhỏ khỏi vị trí ban đầu hoặc khỏi dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân nào đó, rồi bỏ nguyên nhân đó đi, thì công trình có khuynh hướng quay trở về trạng thái ban đầu.

b. **Không ổn định:**

Vị trí của công trình hay dạng cân bằng của công trình ở trạng thái biến dạng được gọi là không ổn định nếu như sau khi gây cho công trình một độ lệch rất nhỏ khỏi vị trí ban đầu hoặc khỏi dạng cân bằng ban đầu bằng một nguyên nhân nào đó, rồi bỏ nguyên nhân đó đi, thì công trình không quay trở về trạng thái ban đầu.

Lúc này, độ lệch của công trình không có khuynh hướng giảm dần mà có thể phát triển tiếp tục cho đến khi công trình ở vị trí mới hoặc có dạng cân bằng mới.

c. **Trạng thái tới hạn:**

Bước quá độ của công trình từ trạng thái **ổn định** sang trạng thái **không ổn định** được gọi là **mất ổn định**.

Giới hạn đầu của bước quá độ đó được gọi là **trạng thái tới hạn** của công trình. Tải trọng tương ứng với trạng thái tới hạn gọi là **tải trọng tới hạn**.

2. **Hai trường hợp mất ổn định:**

Từ khái niệm về sự ổn định, ta cần phân biệt hai trường hợp mất ổn định sau:

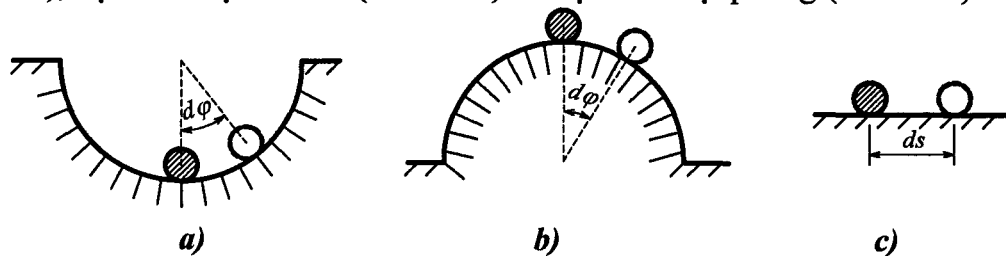
- ❖ Mất ổn định về vị trí;
- ❖ Mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng.

a. **Hiện tượng mất ổn định về vị trí:** xảy ra khi toàn bộ công trình được xem là tuyệt đối cứng, không giữ nguyên được vị trí ban đầu mà bắt buộc phải chuyển sang vị trí khác. Đó là trường hợp mất ổn định lật hoặc trượt của các công trình tường chắn, trụ cầu, mố cầu, thác nước...

Trong trường hợp này, các ngoại lực tác dụng lên công trình không thể cân bằng ở vị trí ban đầu của công trình mà có thể cân bằng ở vị trí mới.

Trong cơ học, vị trí của vật thể tuyệt đối cứng có thể là ổn định, không ổn định hoặc phiếm định.

Ví dụ: Hiện tượng ổn định và mất ổn định về vị trí là trường hợp viên bi đặt trong mặt cầu lõm (Hình 1-a), đặt trên mặt cầu lồi (Hình 1-b) và đặt trên mặt phẳng (Hình 1-c)



Hình 1

Sau khi cho viên bi ra khỏi vị trí cân bằng ban đầu với một giá trị vô cùng bé, rồi thả ra, ta nhận thấy:

(1) Trường hợp thứ nhất (Hình 1-a): Hòn bi dao động quanh vị trí ban đầu, rồi cuối cùng trở về vị trí cũ. Như vậy, vị trí này là vị trí cân bằng ổn định.

Khi hòn bi lệch khỏi vị trí cân bằng ổn định, thế năng của nó tăng lên; do đó, vị trí hòn bi ở đáy lõm cầu tương ứng thế năng cực tiểu.

(2) Trường hợp thứ hai (Hình 1-b): Hòn bi không quay trở về vị trí ban đầu mà tiếp tục lăn xuống phía dưới. Vị trí này là vị trí cân bằng không ổn định.

Khi hòn bi lệch khỏi vị trí này, thế năng của hòn bi giảm xuống. Do đó, vị trí cân bằng không ổn định của hòn bi tương ứng với thế năng của hòn bi là cực đại.

(3) Trường hợp thứ ba (Hình 1-c): Hòn bi không quay trở về vị trí ban đầu, nhưng cũng không chuyển động tiếp tục. Vị trí này là vị trí cân bằng phiếm định.

Trong trường hợp này, thế năng của hòn bi là không đổi.

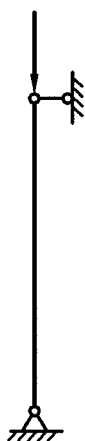
Như vậy:

- Ở vị trí cân bằng ổn định, thế năng của vật thể nghiên cứu là cực tiểu.
- Ở vị trí cân bằng không ổn định, thế năng của vật thể nghiên cứu là cực đại.
- Ở vị trí cân bằng phiếm định, thế năng của vật thể nghiên cứu là không đổi.

b. **Hiện tượng mất ổn định về dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng** xảy ra khi biến dạng ban đầu của vật thể tương ứng với tải trọng nhỏ ban đầu bắt buộc phải chuyển sang dạng biến dạng mới khác trước về tính chất.

Trong trường hợp mất ổn định về dạng cân bằng, nguyên nhân là: sự cân bằng giữa các ngoại lực và nội lực không thể thực hiện được tương ứng với dạng cân bằng ban đầu của công trình, mà chỉ có thể thực hiện được tương ứng với dạng biến dạng cân bằng mới khác trước về tính chất.

Ví dụ:



Dạng biến dạng ban đầu là nén đúng tâm



Dạng biến dạng mới là uốn dọc

c. **Tóm lại**, sự khác nhau giữa hiện tượng mất ổn định về vị trí và mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng:

(1) Hiện tượng mất ổn định về vị trí xảy ra khi:

- Đối tượng nghiên cứu là vật thể tuyệt đối cứng, ví dụ: trụ cầu, tháp nước;
- Nguyên nhân gây ra mất ổn định là do các ngoại lực tác dụng lên công trình không thể cân bằng ở vị trí ban đầu.

(2) Hiện tượng mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng xảy ra khi:

- Đối tượng nghiên cứu là vật thể biến dạng;
- Nguyên nhân gây ra mất ổn định là giữa nội lực và ngoại lực mất cân bằng ở dạng cân bằng ban đầu.

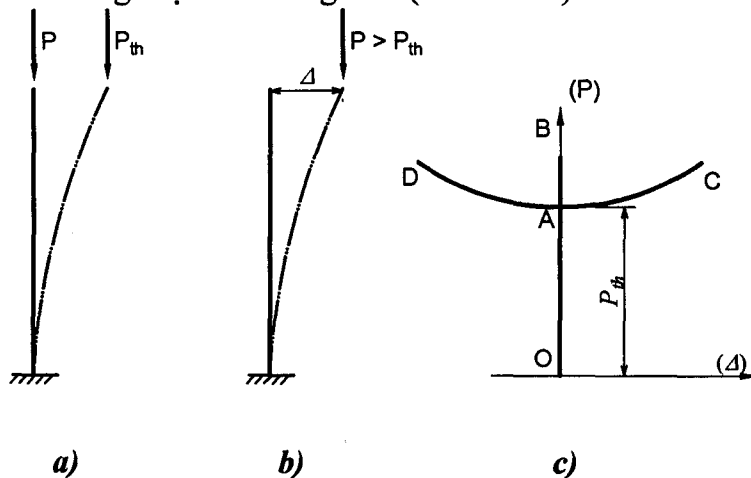
Người ta chia hiện tượng mất ổn định về dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng thành hai trường hợp: mất ổn định loại I và mất ổn định loại II.

A. Mất ổn định loại I:

Các đặc trưng của hiện tượng mất ổn định loại I hay mất ổn định Euler:

- ✓ Dạng cân bằng có khả năng phân nhánh; (tức là dạng cân bằng phiếm định có khả năng phân nhánh thành 2 dạng: dạng cân bằng ban đầu và dạng cân bằng lân cận).
- ✓ Phát sinh dạng cân bằng mới khác dạng cân bằng ban đầu về tính chất;
Ví dụ: Dạng cân bằng ban đầu là nén đúng tâm, dạng cân bằng mới là uốn dọc.
- ✓ Trước trạng thái tới hạn, dạng cân bằng ban đầu là duy nhất và ổn định. Sau trạng thái tới hạn, dạng cân bằng ban đầu là không ổn định.

Ví dụ: Xét thanh thẳng chịu nén đúng tâm (Hình 2 - a)



Hình 2

a, Lực nén P nhỏ:

Thanh vẫn thẳng, trạng thái chịu nén của thanh là trạng thái cân bằng ban đầu và duy nhất. Nếu đưa thanh ra khỏi dạng cân bằng ban đầu, thanh sẽ dao động và cuối cùng trở về dạng ban đầu. Do đó, dạng cân bằng này là ổn định. Trạng thái cân bằng ổn định tương ứng với đoạn OA trên đồ thị liên hệ giữa chuyển vị Δ và tải trọng P (Hình 2c).

b, Khi tăng P đạt một giá trị nào đó gọi là lực tới hạn (P_{th}):

Trong thanh xuất hiện trạng thái tới hạn. Lúc này, ngoài dạng cân bằng chịu nén, đồng thời còn có khả năng xuất hiện trạng thái cân bằng uốn dọc, nghĩa là thanh ở trạng thái cân bằng phiếm định.

Như vậy, dạng cân bằng phiếm định bị phân nhánh thành hai dạng (dạng cân bằng chịu nén và dạng cân bằng uốn dọc). Trạng thái cân bằng phiếm định tương ứng với điểm phân nhánh A trên đồ thị $P-\Delta$ (Hình 2-c).

c, Khi $P > P_{th}$:

Trạng thái cân bằng chịu nén vẫn có khả năng tiếp tục tồn tại, song dạng cân bằng này là không ổn định. Vì nếu đưa thanh ra khỏi dạng cân bằng này thì thanh không có khả năng trở lại dạng thẳng ban đầu.

Dạng cân bằng không ổn định này tương ứng với đoạn AB trên đồ thị (Hình 2-c). Lúc này, thanh buộc phải có dạng cân bằng ổn định uốn dọc khi biến dạng của thanh là hữu hạn (Hình 2-b). Dạng cân bằng này tương ứng với nhánh AC và AD (Hình 2- c)

Vài ví dụ về hiện tượng mất ổn định loại I

1. Mất ổn định dạng nén đúng tâm:

Trong trường hợp khung chịu tải (Hình 3),

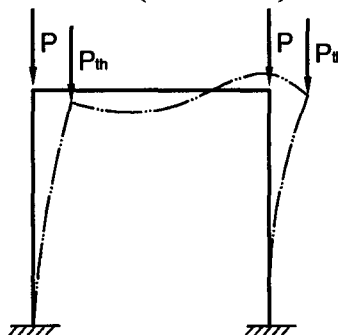
- Khi $P < P_{th}$: khung có dạng cân bằng chịu nén;
- Khi $P > P_{th}$: dạng cân bằng chịu nén không ổn định

và khung có dạng cân bằng mới (chịu uốn theo đường nét đứt).

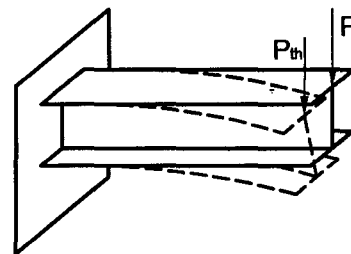
2. Mất ổn định dạng uốn phẳng:

Dầm chữ I chịu uốn phẳng do tải trọng P tác dụng trong mặt phẳng đối xứng (Hình 4):

- Khi $P < P_{th}$: dầm có dạng cân bằng ổn định là dạng uốn phẳng (đường nét liền)
- Khi $P > P_{th}$: dạng uốn phẳng không ổn định và dầm có dạng cân bằng mới là dạng uốn cùng với xoắn (đường nét đứt).



Hình 3



Hình 4

B. Mất ổn định loại II

Các đặc trưng của hiện tượng mất ổn định loại II như sau:

- Dạng cân bằng không phân nhánh.
- Biến dạng và dạng cân bằng của hệ không thay đổi về tính chất.

Kết luận:

- Trong phạm vi giáo trình ổn định công trình này, chúng ta chỉ nghiên cứu bài toán ổn định loại I về dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng của các thanh và hệ thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi.

- Nhiệm vụ của môn học là nghiên cứu các phương pháp xác định tải trọng tới hạn của công trình, qua đó đánh giá khả năng chịu lực của công trình.

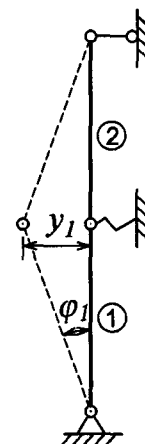
§3. KHÁI NIỆM VỀ BẬC TỰ DO

1. Định nghĩa:

Bậc tự do của hệ là số thông số hình học độc lập để xác định vị trí của tất cả các điểm của hệ khi hệ mất ổn định.

Ví dụ: Xét hệ thanh cứng như hình vẽ.

Hệ gồm 2 thanh tuyệt đối cứng liên kết với nhau (Hình 5) có một bậc tự do. Vì ở trạng thái mất ổn định (đường nét đứt), ta xác định được vị trí của toàn hệ theo một thông số (chuyển vị y_1 của khớp hoặc góc xoay φ_1 của một thanh nào đó).



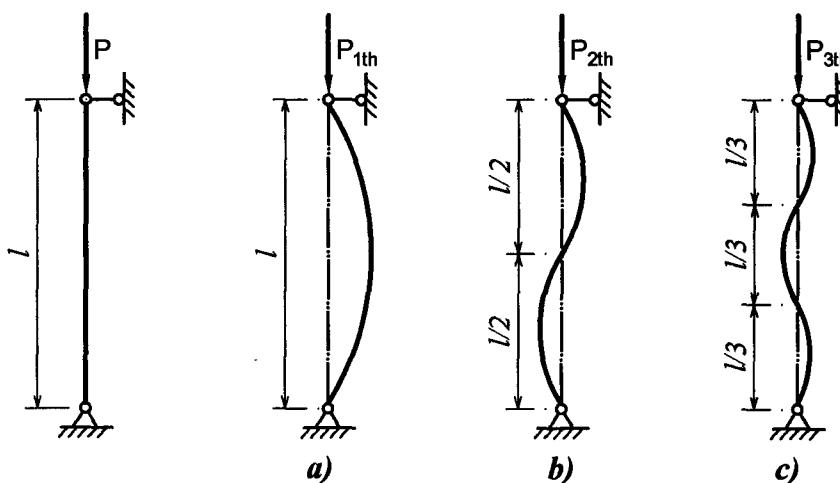
Hình 5

2. Lực tới hạn:

Nếu thanh có n bậc tự do, thì ta xác định được n giá trị khác nhau lực tới hạn. Lực tới hạn tương ứng giá trị nhỏ nhất là lực tới hạn thứ nhất. Lực tới hạn thứ nhất xảy ra tương ứng với hệ từ dạng cân bằng ổn định chuyển sang dạng cân bằng mới khác dạng cân bằng ban đầu. Các lực tới hạn tiếp theo đều xảy ra ứng với các dạng cân bằng không ổn định.

Ví dụ: Một thanh thẳng mặt cắt không đổi, hai đầu liên kết khớp, chịu nén đúng tâm (Hình 6). Theo SBVL, lực tới hạn xác định theo công thức:

$$P_{nth} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} EJ \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$



Hình 6

Lần lượt cho $n = 1, 2, 3 \dots$ ta sẽ được vô số giá trị của lực tới hạn:

$$P_{1th} = \frac{\pi^2}{l^2} EJ, \quad P_{2th} = \frac{4\pi^2}{l^2} EJ, \quad P_{3th} = \frac{9\pi^2}{l^2} EJ$$

Lực tới hạn thứ nhất tương ứng với dạng biến dạng hình 6-a (tương ứng khi hệ chuyển từ trạng thái cân bằng ổn định sang dạng cân bằng không ổn định)

Lực tới hạn thứ 2, 3, ... tương ứng với các biến dạng như trên hình 6-b, 6-c...

Những dạng cân bằng trên hình 6-b, 6-c... đều không ổn định.

Bởi vậy, chỉ có lực tới hạn thứ nhất là lực tới hạn có ý nghĩa thực tế.

§4. CÁC BIỂU HIỆN VỀ SỰ CÂN BẰNG ỔN ĐỊNH

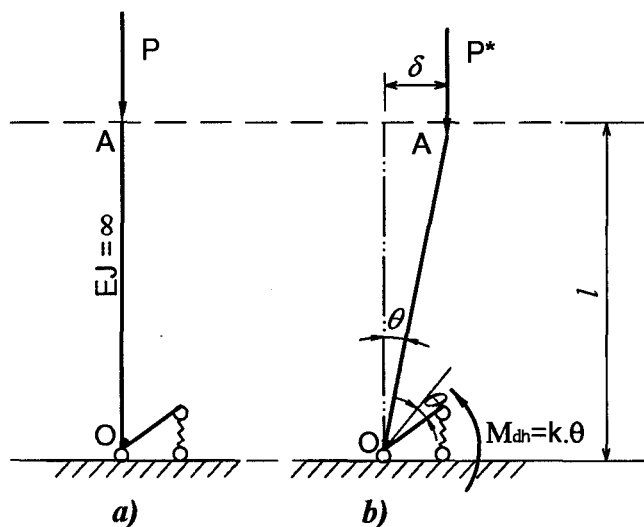
I. Biểu hiện tĩnh học:

Trong tĩnh học, biểu hiện sự cân bằng được biểu diễn dưới dạng các phương trình cân bằng tĩnh học. Song, dạng cân bằng tĩnh học này chưa nói lên được dạng cân bằng đó ổn định hay không ổn định. Để giải quyết vấn đề này, ta cần khảo sát hệ ở trạng thái lệch khỏi dạng cân bằng đang xét. Giả sử ở trạng thái lệch này, hệ cân bằng có thể xảy ra về nguyên tắc, thì ta cần tính giá trị của lực (P^*) từ điều kiện cân bằng tĩnh học của hệ ở trạng thái lệch để đối chiếu với tải trọng (P) đã cho ở trạng thái ban đầu.

1. Nếu $P^* > P$, thì tải trọng đã cho (P) không thể giữ hệ ở trạng thái cân bằng lệch và hệ trở lại trạng thái cân bằng ban đầu, nghĩa là cân bằng ổn định.
2. Nếu $P^* < P$, thì tải trọng đã cho không những có khả năng giữ hệ ở trạng thái lệch, mà còn làm tăng độ lệch, do đó, sự cân bằng là không ổn định.
3. Nếu $P^* = P$, thì sự cân bằng là phiếm định.

Ví Dụ:

Cho 1 thanh tuyệt đối cứng ($EJ = \infty$), không trọng lượng, một đầu tự do, một đầu liên kết ngàm đàn hồi (Hình 7). Độ cứng của ngàm liên kết đàn hồi là k (k là giá trị của momen xuất hiện trong liên kết khi mặt cắt ở liên kết xoay một góc bằng 1 đơn vị)



Hình 7

Xét hệ ở trạng thái lệch so với trạng thái cân bằng ban đầu và được giữ với lực P^* (Hình 7b). Lúc này thanh bị nghiêng một góc θ , trong liên kết đàn hồi xuất hiện phản lực momen $M_{dh} = k\theta$

- Điều kiện cân bằng ở trạng thái lệch:

$$\sum M_O = 0 \Leftrightarrow P^* \cdot \delta - M_{dh} = 0$$

Trong đó: $M_{dh} = k\theta$;

$$\delta = l \sin \theta \approx l\theta, \text{ (vì } \theta \text{ rất nhỏ, nên } \sin \theta \approx \theta)$$

Vậy: $P^* \cdot l \cdot \theta - k \cdot \theta = 0$

$$\text{Suy ra: } P^* = \frac{k}{l}$$

P^* : là lực cần thiết để giữ hệ ở trạng thái lệch.

Vậy:ed

Khi $P < P^* = \frac{k}{l}$, thì hệ ở trạng thái cân bằng ổn định.

Khi $P > P^* = \frac{k}{l}$, thì hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định.

Khi $P = P^* = \frac{k}{l}$, thì hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định.

II. Biểu hiện dưới dạng năng lượng:

Áp dụng nguyên lý Lejeune - Dirichlet:

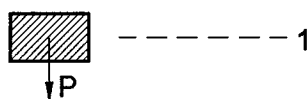
- Nếu hệ ở trạng thái ổn định, thì thế năng toàn phần đạt giá trị cực tiểu so với tất cả các vị trí của hệ ở lân cận với vị trí ban đầu với những chuyển vị vô cùng bé.

- Nếu hệ ở trạng thái không ổn định, thì thế năng toàn phần đạt giá trị cực đại.

- Nếu hệ ở trạng thái phiếm định thì thế năng toàn phần không đổi.

Thế năng của hệ ở trạng thái biến dạng bao gồm thế năng của các nội lực (thế năng biến dạng) và thế năng của ngoại lực. Biết rằng, thế năng của ngoại lực trái dấu với công của ngoại lực.

Ví dụ: Đưa vật có trọng lượng P từ "0" lên "1". Ở vị trí "1" thế năng của P tăng (+), nhưng công của P âm (-), (vì chiều của P hướng xuống, chiều của chuyển vị hướng lên)



----- 0

Gọi δU là độ biến thiên của thế năng toàn phần của hệ khi hệ chuyển từ trạng thái đang xét sang trạng thái lân cận, thì:

$$\delta U = \delta V + (-\delta T) = \delta V - \delta T$$

Trong đó: δV : số gia của thế năng biến dạng,

δT : số gia của công ngoại lực.

Theo nguyên lý Lejeune - Dirichlet

- Nếu $\delta V > \delta T$, thì trạng thái cân bằng ổn định ;
- Nếu $\delta V < \delta T$, thì trạng thái cân bằng không ổn định ;
- Nếu $\delta V = \delta T$, thì trạng thái cân bằng phiếm định.

Giải thích: Nếu ở trạng thái lệch, thế năng biến dạng đàn hồi của hệ tích lũy được lớn hơn công ngoại lực, thì phần năng lượng tích lũy thêm đó có khả năng vượt qua sự cản trở của ngoại lực để đưa hệ về trạng thái ban đầu.

Ví dụ: Xét lại ví dụ (Hình 7) theo biểu hiện dưới dạng năng lượng.

Số gia của công ngoại lực :

$$\delta T = P\Delta = Pl(1 - \cos\theta) = 2Pl\sin^2\frac{\theta}{2} \approx 2Pl\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = Pl\frac{\theta^2}{2}$$

Số gia của thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong liên kết đàn hồi:

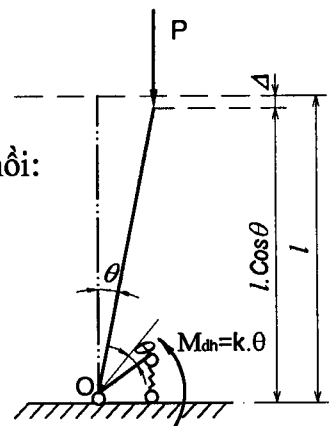
$$\delta V = \frac{1}{2}M_{dh}\theta, \text{ với } M_{dh} = k\theta : \text{ mômen trong liên kết}$$

ngàm đàn hồi. Vậy : $\delta V = \frac{1}{2}k\theta^2$

$$\text{Khi đó: } \delta V - \delta T = \frac{\theta^2}{2}(k - Pl) = \frac{l\theta^2}{2}\left(\frac{k}{l} - P\right) = \frac{\theta^2}{2}(P^* - P)$$

Ta thấy :

- Khi $\delta V > \delta T$, tức $P < \frac{k}{l} = P^*$, thì trạng thái cân bằng ổn định
- Khi $\delta V = \delta T$, tức $P = \frac{k}{l} = P^*$, thì trạng thái cân bằng phiếm định
- Khi $\delta V < \delta T$, tức $P > \frac{k}{l} = P^*$, thì trạng thái cân bằng không ổn định



Hình 7

III. Biểu hiện dưới dạng động lực học:

Biểu diễn của sự cân bằng ổn định dưới dạng động lực học là biểu diễn tổng quát hơn cả. Biểu diễn này được xác định trên cơ sở nghiên cứu tính chất chuyển động của hệ ở lân cận trạng thái cân bằng, gây ra bởi một nhiễu loạn (kích thích) nào đó. Sau khi nhiễu loạn đó mất đi:

- + Nếu chuyển động là tắt dần hoặc điều hoà (không kể lực cản), thì cân bằng đó là ổn định.
- + Nếu chuyển động là không tuần hoàn, mang các đặc trưng dẫn đến sự tăng dần của biên độ, thì cân bằng đó là không ổn định.

Ví dụ: Khảo sát lại ví dụ (Hình 7) theo biểu hiện động lực học.

a, Theo biểu hiện động lực học, ta cần lập phương trình vi phân mô tả chuyển động của hệ ở lân cận trạng thái cân bằng:

$$J\theta'' = P\delta - M_{dh}$$

Trong đó: J - là mômen quán tính khối lượng của thanh lấy đối với điểm O.

$$\delta = l \sin \theta \approx l\theta$$

$$M_{dh} = k\theta$$

k là độ cứng của liên kết đàn hồi.

$$\text{Vậy: } J\theta'' = Pl\theta - k\theta \Leftrightarrow \theta'' + \frac{k - Pl}{J}\theta = 0$$

b, Tìm nghiệm của phương trình (a)

Phương trình đặc trưng của (a):

$$r^2 + \frac{k - Pl}{J} = 0 \quad (b)$$

- Khi $\frac{k - Pl}{J} < 0 \Rightarrow P > \frac{k}{l}$: phương trình đặc trưng (b) có nghiệm thực: $r_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{Pl - k}{J}}$

Nên nghiệm của phương trình chuyển động (a) là: $\theta = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$.

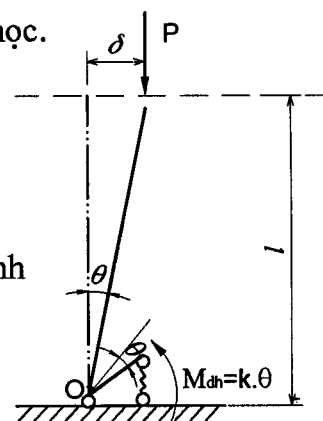
Hàm θ mang đặc trưng tăng biên độ. Do đó, cân bằng của hệ là không ổn định.

- Khi $\frac{k - Pl}{J} > 0 \Rightarrow P < \frac{k}{l}$: phương trình đặc trưng (b) có nghiệm ảo: $r_3 = \pm i \sqrt{\frac{k - Pl}{J}}$

Nên nghiệm phương trình chuyển động (a) là:

$$\theta = C_3 \cos\left(t \sqrt{\frac{k - Pl}{J}}\right) + C_4 \sin\left(t \sqrt{\frac{k - Pl}{J}}\right)$$

Hàm θ mang đặc trưng chuyển động tuần hoàn. Do đó, cân bằng là ổn định.



Hình 7

CHƯƠNG II. CÁC PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

§1. KHÁI NIỆM VỀ CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Khi giải bài toán ổn định, có thể dùng nhiều phương pháp khác nhau. Nguyên lý của các phương pháp này đều dựa trên cơ sở các biểu hiện về sự cân bằng ổn định. (§4- Chương I)

- * Những phương pháp sử dụng sự biểu hiện cân bằng ổn định dưới dạng tĩnh học - gọi là phương pháp tĩnh học.
- * Những phương pháp sử dụng sự biểu hiện cân bằng ổn định dưới dạng năng lượng - gọi là phương pháp năng lượng.
- * Những phương pháp sử dụng sự biểu hiện cân bằng ổn định dưới dạng động - gọi là phương pháp động lực học.

A. CÁC PHƯƠNG PHÁP TĨNH HỌC

1. Nội dung của các phương pháp này:

- Tạo cho hệ đang xét một dạng cân bằng lệch khỏi dạng cân bằng ban đầu.
- Xác định các giá trị lực tới hạn có khả năng giữ hệ ở trạng thái cân bằng lệch. Lực tới hạn được xác định từ phương trình ổn định - phương trình ổn định biểu thị điều kiện tồn tại dạng cân bằng lệch.

2. Các phương pháp tĩnh học gồm có:

- Phương pháp trực tiếp thiết lập và giải phương trình vi phân
- Phương pháp thiết lập và giải hệ phương trình đại số
- Phương pháp sai phân
- Phương pháp Bupnov- Galerkin
- Phương pháp gần đúng

B. CÁC PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

1. Nội dung của các phương pháp này:

- Ta cho trước đường biến dạng của hệ ở trạng thái lệch phù hợp với điều kiện biên.
- Căn cứ vào đường biến dạng giả thiết này, lập các biểu thức thế năng biến dạng (δV) và biểu thức của công ngoại lực (δT). Sau đó viết điều kiện tới hạn của hệ theo điều kiện dưới dạng năng lượng. (xem §4- Chương I) là $\delta V = \delta T$

Chú ý: * Nếu biến dạng chọn trước là đúng thì kết quả giải đúng, trong thực hành, nói chung không biết chính xác dạng biến dạng của hệ nên kết quả tìm theo phương pháp năng lượng là gần đúng.

2. Các phương pháp năng lượng gồm:

- Phương pháp trực tiếp áp dụng nguyên lý Lejeune - Dirichlet.
- Phương pháp áp dụng nguyên lý Rayleigh - Ritz.

C. CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐỘNG LỰC HỌC

1. Nội dung của các phương pháp này:

- Thiết lập phương trình dao động riêng của hệ chịu lực nén
- Xác định tải trọng tới hạn bằng cách biến luận tính chất chuyển động tìm được

§2. PHƯƠNG PHÁP THIẾT LẬP VÀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Trong phương pháp này, ta tiến hành theo thứ tự:

1. Lập phương trình vi phân của đường biến dạng của hệ ở trạng thái biến dạng lệch khỏi trạng thái ban đầu.
2. Tìm nghiệm của phương trình vi phân
3. Dựa vào các điều kiện biên để xác định các hằng số tích phân và các phản lực chưa biết.

Do tính chất của dạng cân bằng phiếm định phân nhánh thành 2 dạng (tức ngoài dạng cân bằng ổn định ban đầu, đồng thời tồn tại dạng cân bằng lệch lân cận so với dạng cân bằng ban đầu), cho nên phương trình được lập là **hệ phương trình đại số thuần nhất**.

+ Một trong các nghiệm của hệ phương trình này là các ẩn đều bằng không; đó là nghiệm tầm thường, vì chúng tương ứng với trạng thái cân bằng ổn định của hệ.

+ Muốn cho hệ chuyển từ trạng thái ổn định sang trạng thái không ổn định, tức là trạng thái lệch đó phải tồn tại, nói cách khác, các ẩn số (các hằng số tích phân và các đại lượng chưa biết) phải tồn tại, thì định thức của các hệ số của hệ phương trình đại số thuần nhất phải bằng không:

$$D(\alpha) = 0 \quad (2-1)$$

α - các hệ số phụ thuộc các đặc trưng hình học và tải trọng. Phương trình (2-1) là phương trình đặc trưng hay phương trình ổn định theo phương pháp tĩnh. Phương trình ổn định biểu thị điều kiện tồn tại dạng cân bằng lệch của hệ

4. Giải phương trình (2-1) để tìm các lực tới hạn

Cách giải này thường áp dụng cho hệ có vô số bậc tự do. Do đó, có thể tìm được vô số lực tới hạn. Song, chỉ có lực tới hạn nhỏ nhất mới là lực tới hạn có ý nghĩa thực tế.

Phương pháp này là phương pháp chính xác, áp dụng thích hợp cho những thanh đơn giản. Trong các chương dưới đây, khi nghiên cứu các kết cấu cụ thể, ta sẽ áp dụng phương pháp này là chủ yếu.

Ví dụ 2-1: Xác định lực tới hạn nhỏ nhất của một thanh một đầu tự do, một đầu ngàm. $EJ = \text{const.}$ (Hình 2-1)

Bài giải:

1. Để xác định lực P_{th} , trước tiên cần thiết lập phương trình vi phân của đường đàn hồi

- Cho thanh lệch khỏi dạng cân bằng thẳng và tìm mômen uốn tại mặt cắt có hoành độ z :

$$M(z) = -P(\delta - y)$$

- Theo SBVL, phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi:

$$EJy'' = -M(z)$$

Do đó, phương trình vi phân của đường biến dạng ở trạng thái biến dạng lệch là:

$$EJy'' = -M(z) = P(\delta - y)$$

$$\text{hay } y'' + \alpha^2 y = \alpha^2 \delta \quad (a)$$

$$\text{trong đó } \alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \quad (b)$$

2. Nghiệm của phương trình vi phân (a):

$$y(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z + \delta \quad (c)$$

Trong đó: A, B - các hằng số tích phân
 δ - đại lượng chưa biết

3. Các điều kiện biên :

$$\text{Khi } z = 0 \text{ thì } \begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

$$\text{Khi } z = l \text{ thì } y = \delta$$

Khi thay (d) vào (c), ta nhận được hệ phương trình đại số thuần nhất

$$\begin{cases} A + \delta = 0 \\ B\alpha = 0 \\ A \cos \alpha l + B \sin \alpha l + \delta = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \delta \end{bmatrix} = 0$$

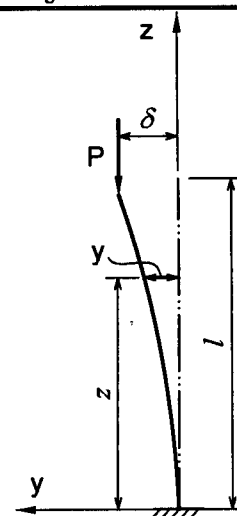
Điều kiện tồn tại trạng thái cân bằng lệch là các ẩn A, B, δ phải khác không, do đó ta có phương trình ổn định:

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l & 0 \end{vmatrix} = -\alpha \cos \alpha l = 0 \quad (e)$$

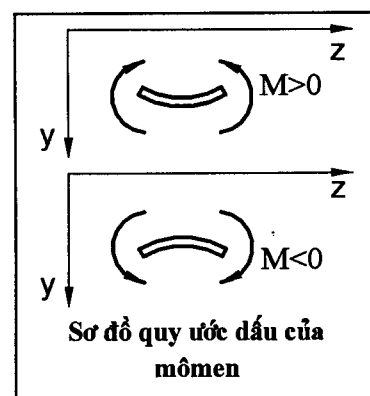
4. Giải phương trình (e) để tìm lực tới hạn:

$$\text{Từ } \cos \alpha l = 0 \text{ suy ra: } \alpha l = (2k-1)\frac{\pi}{2}, \text{ với } k = 1, 2, 3 \dots$$

Lực tới hạn nhỏ nhất tương ứng với khi $k = 1$. Vậy:



Hình 2-1



(d)

$$\alpha l = \frac{\pi}{2} = l \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

Vậy, suy ra: $P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$

§3. PHƯƠNG PHÁP THIẾT LẬP VÀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Khi áp dụng phương pháp này, ta tiến hành theo thứ tự sau:

1. Tạo cho hệ một trạng thái biến dạng lệch so với dạng ban đầu. Trạng thái lệch này được xác định theo (y_i) chuyển vị tại một số điểm.

2. Dựa vào điều kiện cân bằng, điều kiện biến dạng của hệ ở trạng thái lệch, ta lập hệ phương trình đại số liên hệ giữa các chuyển vị tại những điểm khảo sát.

Hệ phương trình đại số thuần nhất này thỏa mãn 2 trường hợp:

- Tất cả các nghiệm y_i (chuyển vị) đều bằng không. Lúc này hệ đang xét không có dạng cân bằng ổn định mới (trạng thái biến dạng lệch) nghĩa là hệ chưa mất ổn định.

- Các nghiệm y_i tồn tại. Lúc này hệ đang xét có dạng cân bằng mới khác dạng ban đầu, tức hệ ở trạng thái tới hạn - trạng thái biến dạng lệch.

Điều kiện cho hệ phương trình đại số thuần nhất có nghiệm khác không, là định thức của nó bằng không.

$$D = 0 \quad (2 - 2)$$

Phương trình (2 - 2) là phương trình đặc trưng hay phương trình ổn định theo phương pháp này.

3. Giải phương trình ổn định (2 - 2) ta sẽ xác định được giá trị lực tới hạn.

Ví dụ 2 - 2:

Xác định giá trị lực tới hạn và dạng mất ổn định tương ứng của hệ. (Hình 2 - 2).

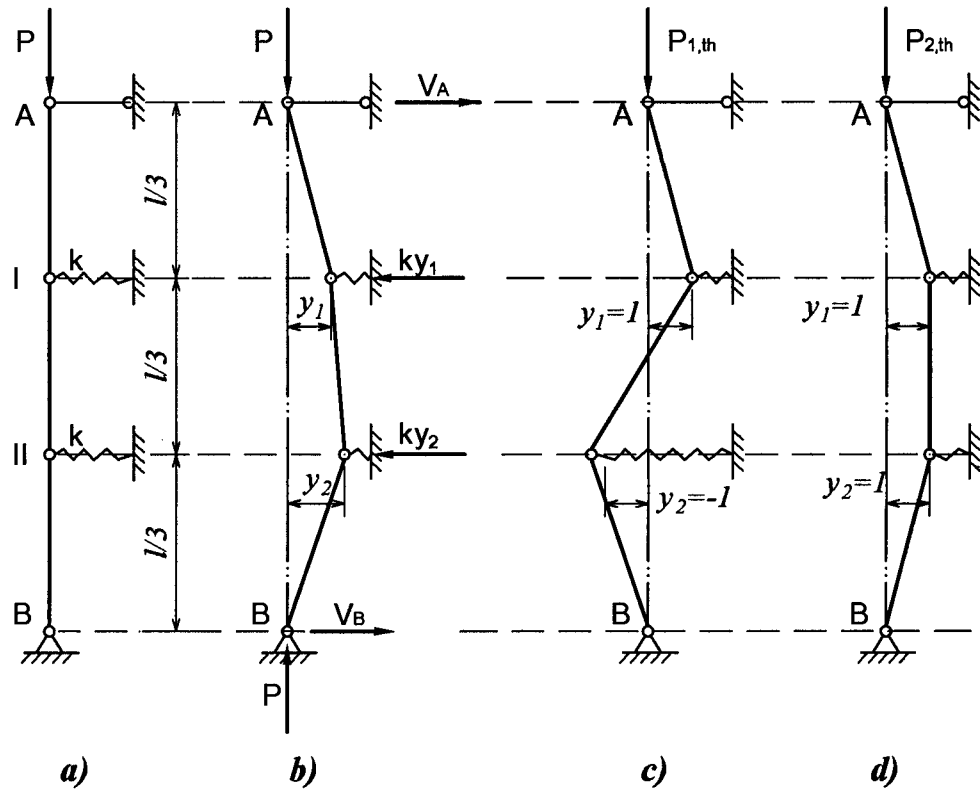
Cho biết: - Độ cứng của các thanh bằng vô cùng.
- Độ cứng của cả hai liên kết đàn hồi bằng k.

Bài Giải:

1. Hệ có hai bậc tự do, ta dùng các chuyển vị y_1, y_2 tại các gối đàn hồi để làm thông số tính toán. (Hình 2 - 2b)

Lúc này, phản lực tại các liên kết đàn hồi là:

$$R_1 = ky_1; R_2 = ky_2. \quad (a)$$



Hình 2 - 2

2. Lập phương trình đại số và phương trình ổn định:

a. Phản lực V_A , V_B được xác định từ các phương trình tĩnh học của toàn hệ:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B l - ky_1 \frac{l}{3} - ky_2 \frac{2l}{3} = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A l - ky_1 \frac{2l}{3} - ky_2 \frac{l}{3} = 0$$

$$\text{Rút ra: } \begin{cases} V_A = k \frac{2y_1 + y_2}{3} \\ V_B = k \frac{y_1 + 2y_2}{3} \end{cases} \quad (b)$$

b. Dựa các phương trình cân bằng mômen đối với khớp I và đối với khớp II, ta có:

$$\sum M_I = 0 \Rightarrow Py_1 - V_A \frac{l}{3} = 0$$

$$\sum M_{II} = 0 \Rightarrow Py_2 - V_B \frac{l}{3} = 0$$

$$\text{Rút ra: } \begin{cases} V_A = \frac{3Py_1}{l} \\ V_B = \frac{3Py_2}{l} \end{cases} \quad (c)$$

Thay (c) vào (b) và sau khi biến đổi, ta được hệ phương trình đại số thuần nhất liên hệ giữa y_1 và y_2 .

$$\begin{cases} (\frac{2kl}{9} - P)y_1 + \frac{kl}{9}y_2 = 0 \\ \frac{kl}{9}y_1 + (\frac{2kl}{9} - P)y_2 = 0 \end{cases} \quad (d)$$

Điều kiện để cho hệ tồn tại trạng thái biến dạng lệch (tức y_1, y_2 khác không) thì định thức của hệ (d) phải bằng không.

Vậy phương trình ổn định là:

$$D = \begin{vmatrix} (\frac{2kl}{9} - P) & \frac{kl}{9} \\ \frac{kl}{9} & (\frac{2kl}{9} - P) \end{vmatrix} = 0 \quad (e)$$

3. Giải phương trình ổn định:

a. Sau khi triển khai định thức (e), ta được:

$$9P^2 - 4klP + \frac{1}{3}k^2l^2 = 0 \quad (f)$$

Hai nghiệm của phương trình bậc 2 này, cho ta 2 giá trị của lực tới hạn:

$$P_{1,th} = \frac{kl}{9}; P_{2,th} = \frac{kl}{3} \quad (g)$$

b. Xác định dạng mất ổn định:

Từ (d), ta có mối liên hệ giữa y_1 và y_2 :

$$y_2 = -\frac{3(\frac{2kl}{9} - 3P)}{kl}y_1$$

Nếu cho $y_1 = 1$ và tương ứng với $P_{1,th} = \frac{kl}{9}$ thì $y_2 = -1$

Nếu cho $y_1 = 1$ và tương ứng với $P_{2,th} = \frac{kl}{3}$ thì $y_2 = 1$

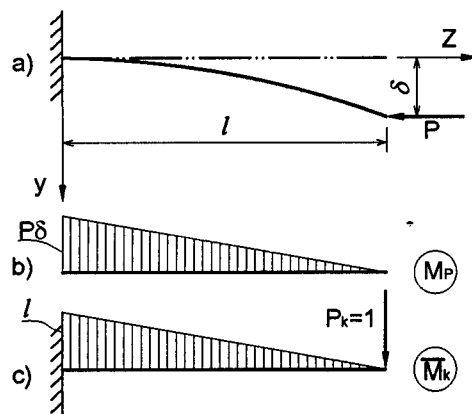
Các dạng mất ổn định tương ứng với các lực tới hạn vẽ trên hình 2 - 2c, d.

Ví dụ 2 - 3:

Xác định lực tới hạn của thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do, chịu lực nén P (Hình 2-3a).

Bài Giải:

Hệ có vô số bậc tự do, nên áp dụng phương pháp này thu kết quả gần đúng.



Hình 2-3

1. Tạo trạng thái biến dạng lệch theo một thông số δ (Hình 2-3a)

2. Lập phương trình ổn định:

Nếu xem gần đúng biểu đồ mômen uốn do P gây ra có dạng hình tam giác (Hình 2-3b), thì có thể tìm δ bằng phương pháp nhân biểu đồ Vê rê sa ghin với biểu đồ mômen đơn vị \overline{M}_k do $\overline{P}_1 = 1$ đặt ở đầu tự do gây ra. (Hình 2-3c).

$$EJ\delta = M_p \overline{M}_k = \frac{P\delta}{2} l \frac{2}{3} l$$

Hay $\delta(EJ - \frac{Pl^2}{3}) = 0$ - phương trình đại số.

Điều kiện tồn tại trạng thái biến dạng lệch, tức $\delta \neq 0$, ta được phương trình ổn định.

$$EJ - \frac{P_{th} l^2}{3} = 0$$

3. Giải phương trình ổn định:

$$P_{th} = \frac{3EJ}{l^2}$$

Kết quả chính xác đã tìm ở ví dụ 2-1 là $P_{th} = 2,47 \frac{EJ}{l^2}$. Như vậy, sai số là 20%.

§4. PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN

Nội dung của phương pháp sai phân là thay thế việc giải bài toán vi phân bằng việc giải hệ phương trình đại số thiết lập dưới dạng sai phân.

Trong phương pháp này, ta tiến hành theo thứ tự:

1. Thay phương trình vi phân của đường biến dạng (đường đàn hồi) ở trạng thái biến dạng lệch bằng các phương trình sai phân.

2. Giả thiết chuyển vị tại một số điểm của hệ ở trạng thái biến dạng lệch. Sau đó, dùng các phương trình sai phân và các điều kiện biên để thiết lập hệ phương trình đại số với các ẩn là các chuyển vị.

Do tính chất của dạng cân bằng phiếm định phân nhánh thành 2 dạng (dạng cân bằng ổn định và dạng cân bằng lệch lân cận so với dạng cân bằng ổn định), nên hệ phương trình đại số là thuần nhất.

3. Lập phương trình ổn định bằng cách cho định thức của hệ phương trình đại số thuần nhất bằng không.

4. Giải phương trình ổn định để tìm lực tới hạn.

a. Đối với các thanh, khi thay đường chuyển vị là đường cong bằng đường gãy khúc với n khoảng chia Δz đều nhau dọc theo chiều dài trục thanh, ta có sai phân (Hình 2-4):

$$\Delta y = y_i - y_{i-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta z} = \operatorname{tg} \alpha_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta z}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta z};$$

$$\Rightarrow \Delta \left(\frac{\Delta y}{\Delta z} \right) = \Delta (\operatorname{tg} \alpha_i) = \operatorname{tg} \alpha_{i+1} - \operatorname{tg} \alpha_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta z} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta z} \quad \text{Hình 2-4}$$

$$\text{Nên } \frac{\Delta^2 y}{\Delta z^2} = \frac{\Delta}{\Delta z} \left(\frac{\Delta y}{\Delta z} \right) = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta z^2} - \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta z^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta z^2}$$

b. Nếu đường vi phân đường biến dạng của hệ có dạng (trường hợp thanh có liên kết khớp ở hai đầu)

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \alpha^2 y = 0 \quad (2-3)$$

$$\text{Trong đó: } \alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}} \quad (2-4)$$

Thì tại mỗi điểm i , sau khi thay $\frac{d^2 y}{dz^2}$ bằng sai phân $\frac{\Delta^2 y}{\Delta z^2}$ và thay y bằng y_i , ta được hệ phương trình sai phân:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta z^2} + \alpha^2 y_i = 0$$

$$\text{Với } \alpha_i = \sqrt{\frac{P}{EJ_i}}$$

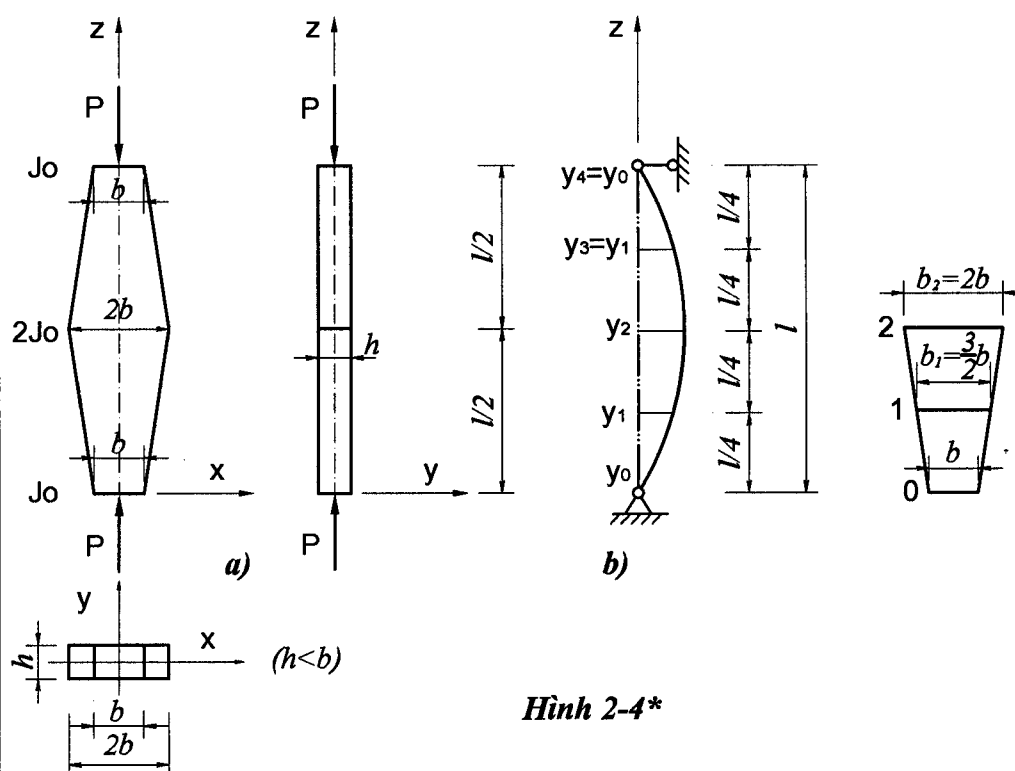
$$\text{Hay } y_{i-1} + (\beta_i^2 - 2)y_i + y_{i+1} = 0 \quad (2-5)$$

$$[i = 1, 2, 3 \dots n-1]$$

$$\text{Trong đó: } \beta_i^2 = \alpha_i^2 \Delta z^2 = \frac{P}{EJ_i} \Delta z^2 \quad (2-6)$$

Nếu chia hệ thành ra làm n khoảng, thì số ẩn y_i nói chung bằng $n+1$ ($y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$), còn số phương trình sai phân chỉ có $(n-1)$. Do đó, để giải bài toán này, ta cần bổ sung thêm hai điều kiện biên. Đây là phương pháp gần đúng, áp dụng hiệu quả cho hệ có tiết diện thay đổi theo quy luật phức tạp.

Ví dụ 2-4: Dùng phương pháp sai phân để xác định tải trọng tối hạn cho thanh chịu nén có tiết diện thay đổi. (Hình 2-4*)



Hình 2-4*

Bài giải:

1. Chia thanh làm 4 đoạn, với $\Delta z = \frac{l}{4}$ (Hình 2-4*b)

Xác định mômen quán tính tại các điểm 0, 1, 2, ta có:

Tại "0": $J_0 = \frac{bh^3}{12} = J_x$

Tại "1": $J_1 = \frac{1,5bh^3}{12} = 1,5J_0$

Tại "2": $J_2 = \frac{2bh^3}{12} = 2J_0$

Đặt $\beta_0^2 = \frac{P}{EJ_0} \cdot \frac{l^2}{16}$

Suy ra: $\beta_1^2 = \frac{P}{EJ_1} \cdot \frac{l^2}{16} = \frac{2}{3} \left(\frac{P}{EJ_0} \cdot \frac{l^2}{16} \right) = \frac{2}{3} \beta_0^2$

$\beta_2^2 = \frac{P}{EJ_2} \cdot \frac{l^2}{16} = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{EJ_0} \cdot \frac{l^2}{16} \right) = \frac{1}{2} \beta_0^2$

2. Các phương trình sai phân với các điều kiện $y_0 = 0, y_1 = y_3$, có dạng:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3} \beta_0^2 - 2 \right) y_1 + y_2 = 0 \\ 2y_1 + \left(\frac{1}{2} \beta_0^2 - 2 \right) y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} \left(\frac{2}{3} \beta_0^2 - 2 \right) & 1 \\ 2 & \left(\frac{1}{2} \beta_0^2 - 2 \right) \end{vmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

3. Phương trình ổn định. Từ điều kiện $y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$, ta được:

$$D = \begin{vmatrix} (\frac{2}{3}\beta_0^2 - 2) & 1 \\ 2 & (\frac{1}{2}\beta_0^2 - 2) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\beta_0^2)^2 - 7(\beta_0^2) + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_0^2 = 1 \\ \beta_0^2 = 6 \end{cases}$$

Nghiệm nhỏ nhất $\beta_0^2 = 1$; do đó:

$$\beta_0^2 = \frac{P_{th}}{EJ_0} \cdot \frac{l^2}{16} = 1$$

$$\Rightarrow P_{th} = 16 \frac{EJ_0}{l^2}$$

Kết quả chính xác bằng $16,48 \frac{EJ_0}{l^2}$; sai số là 2,91%

§5. PHƯƠNG PHÁP BUPNOV - GALERKIN

Phương pháp Bupnov - Galerkin là phương pháp gần đúng trên cơ sở tìm nghiệm gần đúng của phương trình vi phân thông qua hệ phương trình đại số tuyến tính.

1. Phương trình vi phân cân bằng của hệ ở trạng thái lệch có dạng tổng quát:

$$L(z, y, y', y'', \dots) = 0 \quad (2-7)$$

2. Giả sử nghiệm của phương trình vi phân này có thể viết dưới dạng chuỗi:

$$y = \sum_{i=1}^p f_i \varphi_i(z) \quad (2-8)$$

Trong đó: p - số nguyên bất kỳ

f_i - các hệ số chưa biết

$\varphi_i(z)$ - các hàm số độc lập tuyến tính và thỏa mãn:

+ Các điều kiện biên về hình học, nếu phương trình (2-7) là phương trình bậc 2

+ Các điều kiện biên về hình học lẫn tĩnh học nếu phương trình (2-7) là phương trình bậc 4.

3. Theo Galoockin, các hệ số f_i được xác định từ p phương trình đại số sau:

$$\int L \left\{ z, \sum_{i=1}^p f_i \varphi_i(z), \sum_{i=1}^p f_i \varphi_i'(z), \sum_{i=1}^p f_i \varphi_i''(z), \dots \right\} \varphi_j(z) dz = 0 \quad (2-9)$$

(với $j = 1, 2, 3 \dots p$)

Dấu tích phân trong các phương trình trên áp dụng cho toàn hệ. Kết quả ta được p phương trình đại số thuần nhất với p ẩn số $f_1, f_2, f_3, \dots, f_p$

4. Để cho các ẩn số f_i tồn tại khác không (tức tồn tại cân bằng ổn định mới- trạng thái lệch) thì định thức của hệ phương trình này phải bằng không.

Điều kiện định thức bằng không là phương trình cân bằng của hệ.

Phương pháp này áp dụng có hiệu quả đối với hệ có bậc tự do là vô cùng và cho kết quả càng chính xác nếu chọn nhiều hàm độc lập $\varphi_i(z)$.

Ví dụ 2-5: Tìm lực tối hạn cho thanh có tiết diện thay đổi đã xét ở ví dụ 2-4

Bài giải:

1. Phương trình vi phân cân bằng của hệ ở trạng thái lệch:

$$L = y'' + \alpha^2 y = 0 \quad (a)$$

$$\text{Với } \alpha^2 = \frac{P}{EJ}$$

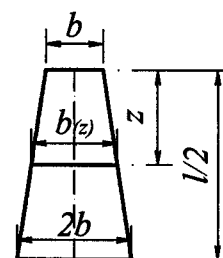
2. Chọn nghiệm gần đúng của phương trình (a) là:

$$y = f_1 \sin \frac{\pi z}{l} \quad (b)$$

$$\text{Hàm } \varphi_1(z) = \sin \frac{\pi z}{l} \text{ thoả mãn điều kiện } \begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_2(l) = 0 \end{cases}$$

$$\varphi'_1(z) = \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l}$$

$$\varphi''_1(z) = -\frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l}$$



Mômen quán tính thay đổi theo quy luật bậc 1 có dạng:

$$J(z) = \frac{b(z)h^3}{12} \quad \text{vì} \quad b(z) = b\left(1 + \frac{2z}{l}\right)$$

$$J(z) = J_0\left(1 + \frac{2z}{l}\right) \quad \text{với} \quad J_0 = \frac{bh^3}{12}$$

3. Thiết lập phương trình (2-9):

$$2 \int_0^{l/2} L\varphi_1(z) dz = 2 \int_0^{l/2} \left[-\frac{\pi^2}{l^2} f_1 \sin \frac{\pi z}{l} + \frac{P}{EJ_0\left(1 + \frac{2z}{l}\right)} f_1 \sin \frac{\pi z}{l} \right] \sin \frac{\pi z}{l} dz = 0$$

4. Từ điều kiện $f_1 \neq 0$, suy ra:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_0}{l^2} \frac{\int_0^{l/2} \left(1 + \frac{2z}{l}\right) \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz}{\int_0^{l/2} \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz} = 16,74 \frac{EJ_0}{l^2}$$

So với kết quả chính xác $P_{th} = 16,48 \frac{EJ_0}{l^2}$, sai số 1,5%.

§6. PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG ÁP DỤNG TRỰC TIẾP NGUYÊN LEJEUNE - DIRICHLET

Theo biểu hiện trong §4- Chương mở đầu, trạng thái cân bằng phiếm định xảy ra khi:

$$\delta V = \delta T \quad (2-10)$$

Trong đó: δT - số gia của công ngoại lực;

δV - số gia của thế năng biến dạng đàn hồi.

Điều kiện (2-10) là phương trình xác định lực tối hạn theo phương pháp năng lượng.

1. Số gia của thế năng biến dạng đàn hồi δV :

Trong trường hợp tổng quát, sự biến thiên năng lượng biến dạng đàn hồi xác định theo công thức sau:

$$\delta V = \sum \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EJ} + \sum \frac{1}{2} \int \frac{N^2 ds}{EF} + \sum \frac{1}{2} \int \mu \frac{Q^2 ds}{GF} \quad (2-11)$$

Trong đó:

+ M, N, Q - nội lực trong hệ xuất hiện khi hệ ở trạng thái cân bằng lệch so với trạng thái ban đầu.

+ μ - hệ số điều chỉnh kể đến sự phân bố nội lực không đều của ứng suất tiếp.

+ \sum - áp dụng cho tất cả các cấu kiện của hệ

a, Trường hợp có thể bỏ qua biến dạng trượt và biến dạng dọc, ta có:

$$\delta V = \sum \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EJ},$$

Dựa vào phương trình đường vi phân gần đúng của đường đàn hồi:

$$EJy'' = -M$$

$$\text{Ta có: } \delta V = \frac{1}{2} \sum \int EJ(y'')^2 ds \quad (2-12)$$

b, Trường hợp khi trong hệ chỉ tồn tại lực dọc N (trường hợp dãn khớp), ta có:

$$\delta V = \frac{1}{2} \sum \frac{N^2 l}{EF} \quad (2-13)$$

2. Số gia δT của công các ngoại lực phụ thuộc dạng tải trọng, do đó, cần xác định riêng biệt cho từng bài toán.

Trường hợp hệ chỉ chịu tác dụng của các lực tập trung P_k đặt tại các nút hoặc tại các đầu thanh, có thể xác định δT như sau:

$$\delta T = \sum_{k=1}^m P_k \delta p_k \quad (2-14)$$

Trong đó:

+ δp_k - chuyển vị theo phương lực P_k của điểm đặt lực P_k .

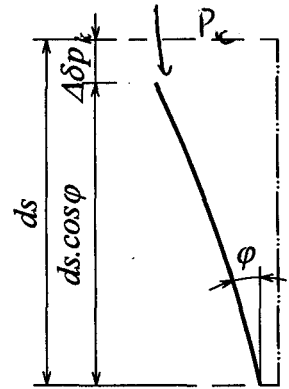
+ m - số tải trọng đặt ở các nút hoặc các đầu thanh.

Giá trị δp_k được xác định như sau:

$$\delta p_k = \int_0^{l_k} \Delta \delta p_k$$

Trong đó: $\Delta \delta p_k$ - độ biến thiên chiều dài của phân tố ds của thanh chịu lực P_k khi phân tố ds xoay một góc φ (Hình 2-5).

l_k - chiều dài của thanh chịu lực nén P_k .



Hình 2 - 5

$$\Delta \delta p_k = ds - ds \cdot \cos \varphi = ds(1 - \cos \varphi) = 2ds \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2} \approx 2ds \cdot \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 \approx \frac{1}{2} \text{tg}^2 \varphi ds = \frac{1}{2} (y')^2 ds$$

Do đó:
$$\delta p_k = \int_0^{l_k} \frac{1}{2} (y')^2 ds$$

Suy ra:
$$\delta T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m P_k \int_0^{l_k} (y')^2 ds \quad (2-15)$$

Để xác định lực tối hạn, ta tiến hành theo trình tự sau:

- Tự cho trước đường biến dạng y của hệ ở trạng thái lệch phù hợp với các điều kiện biên.
- Xác định số gia của thế năng biến dạng đàn hồi theo các công thức (2-12) - (2-13).
- Xác định số gia của công các ngoại lực (2-15).
- Thiết lập phương trình ổn định theo (2-10). Từ đó suy ra lực tối hạn cần tìm.

Nhược điểm: những kết quả tìm được theo phương pháp này thường lớn hơn kết quả chính xác. Khuyết điểm của phương pháp là phải tự cho trước đường biến dạng. Nếu đường biến dạng chọn trước đúng thì kết quả chính xác, nếu đường biến dạng cho trước gần với thực tế thì kết quả càng chính xác. Ngoài ra, sau khi xác định được lực tối hạn gần đúng, ta không phán đoán được mức độ chính xác.

Ví dụ 2-6: Xác định lực tới hạn P_{th} của thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do bằng phương pháp năng lượng. $EJ = \text{const}$

Bài giải:

1. Cho trước phương trình đường biến dạng của thanh:

$$y = \delta \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2l} \right)$$

Phương trình này thỏa mãn điều kiện biên:

$$\text{Khi } z = 0, y = 0$$

$$\text{Khi } z = l, y = \delta$$

2. Số gia δV của thế năng biến dạng đàn hồi, theo (2-12) ta có:

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (y'')^2 dz = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\frac{\delta \pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi z}{2l} \right)^2 dz = \frac{EJ}{64} \frac{\delta^2 \pi^4}{l^3}$$

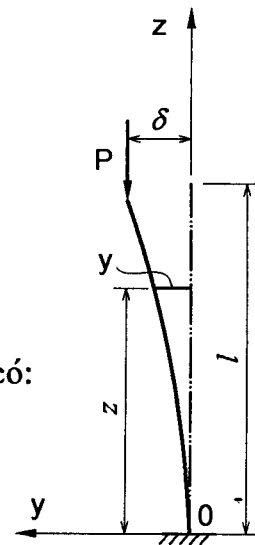
3. Số gia của công ngoại lực, theo (2-15), ta có:

$$\delta T = \frac{1}{2} P \int_0^l (y')^2 dz = \frac{1}{2} P \int_0^l \left(\frac{\delta \pi}{2l} \sin \frac{\pi z}{2l} \right)^2 dz = P \frac{\delta^2 \pi^2}{16l}$$

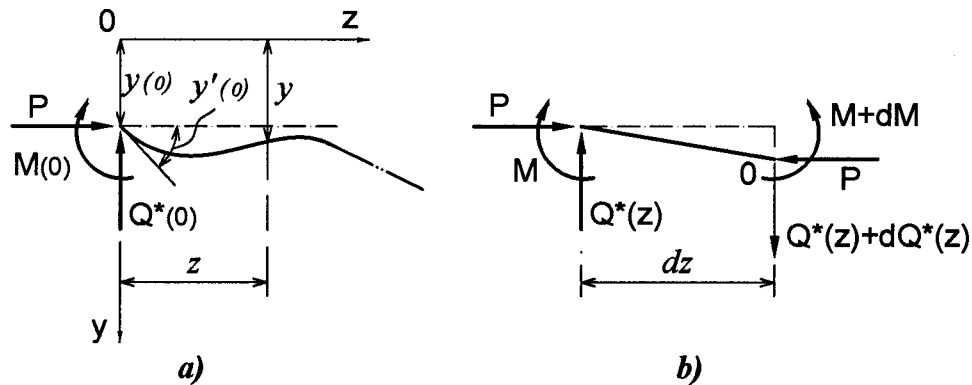
4. Phương trình ổn định, theo (2-10), ta có:

$$P \frac{\delta^2 \pi^2}{16l} = \frac{EJ}{64} \frac{\delta^2 \pi^4}{l^3} \Rightarrow P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

Kết quả tìm được là chính xác, vì đường biến dạng chính xác của thanh có dạng như dạng đã cho.



Hình 2-6

CHƯƠNG III. ỔN ĐỊNH CỦA CÁC THANH THẲNG**§1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG ĐÀN HỒI TRONG THANH CHỊU UỐN DỌC****Hình 3-1**

Để tìm các phương trình tổng quát của đường đàn hồi trong thanh chịu uốn dọc khi mất ổn định, ta nghiên cứu thanh chịu lực nén P ở trạng thái cân bằng biến dạng với các chuyển vị nhỏ.

Giả sử, ở trạng thái biến dạng, ở đầu trái thanh (Hình 3-1a):

$y(0)$ - chuyển vị thẳng theo phương trục y ;

$y'(0)$ - chuyển vị góc;

$M(0)$ - mômen uốn;

$Q^*(0)$ - thành phần lực vuông góc với vị trí ban đầu của thanh.

Mômen uốn tại mặt cắt bất kỳ của thanh ở trạng thái biến dạng:

$$M(z) = M(0) + Q^*(0)z + P[y - y(0)]$$

Từ phương trình vi phân của đường đàn hồi

$$y'' = -\frac{M}{EJ},$$

Ta có:
$$y'' = -\frac{M(0) + Q^*(0)z + P[y - y(0)]}{EJ}$$

Hay:
$$y'' + \alpha^2 y = -\frac{M(0) + Q^*(0)z - Py(0)}{EJ} \quad (3-1)$$

Trong đó: $\alpha^2 = \frac{P}{EJ}$; ta có:
$$(3-2)$$

Nghiệm của phương trình vi phân có dạng:

$$y(z) = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z - \frac{[M(0) + Q^*(0)z - Py(0)]}{\alpha^2 EJ} \quad (3-3)$$

Trong đó A, B - các hằng số tích phân, được xác định theo điều kiện biên ở đầu trái, khi $z = 0$:

$$y'(z) = \alpha A \cos \alpha z - \alpha B \sin \alpha z - \frac{Q^*(0)}{\alpha^2 EJ} \quad (3-4)$$

Điều kiện biên ở đầu trái, khi $z = 0$, ta có như sau:

$$\begin{cases} y|_{z=0} = y(0) = B - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ} + \frac{Py(0)}{\alpha^2 EJ} \\ y'|_{z=0} = y'(0) = \alpha A - \frac{Q^*(0)}{\alpha^2 EJ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ} \\ A = \frac{y'(0)}{\alpha} + \frac{Q^*(0)}{\alpha^3 EJ} \end{cases}$$

Thay A, B vào (3-3), ta được phương trình đường đàn hồi:

$$y(z) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha} \sin \alpha z - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha z) - \frac{Q^*(0)}{\alpha^3 EJ} (\alpha z - \sin \alpha z) \quad (3-5)$$

Trong phương trình (3-5), các đại lượng $y(0)$, $y'(0)$, $M(0)$, $Q^*(0)$ gọi là các thông số ban đầu.

Từ (3-5), ta tìm được phương trình góc xoay và phương trình mômen uốn trong thanh.

$$y'(z) = y'(0) \cos \alpha z - \frac{M(0)}{\alpha EJ} \sin \alpha z - \frac{Q^*(0)}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha z) \quad (3-6)$$

$$M(z) = -EJy''(z) = \alpha EJy'(0) \sin \alpha z + M(0) \cos \alpha z + \frac{Q^*(0)}{\alpha} \sin \alpha z \quad (3-7)$$

Vì $Q^*(z)$ là thành phần nội lực vuông góc với trục ban đầu của thanh (theo sơ đồ thanh không biến dạng), nên điều kiện cân bằng trên (hình 3-1b) là :

$$Q^*(z)dz + Pdy + M - (M + dM) = 0$$

Ta xác định được:

$$Q^*(z) = \frac{dM}{dz} - P \frac{dy}{dz} \quad (3-8)$$

Các phương trình (3-5) \rightarrow (3-8) được thiết lập trong trường hợp chuyển vị, nội lực trong thanh là liên tục. Nếu dọc theo chiều dài của thanh, chuyển vị, nội lực có bước nhảy (gián đoạn), ta cần thiết lập các phương trình chuyển vị, nội lực cho từng đoạn thanh, trong đó các đại lượng này là liên tục.

§2. ỔN ĐỊNH CỦA CÁC THANH THẲNG CÓ LIÊN KẾT CỨNG Ở 2 ĐẦU

Xét thanh có khớp ở hai đầu (Hình 3-2)

Đối với trường hợp này, các thông số ban đầu có giá trị như sau:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = ? \\ M(0) = 0 \\ Q^*(0) = 0 \end{cases}$$

Do đó, từ phương trình tổng quát (3-5):

$$y(z) = \frac{y'(0)}{\alpha} \sin \alpha z$$

Theo điều kiện biên, khi $z = l$ thì $y(l) = 0$, ta có :

$$y(l) = \frac{y'(0)}{\alpha} \sin \alpha l = 0$$

Điều kiện này thỏa mãn với hai khả năng:

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ \sin \alpha l = 0 \end{cases}$$

a) Nếu $y'(0) = 0$ thì $y(z) \equiv 0$, tức thanh vẫn thẳng chưa mất ổn định.

b) Muốn P đạt tới giá trị tới hạn ứng với trạng thái mất ổn định, thì trong hệ phải tồn tại một trạng thái cân bằng khác với trạng thái cân bằng ban đầu, tức $y'(0) \neq 0$.

Vì vậy, điều kiện để đạt được trạng thái cân bằng lệch là:

$$\sin \alpha l = 0 \Rightarrow \alpha l = k\pi \quad (k=1, 2, \dots)$$

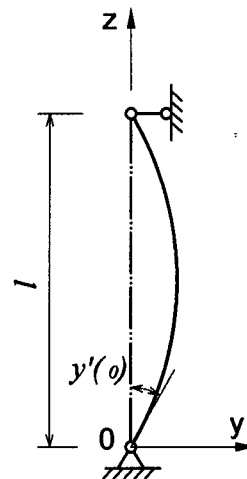
Tải trọng tới hạn nhỏ nhất ứng với $k=1 \Rightarrow P_{th1} = \frac{\pi^2}{l^2} EJ$

Công thức này là công thức Euler đã quen biết trong SBVL

✦ Áp dụng phương pháp trên, ta có thể tìm P_{th} các trường hợp khác. Lực tới hạn trong các trường hợp khác có thể biểu thị dưới dạng chung:


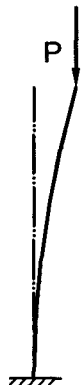

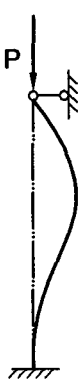
$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} \quad (3-9)$$

Trong đó: μ - hệ số phụ thuộc vào dạng liên kết hai đầu thanh, có giá trị cho trong bảng 3-1.



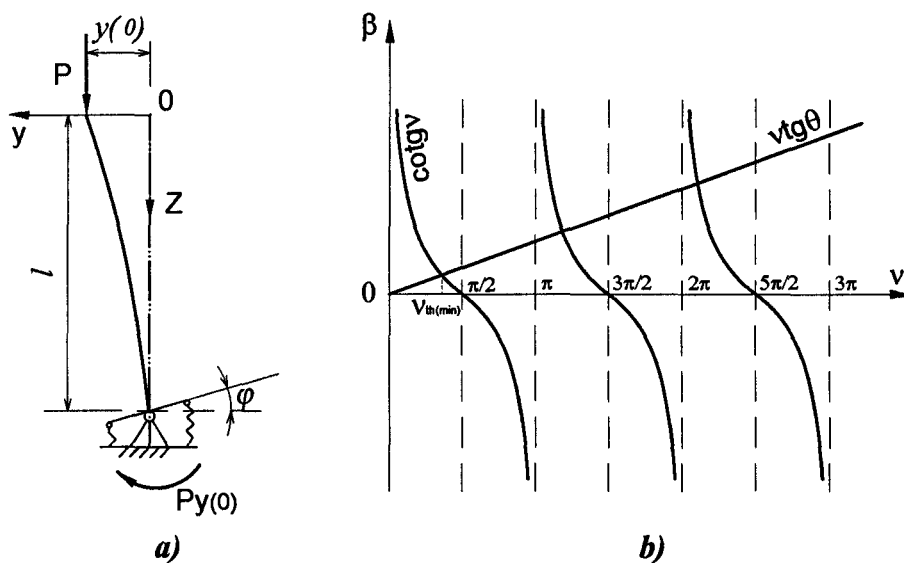
Hình 3-2

Bảng 3-1

Sơ đồ thanh				
μ	1	2	0,5	0,7

§3. ỔN ĐỊNH CỦA CÁC THANH THẲNG CÓ LIÊN KẾT ĐÀN HỒI

Giả sử, xét thanh có một đầu tự do và một đầu liên kết ngàm đàn hồi (Hình 3-3a)



Hình 3-3

1. Các thông số ban đầu (Hình 3-3a):

$$\text{Khi } z = 0: \begin{cases} y(0) = ? \\ y'(0) = ? \\ M(0) = 0 \\ Q^*(0) = 0 \end{cases}$$

2. Các phương trình (3-5), (3-6) có dạng:

$$\begin{cases} y(z) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha} \sin \alpha z \\ y'(z) = y'(0) \cos \alpha z \end{cases}$$

3. Các điều kiện biên:

$$\text{Khi } z = l: \begin{cases} y(l) = 0 \\ y'(l) = \varphi \end{cases}$$

Gọi $\bar{\varphi}$ - hệ số đàn hồi của liên kết (tức là góc xoay của ngàm đàn hồi do mômen bằng đơn vị gây ra), thì trong trường hợp này, vì mômen tại ngàm đàn hồi bằng $-Py(0)$, cho nên:

$$\varphi = -Py(0)\bar{\varphi} \quad (\text{chiều mômen ngược chiều chuyển vị})$$

Dựa vào điều kiện biên, ta lập được hệ phương trình đại số tuyến tính thuần nhất để xác định $y(0)$ và $y'(0)$:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y(l) = 0 \\ y'(l) = \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) + \frac{\sin \alpha l}{\alpha} y'(0) = 0 \\ P\bar{\varphi} y(0) + (\cos \alpha l) y'(0) = 0 \end{cases}$$

4. Từ điều kiện tồn tại trạng thái cân bằng lệch so với trạng thái cân bằng ban đầu, tức $y(0) \neq 0, y'(0) \neq 0$, ta được phương trình ổn định:

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\sin \alpha l}{\alpha} \\ P\bar{\varphi} & \cos \alpha l \end{vmatrix} = 0$$

$$D(\alpha) = \cos \alpha l - \sin \alpha l \frac{P\bar{\varphi}}{\alpha} = 0$$

$$\text{Vì } \alpha^2 = \frac{P}{EJ} \Rightarrow P = \alpha^2 EJ \Rightarrow D(\alpha) = \cos \alpha l - (\sin \alpha l) \cdot \alpha EJ \bar{\varphi} = 0$$

$$\text{hay } \alpha l \cdot \tan \alpha l = \frac{l}{EJ \bar{\varphi}} \quad (3-10)$$

5. Giải phương trình ổn định:

$$\text{Đặt } \nu = \alpha l; \quad \frac{l}{EJ \bar{\varphi}} = \frac{1}{\tan \theta} \text{ thì phương trình ổn định trên có dạng:}$$

$$\cot \nu = \nu \tan \theta$$

Để giải phương trình siêu việt này, ta dùng phương pháp đồ thị, lần lượt vẽ các đường biểu diễn các hàm số.

$$\begin{cases} \beta = \cot \nu \\ \beta = \nu \tan \theta \end{cases} \text{ theo biến số } \nu \text{ như trên (Hình 3-3b) để tìm giao điểm của}$$

chúng. Hoành độ của những giao điểm này xác định các nghiệm cần tìm. Nghiệm có ý nghĩa thực tế là nghiệm cho lực tới hạn có giá trị nhỏ nhất.

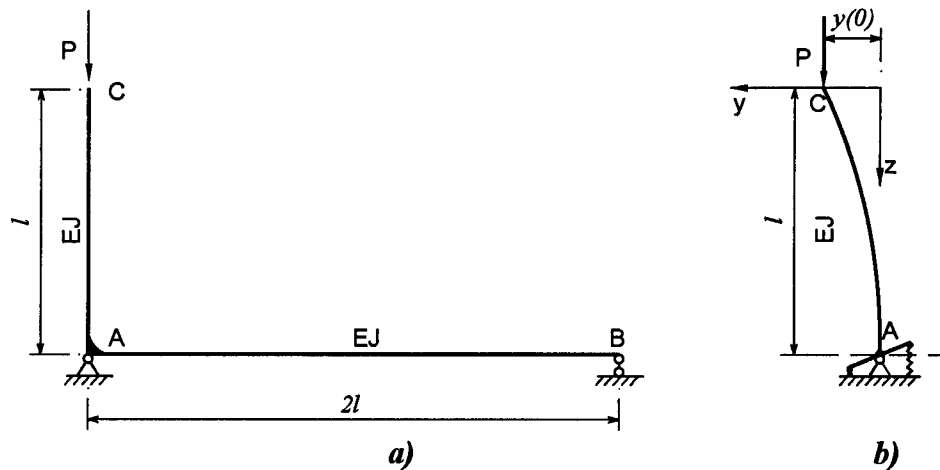
Sau khi tìm được v_{th} , suy ra $\alpha_{th} = \frac{v_{th}}{l}$, từ đó ta tính được lực tối hạn tương ứng.

Từ (Hình 3-3b), cho thấy:

$$v_{thmin} < \frac{\pi}{2}, \text{ do đó } v_{thmin} = \alpha_{thmin} l = l \sqrt{\frac{P_{thmin}}{EJ}} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{thmin} < \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

Tức lực tối hạn (nhỏ nhất) của thanh một đầu tự do, một đầu ngàm đàn hồi nhỏ hơn so với lực tối hạn (nhỏ nhất) của thanh có liên kết một đầu tự do, một đầu ngàm cứng.

Ví dụ 3-1: Xác định lực tối hạn cho thanh vẽ trên hình 3-4a. Biết các thanh có độ cứng $EJ = \text{const}$.



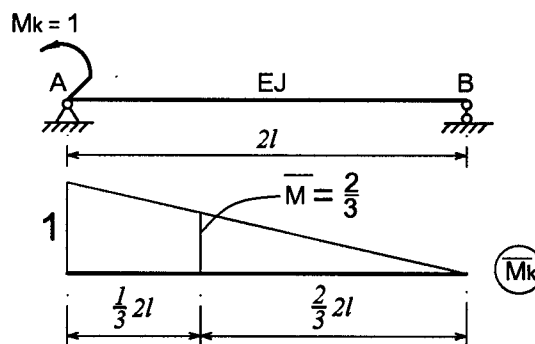
Hình 3-4

Bài giải: Ta xem thanh AC như thanh có liên kết một đầu tự do, một đầu ngàm đàn hồi. Sơ đồ tính hệ như trên (Hình 3-4b).

Gọi $\bar{\varphi}$ là hệ số đàn hồi của ngàm đàn hồi A, $\bar{\varphi}$ là góc xoay của mặt cắt A của dầm AB do mômen đơn vị $\bar{M}_k = 1$ đặt tại A gây ra (Hình 3-5)

Xác định $\bar{\varphi}$ theo phương pháp nhân biểu đồ Vê - rê - sa - ghin:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{EJ} M \bar{M}_k = \frac{1}{EJ} \Omega \bar{M}_k = \frac{1}{EJ} l \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{2l}{3EJ}$$



Hình 3-5

Theo công thức (3-10), ta có :

$$\alpha \tan \alpha l = \frac{l}{EJ\varphi} = \frac{l}{EJ} \cdot \frac{3EJ}{2l} = 1,5$$

Hay $\frac{\nu}{\cot \nu} = 1,5 \Rightarrow \cot \nu = \frac{\nu}{1,5} = \beta$

Giải theo đồ thị hay phương pháp thử dần, ta được:

$$\nu_{th} = 1,01 \Rightarrow \alpha_{th} = \frac{\nu_{th}}{l} = \sqrt{\frac{P_{th}}{EJ}} \Rightarrow P_{th} = \frac{\nu_{th}^2}{l^2} EJ = 1,02 \frac{EJ}{l^2}$$

§4. ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU LỰC ĐẶT BẤT KỲ DỌC THEO CHIỀU DÀI THANH

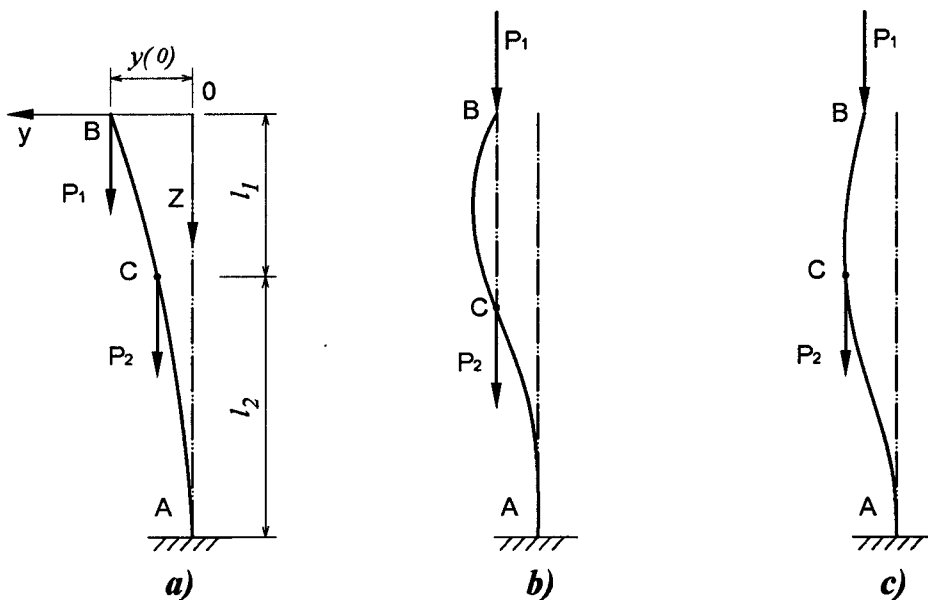
A. Phương pháp chính xác:

Để tính ổn định của thanh thẳng chịu lực đặt bất kỳ dọc theo chiều dài thanh, ta chia thanh ra thành từng đoạn, trong đó chuyển vị và nội lực là liên tục để lần lượt thiết lập phương trình (3-5)

Sau đó, dựa vào các điều kiện biên ở các đầu thanh và các điều kiện nối tiếp giữa các đoạn thanh, ta thiết lập phương trình ổn định, tức là thiết lập điều kiện tồn tại dạng cân bằng ở trạng thái biến dạng lệch của thanh khi mất ổn định.

Giả sử, xét thanh có một đầu tự do, một đầu ngàm, chịu tác dụng của một số lực tập trung. (Hình 3-6)

Xét thanh chịu tác dụng của hai lực: lực P_1 đặt ở đỉnh, lực P_2 đặt ở vị trí bất kỳ trong nhịp (Hình 3-6). Các lực P_1, P_2 luôn luôn một quan hệ tỷ lệ nhất định. Trong trường hợp này, ta chia thanh làm 2 đoạn:



Hình 3-6

a. Đoạn thứ nhất (BC): Lấy gốc tọa độ tại B ($0 \leq z \leq l_1$)

Các thông số ban đầu tại gốc B:

$$\begin{cases} y(0) \neq 0 \\ y'(0) \neq 0 \\ M(0) = 0 \\ Q^*(0) = 0 \end{cases}$$

Các phương trình chuyển vị và nội lực (3 - 5) ÷ (3 - 8):

$$\begin{cases} y_1(z) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha_1} \sin \alpha_1 z \\ y'_1(z) = y'(0) \cos \alpha_1 z \\ M_1(z) = \alpha_1 EJ y'(0) \sin \alpha_1 z \\ Q_1^*(z) = M'_1(z) - P y'_1(z) = 0 \end{cases} \quad \text{trong đó} \quad \alpha_1^2 = \frac{P_1}{EJ}$$

b. Đoạn thứ hai (CA): Để viết phương trình cho đoạn thứ 2 dễ dàng, ta chọn lại gốc tọa độ và lấy điểm đặt lực P_2 làm gốc. Lúc này, z biến thiên trong khoảng $0 \leq z \leq l_2$.

$$\text{Đặt } \alpha_2^2 = \frac{P_1 + P_2}{EJ}$$

Theo điều kiện liên tục giữa hai đoạn, ta xác định các thông số ban đầu của đoạn thứ hai như sau:

$$\begin{cases} y_2(0) = y_1(l_1) = y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha_1} \sin \alpha_1 l_1 \\ y'_2(0) = y'_1(l_1) = y'(0) \cos \alpha_1 l_1 \\ M_2(0) = M_1(l_1) = P_1 \frac{y'(0)}{\alpha_1} \sin \alpha_1 l_1 \\ Q_2^*(0) = Q_1^*(l_1) = 0 \end{cases}$$

Theo (3-5) và (3-6), ta viết các phương trình chuyển vị cho đoạn thứ hai:

$$\begin{aligned} y_2(z) &= \left[y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha_1} \sin \alpha_1 l_1 \right] + y'(0) \cos \alpha_1 l_1 \frac{\sin \alpha_2 z}{\alpha_2} - \frac{P_1}{P_1 + P_2} \cdot \frac{y'(0)}{\alpha_1} \sin \alpha_1 l_1 (1 - \cos \alpha_2 z) \\ y'_2(z) &= y'(0) \cos(\alpha_1 l_1) \cos \alpha_2 z - \alpha_2 \frac{P_1}{P_1 + P_2} \frac{y'(0)}{\alpha_1} \sin(\alpha_1 l_1) \sin \alpha_2 z \end{aligned}$$

Theo điều kiện biên ở ngàm A:

$$\begin{cases} y_2(l_2) = 0 \\ y'_2(l_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left[y(0) + \frac{y'(0)}{\alpha_1} \sin \alpha_1 l_1 \right] + y'(0) \cos \alpha_1 l_1 \frac{\sin \alpha_2 l_2}{\alpha_2} - \frac{P_1}{P_1 + P_2} \cdot \frac{y'(0)}{\alpha_1} \sin \alpha_1 l_1 (1 - \cos \alpha_2 l_2) = 0 \\ y'(0) \cos(\alpha_1 l_1) \cos \alpha_2 l_2 - \alpha_2 \frac{P_1}{P_1 + P_2} \frac{y'(0)}{\alpha_1} \sin(\alpha_1 l_1) \sin \alpha_2 l_2 = 0 \end{cases}$$

Để thiết lập điều kiện tồn tại $y(0)$, $y'(0)$, ta cho định thức các hệ số bằng không - đó là phương trình ổn định. Sau khi triển khai định thức ta được phương trình ổn định.

$$\cos(\alpha_1 l_1) \cos \alpha_2 l_2 \left[1 - \frac{P_1}{P_1 + P_2} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \operatorname{tg}(\alpha_1 l_1) \operatorname{tg} \alpha_2 l_2 \right] = 0 \quad (3-11)$$

Phương trình ổn định (3-11) thỏa mãn với một trong 3 trường hợp sau:

$$1. \operatorname{tg}(\alpha_1 l_1) \operatorname{tg} \alpha_2 l_2 = \frac{P_1 + P_2}{P_1} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (3-12a)$$

Lúc này hệ sẽ mất ổn định theo dạng vẽ trên hình 3-6a.

$$2. \cos \alpha_2 l_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 l_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{(P_1 + P_2)}{EJ}} = \frac{\pi}{2l_2} \Rightarrow (P_1 + P_2)_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{4l_2^2} \quad (3-12b)$$

Điều đó chứng tỏ, khi mất ổn định, thanh AC có đường biến dạng giống như thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do, tại điểm C có điểm uốn, do đó, lực P_1 sẽ đi qua điểm C (Hình 3-6b)

$$3. \cos \alpha_1 l_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 l_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{2l_1} = \sqrt{\frac{P_{1th}}{EJ}} = \frac{\pi}{2l_1} \Rightarrow P_{1th} = \frac{\pi^2 EJ}{4l_1^2} \quad (3-12c)$$

Lúc này, hệ mất ổn định theo dạng hình 3-6c, đoạn thanh CB có đường biến dạng giống như thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do, tiếp tuyến tại C sẽ thẳng đứng.

Ví dụ 3-2:

Xác định lực tới hạn cho thanh vẽ trên hình 3-7;

Cho biết: $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$

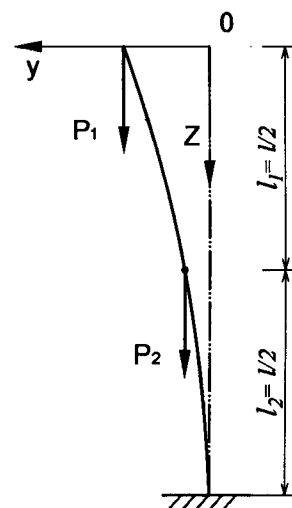
$$P_1 = P; \quad P_2 = 3P$$

Bài giải:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{P_1}{EJ}} = \alpha; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{P_1 + P_2}{EJ}} = 2\sqrt{\frac{P}{EJ}} = 2\alpha$$

1. Theo phương trình (3-12a)

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 l_1) \operatorname{tg} \alpha_2 l_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$



Hình 3-7

$$\text{Hay } \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} \operatorname{tg} \nu = 2 \quad \text{với } \nu = \alpha l = l \sqrt{\frac{P_1}{EJ}} = l \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

Sau khi giải phương trình này, ta được $\nu = 1,23$, do đó:

$$P_{th} = 1,23^2 \frac{EJ}{l^2} = 1,513 \frac{EJ}{l^2}$$

2. Theo phương trình (3-12b):

$$\cos \alpha_2 l_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 l_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\alpha \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{4l_2^2}$$

3. Theo phương trình (3-12c):

$$\cos \alpha_1 l_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 l_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

Ta thấy lực tối hạn xác định theo (3-12b) và (3-12c) có giá trị lớn hơn lực tối hạn xác định theo (3-12a).

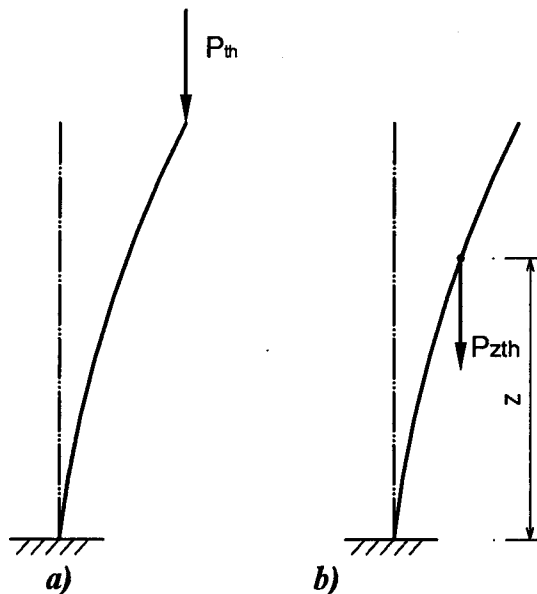
$$\text{Vậy } P_{th} = 1,513 \frac{EJ}{l^2}$$

Đối với trường hợp thanh chịu nhiều lực tác dụng, nguyên tắc tính cũng tương tự, song bài toán phức tạp nhiều. Trong thực tế, ta nên dùng phương pháp gần đúng để tính.

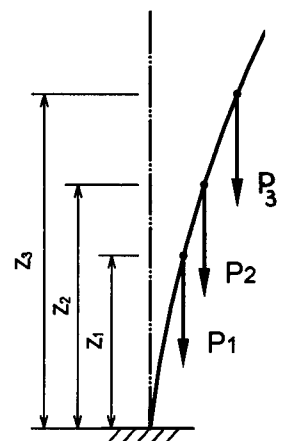
B. Cách tính gần đúng:

Giáo sư A. N. Kôrôbốp đề ra phương pháp tính gần đúng để xác định lực tối hạn cho thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do, chịu tác dụng của nhiều lực nén dọc theo trục thanh.

Xét hai trường hợp thanh chịu lực (Hình 3-8a, b)



Hình 3-8



Hình 3-9

Theo công thức Euler, lực tới hạn trong trường hợp thứ nhất (Hình 3-8a) là:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2},$$

Trong trường hợp thứ hai (Hình 3-8b) là:

$$P_{zth} = \frac{\pi^2 EJ}{4z^2}$$

Từ đó suy ra quan hệ giữa P_{th} và P_{zth} :

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{4z^2} \frac{z^2}{l^2} = P_{zth} \mu(z)$$

$$\text{Trong đó: } \mu(z) = \frac{z^2}{l^2}$$

Vậy, nếu xem hai trường hợp trên tương đương với nhau, thì có thể nói rằng: P_{th} đặt đầu thanh nhỏ hơn P_{zth} đặt ở khoảng z là $\mu(z)$ lần. Do đó, nếu lực đặt ở độ cao z thì ta có thể chuyển lực đó lên đầu thanh, đồng thời giảm trị số lực đó xuống $\mu(z)$ lần. Lực chuyển lên đầu thanh gọi là lực quy ước.

Giả sử có n lực P_i đặt cách ngàm ở độ cao z_i (Hình 3-9), theo quy tắc chuyển lực nói trên, ta có lực quy ước bằng:

$$P = P_1 \mu(z_1) + P_2 \mu(z_2) + P_3 \mu(z_3) + \dots + P_i \mu(z_i) + \dots + P_n \mu(z_n) = \sum_{i=1}^n P_i \mu(z_i)$$

Nếu tất cả các lực P_i biểu thị theo một thông số tới hạn λ_{th} , thì ta có thể viết

$$P_{th} = P \lambda_{th} = \left[\sum_{i=1}^n P_i \mu(z_i) \right] \lambda_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

Suy ra, công thức xác định thông số tới hạn λ_{th} của hệ lực P_i là:

$$\lambda_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2 \left[\sum_{i=1}^n P_i \mu(z_i) \right]} \quad (3-13)$$

Ví dụ 3-3:

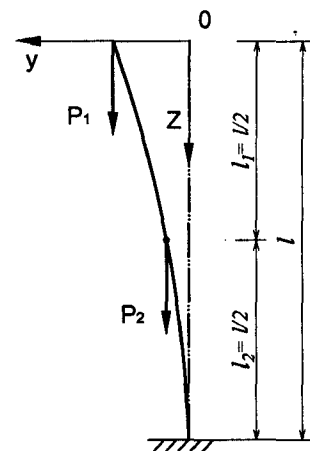
Xác định lực tới hạn cho thanh chịu nén đã xét ở ví dụ 3-2. Hình (3-10), theo phương pháp gần đúng.

$$\text{Cho biết: } l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$$

$$P_1 = P; \quad P_2 = 3P$$

Bài giải:

$$\mu(z_1) = 1; \quad \mu(z_2) = \frac{1}{4}$$



Hình 3-10

Thông số tới hạn λ_{th} của hệ lực, theo (3-13), ta có:

$$\lambda_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2 \left[P_1 + 3P_1 \frac{1}{4} \right]} = \frac{\pi^2 EJ}{7l^2 P_1}$$

Vậy $P_{1th} = P_1 \lambda_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{7l^2} = 1,41 \frac{EJ}{l^2}$

$$P_{2th} = P_2 \lambda_{th} = 3P_1 \lambda_{th} = 4,23 \frac{EJ}{l^2}$$

Kết quả chính xác, theo ví dụ 3-2, $P_{th} = 1,513 \frac{EJ}{l^2}$

Vậy sai số: $\frac{1,513 - 1,41}{1,513} 100\% = 6,8\%$

§5. ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU TẢI TRỌNG PHÂN BỐ THEO TRỤC THANH

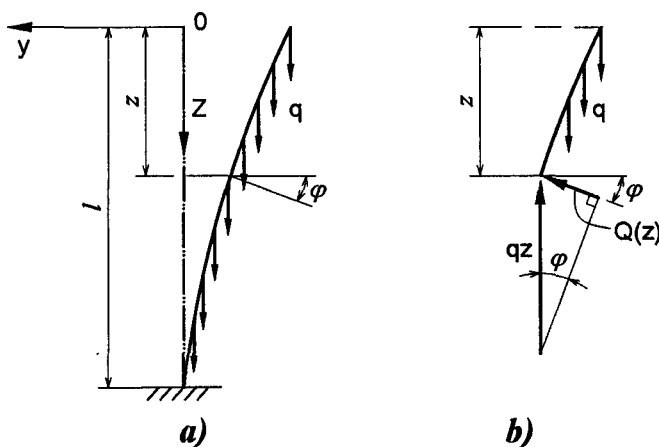
A. Cách tính chính xác:

Cách tính chính xác dựa trên cơ sở phương pháp tĩnh học:

- Thiết lập phương trình vi phân ở trạng thái biến dạng;
- Giải phương trình vi phân;
- Từ điều kiện tồn tại trạng thái cân bằng biến dạng khác dạng ban đầu, suy ra lực tới hạn cần tìm.

Dưới đây, ta sẽ tìm hiểu nội dung cách tính qua ví dụ.

Giả sử, xét thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do, chịu tác dụng của tải trọng bản thân biểu thị dưới dạng tải trọng phân bố đều với cường độ là q (Hình 3-11a)



Hình 3-11

1. Phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng:

$$EJy''' = -Q(z)$$

Trong đó: $Q(z)$ - lực cắt tại mặt cắt bất kỳ cách gốc là z , theo hình 3-11b, ta có:

$$Q(z) = qz \sin \varphi \approx qzy', \quad (\sin \varphi \approx \varphi = y')$$

$$\text{Do đó: } EJy'''' + qzy' = 0 \quad (3-14)$$

$$\text{Đặt } \frac{dy}{dz} = u; \quad \frac{z}{l} = t; \quad \alpha^2 = \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = lt \Rightarrow dz = ldt \\ \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{du}{dz} = \frac{du}{ldt} \Rightarrow \frac{d^3y}{dz^3} = \frac{d}{dz} \left(\frac{du}{dz} \right) = \frac{d^2u}{l^2 dt^2} \end{cases}$$

Thì phương trình (3-14) có dạng:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha^2 tu = 0 \quad (3-15)$$

2. Nghiệm của (3-15) có thể biểu diễn dưới dạng chuỗi vô hạn, ta có:

$$u = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \dots + C_i t^i + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i t^i \quad (3-16)$$

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty} i C_i t^{i-1}; \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) C_i t^{i-2}$$

Thay (3-16) vào (3-15), ta được:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) C_i t^{i-2} + \alpha^2 \sum_{i=0}^{\infty} C_i t^{i+1} = 0$$

Biến đổi:

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) C_i t^{i-2} = 2C_2 + \sum_{i=3}^{\infty} i(i-1) C_i t^{i-2}$$

$$\text{Đặt: } k = i - 2 \Rightarrow \begin{cases} i = k + 2 \\ i - 1 = k + 1 \\ i = 3 \Rightarrow k = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1) C_{k+2} t^k$$

Sau khi biến đổi chỉ số chạy, ta có:

$$2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1) C_{k+2} t^k + \alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} C_{k-1} t^k = 0$$

$$\text{Hay } 2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1) C_{k+2} + \alpha^2 C_{k-1}] t^k = 0$$

Phương trình này cần thỏa mãn với giá trị bất kỳ của z, tức là với giá trị bất kỳ của t, nên các hệ số của đa thức này buộc phải đồng nhất bằng không, tức là:

$$\begin{cases} 2C_2 = 0 \\ (k+2)(k+1) C_{k+2} + \alpha^2 C_{k-1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Hay: } 2C_2 = 0; C_{k+2} = \frac{\alpha^2 C_{k-1}}{(k+2)(k+1)} \quad (3-17)$$

Từ (3-17) với chú ý $C_2 = 0$, ta có:

a, $C_2 = 0$, $C_5 = 0$, $C_8 = 0 \dots$ tức là: $C_{2+3k} = 0$, với $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

b, Các hệ số còn lại quan hệ với nhau như sau:

$$C_{k+2} = -\frac{a^2}{(k+2)(k+1)}C_{k-1}$$

Cũng có thể biến đổi theo C_0, C_1 .

$$C_3 = -\frac{a^2}{3.2}C_0;$$

$$C_4 = -\frac{a^2}{4.3}C_1;$$

$$C_6 = -\frac{a^2}{6.5}C_3 = \frac{a^4}{2.3.5.6}C_0;$$

$$C_7 = -\frac{a^2}{7.6}C_4 = \frac{a^4}{3.4.6.7}C_1;$$

Ta được:

$$\begin{aligned} u = & C_0 \left(1 - \frac{a^2}{2.3}t^3 + \frac{a^4}{2.3.5.6}t^6 - \frac{a^6}{2.3.5.6.8.9}t^9 + \dots \right) + \\ & + C_1 t \left(1 - \frac{a^2}{3.4}t^3 + \frac{a^4}{3.4.6.7}t^6 - \frac{a^6}{3.4.6.7.9.10}t^9 + \dots \right) \end{aligned} \quad (3-18)$$

3. Các điều kiện biên:

a) Khi $z=0$, tức $t=0$; $M = -EJy'' = 0$, suy ra: $\frac{du}{dt} = 0$

b) Khi $z=1$, tức $t=1$; $y' = 0$, suy ra: $u = 0$

Lấy đạo hàm (3-18) theo t :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = & C_0 \left(-\frac{a^2}{2}t^2 + \frac{a^4}{2.3.5}t^5 - \frac{a^6}{2.3.5.6.8}t^8 + \dots \right) + \\ & + C_1 \left(1 - \frac{a^2}{3}t^3 + \frac{a^4}{3.4.6}t^6 - \frac{a^6}{3.4.6.7.9}t^9 + \dots \right) \end{aligned}$$

Từ điều kiện a) $t=0$, $\frac{du}{dt} = 0$, rút ra: $C_1 = 0$.

Từ điều kiện b) $t=1$, $u = 0$, rút ra:

$$u(1) = 1 - \frac{a^2}{2.3} + \frac{a^4}{2.3.5.6} - \frac{a^6}{2.3.5.6.8.9} + \dots = 0 \quad (3-19)$$

Sau khi giải phương trình (3-19), ta tìm được nghiệm nhỏ nhất của a là:

$$a = 2,799$$

Theo công thức (3-14), suy ra:

$$(ql)_{th} = \alpha^2 \frac{EJ}{l^2} = 7,84 \frac{EJ}{l^2} \quad (3-20)$$

B. Cách tính gần đúng: (tham khảo sách)

§6. ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CÓ TIẾT DIỆN THAY ĐỔI

1. Thanh có độ cứng thay đổi theo hình bậc thang:

Xét thanh gồm 2 đoạn có độ cứng thay đổi (Hình 3-12a)

Gọi EJ_1 - độ cứng đoạn trên,

Gọi EJ_2 - độ cứng đoạn dưới;

a) Phương trình vi phân của đường đàn hồi $EJy'' = -M$ viết cho các đoạn:

Đoạn 1: $M_1 = -P(\delta - y_1)$

$$EJ_1 y_1'' + Py_1 = P\delta$$

Đoạn 2: $M_2 = -P(\delta - y_2)$

$$EJ_2 y_2'' + Py_2 = P\delta$$

b) Nghiệm của hai phương trình vi phân có dạng:

$$y_1 = A_1 \sin \alpha_1 z + B_1 \cos \alpha_1 z + \delta;$$

$$y_2 = A_2 \sin \alpha_2 z + B_2 \cos \alpha_2 z + \delta;$$

Trong đó: $\alpha_1^2 = \frac{P}{EJ_1}; \quad \alpha_2^2 = \frac{P}{EJ_2}$

c) Các điều kiện biên:

$$\begin{cases} \text{Khi } z=0, & y_2' = 0 \\ \text{Khi } z=l, & y_1 = \delta \end{cases}$$

Điều kiện liên tục:

$$\begin{cases} \text{Khi } z=l_2, & y_1' = y_2' \\ \text{Khi } z=l_2, & y_1 = y_2 \end{cases}$$

Khi $z=0, y_2' = 0 \Rightarrow A_2 = 0$

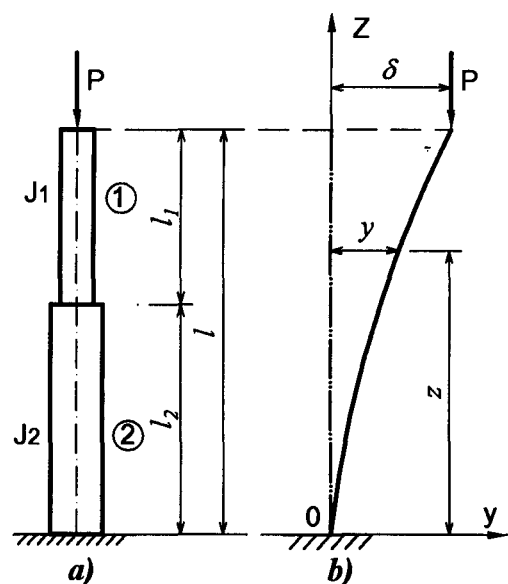
Khi $z=l, y_1 = \delta \Rightarrow A_1 \sin \alpha_1 l + B_1 \cos \alpha_1 l = 0$

Khi $z=l_2, y_1' = y_2' \Rightarrow A_1 \alpha_1 \cos \alpha_1 l_2 - B_1 \alpha_1 \sin \alpha_1 l_2 + B_2 \alpha_2 \cos \alpha_2 l_2 = 0$

Khi $z=l_2, y_1 = y_2 \Rightarrow A_1 \sin \alpha_1 l_2 + B_1 \cos \alpha_1 l_2 - B_2 \cos \alpha_2 l_2 = 0$

c) Điều kiện tồn tại trạng thái cân bằng lệch (tức tồn tại các hằng số tích phân), ta được phương trình ổn định:

$$D(\alpha) = \begin{vmatrix} \sin \alpha_1 l & \cos \alpha_1 l & 0 \\ \cos \alpha_1 l & -\sin \alpha_1 l_2 & \frac{\alpha_2 \sin \alpha_2 l_2}{\alpha_1} \\ \sin \alpha_1 l_2 & \cos \alpha_1 l_2 & -\cos \alpha_2 l_2 \end{vmatrix} = 0$$



Hình 3-12

Sau khi triển khai và biến đổi, ta được

$$\operatorname{tg} \alpha_1 l_1 \operatorname{tg} \alpha_2 l_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad (3-21)$$

Phương trình (3-21) chỉ có thể giải quyết được khi đã biết các tỷ số $\frac{EJ_1}{EJ_2}$ và $\frac{l_2}{l_1}$.

2. Thanh có độ cứng thay đổi theo quy luật lũy thừa:

Giả sử, xét thanh chịu nén có một đầu ngàm, một đầu tự do (Hình 3-13a).

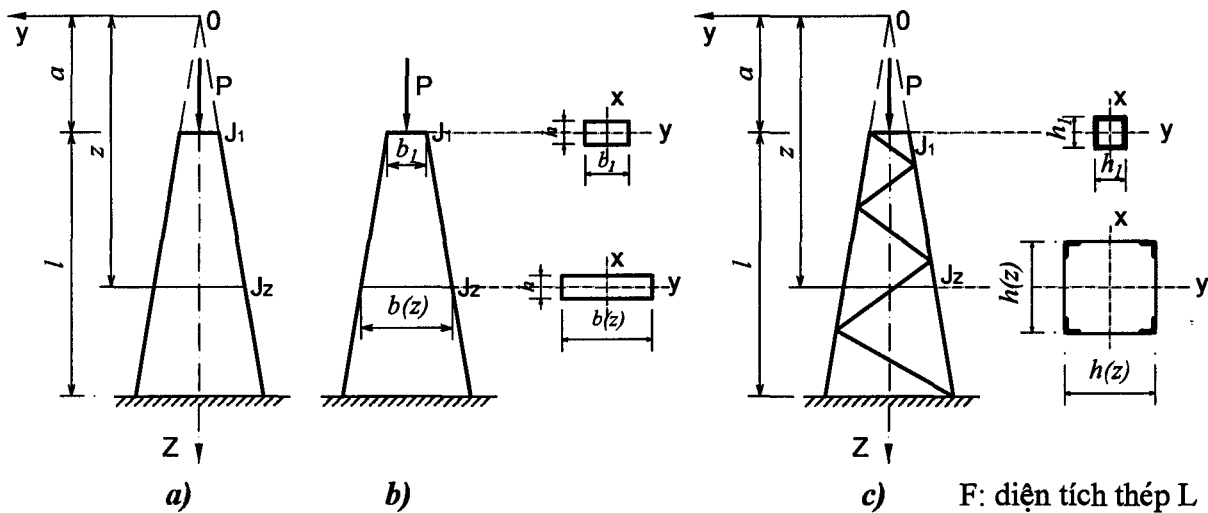
Giả sử mômen quán tính $J(z)$ của mặt cắt thay đổi tỷ lệ với khoảng cách tính từ điểm O nào đó (Hình 3-13a) theo quy luật lũy thừa.

$$J(z) = J_1 \left(\frac{z}{a} \right)^n \quad (3-22)$$

Trong đó: J_1 - mômen quán tính ở đầu trên của thanh.

n - số mũ, phụ thuộc vào hình dạng cụ thể của thanh.

* Trường hợp thanh có mặt cắt đặc (Hình 3-13b), nếu khi mất ổn định, mặt cắt quay xung quanh trục y .



Hình 3-13

$$J(z) = \frac{b(z)h^3}{12} \quad \text{mà} \quad b(z) = b_1 \left(\frac{z}{a} \right)^1$$

$$J(z) = \frac{b_1 h^3}{12} \left(\frac{z}{a} \right) = J_1 \left(\frac{z}{a} \right)^1$$

Vậy, trong trường hợp này, $n = 1$.

* Trường hợp thanh có mặt cắt rỗng (Hình 3-13c).

$$J(z) = 4F \left[\frac{h(z)}{2} \right]^2, \quad \text{nhưng} \quad h(z) = h_1 \frac{z}{a}, \quad \text{nên:}$$

$$J(z) = 4F\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 \left(\frac{z}{a}\right)^2 = J_1 \left(\frac{z}{a}\right)^2 \quad (3-23)$$

Vậy, trong trường hợp này, $n = 2$.

Để giải bài toán này ta chọn hệ trục tọa độ như trên hình 3-14.

Phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng:

$$EJ_1 \left(\frac{z}{a}\right)^n \frac{d^2 y}{dz^2} = -Py \quad (3-24)$$

Phương trình vi phân này có hệ số thay đổi.

1) Trường hợp $n = 2$, ta có thể tìm nghiệm của (3-24) dưới dạng hàm sơ cấp;

$$\text{Đặt } z = ae^t, \quad dz = ae^t dt \Rightarrow \frac{dt}{dz} = \frac{1}{ae^t} = \frac{1}{z}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dz} &= \frac{1}{z}; \quad \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dz} = \frac{1}{z} \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{1}{z^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{z^2} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$

Sau khi thay các số liệu này vào (3-24)

và cho $n = 2$, ta sẽ được phương trình vi phân thường.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{Pa^2}{EJ_1} y = 0 \quad (3-25)$$

Phương trình đặc trưng :

$$k^2 - k + \frac{Pa^2}{EJ_1} = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm i \sqrt{4 \frac{Pa^2}{EJ_1} - 1}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\gamma \quad (\text{với } 4 \frac{Pa^2}{EJ_1} - 1 > 0 : \text{đặc trưng tuần hoàn của hệ})$$

$$\text{Trong đó: } \gamma = \sqrt{\frac{Pa^2}{EJ_1} - \frac{1}{4}} \quad (3-26)$$

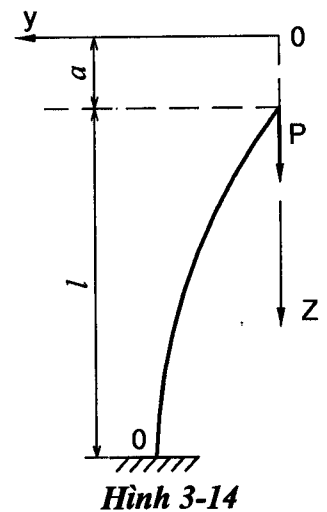
$$\text{Với chú ý: } z = ae^t \Rightarrow e^t = \frac{z}{a} \Rightarrow t = \ln\left(\frac{z}{a}\right)$$

Vậy nghiệm của phương trình (3 - 25):

$$y = \sqrt{e^t} [A \sin \gamma t + B \cos \gamma t]$$

$$\text{Hay } y = \sqrt{\frac{z}{a}} \left[A \sin\left(\gamma \ln \frac{z}{a}\right) + B \cos\left(\gamma \ln \frac{z}{a}\right) \right] \quad (3-27)$$

2) Điều kiện biên:



Hình 3-14

$$\begin{cases} \text{Khi } z = a, y(a) = 0 \\ \text{Khi } z = a+l, \frac{dy}{dz} = 0 \end{cases}$$

* Thay $z = a, y(a) = 0$ vào (3-27), ta được :

$$y(a) = \sqrt{\frac{a}{a}} \left[A \sin\left(\gamma \ln \frac{a}{a}\right) + B \cos\left(\gamma \ln \frac{a}{a}\right) \right] = 0$$

$$\text{Vì } \ln 1 = 0 \text{ nên } B = 0 \Rightarrow y(z) = \sqrt{\frac{z}{a}} A \sin\left(\gamma \ln \frac{z}{a}\right)$$

$$y'(z) = A \sin\left(\gamma \ln \frac{z}{a}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{z}{a}}} \cdot \frac{1}{a} + A \sqrt{\frac{z}{a}} \cdot \cos\left(\gamma \ln \frac{z}{a}\right) \cdot \gamma \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{z}$$

$$y'(a+l) = \frac{A}{2a\sqrt{\frac{a+l}{a}}} \left[\sin\left(\gamma \ln \frac{a+l}{a}\right) + 2\gamma \cos\left(\gamma \ln \frac{a+l}{a}\right) \right] = 0$$

3) Phương trình ổn định :

Từ điều kiện tồn tại trạng thái cân bằng biến dạng lệch, tức là $A \neq 0$, ta nhận được phương trình ổn định sau :

$$\tan\left(\gamma \ln \frac{a+l}{a}\right) + 2\gamma = 0 \quad (3-28)$$

Từ hình (3-13), ứng với các giá trị a và l , có thể giải ra phương trình (3-28) để tính γ . Sau đó, tìm lực tới hạn theo công thức (3-26)

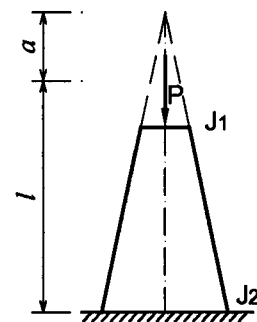
Lực tới hạn P_{th} biểu diễn dưới dạng chung :

$$P_{th} = k_4 \frac{EJ_2}{l^2} \quad (3-29)$$

Trong đó: k_4 : hệ số phụ thuộc tỷ số phụ thuộc tỷ số độ cứng của hai mặt cắt 2 đầu thanh. Các giá trị k_4 cho trong bảng 3-2, tương ứng trường hợp $n = 2$.

Bảng 3-2

J_1/J_2	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
k_4	0,250	1,350	1,593	1,763	1,904	2,023
J_1/J_2	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
k_4	2,128	2,223	2,311	2,392	2,467	



Chú thích: J_1 - mômen quán tính của mặt cắt đầu trên
 J_2 - mômen quán tính của mặt cắt đầu dưới

Trên đây mới xét thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do. Đối với thanh có khớp tựa hai đầu cách tính cũng tương tự như vậy.

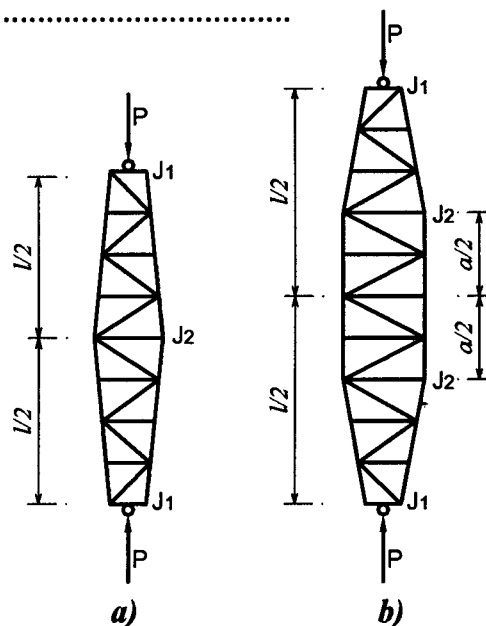
Trong trường hợp thanh có khớp tựa hai đầu và có mặt cắt thay đổi đối xứng với mặt cắt giữa (Hình 3-15a) ta vẫn áp dụng công thức (3-29) nếu thay $l = l/2$.

.....*****.....

Đối với những thanh có mặt cắt thay đổi đối xứng như trên hình 3-15b, ta có thể xác định lực tới hạn theo công thức.

$$P_{th} = k_5 \frac{EJ_2}{l^2} \quad (3-30)$$

Trong đó, k_5 - hệ số phụ thuộc các tỷ số J_1/J_2 và a/l và quy luật biến thiên của mặt cắt từ lũy thừa 1 đến lũy thừa 4. (Bảng 3-3)

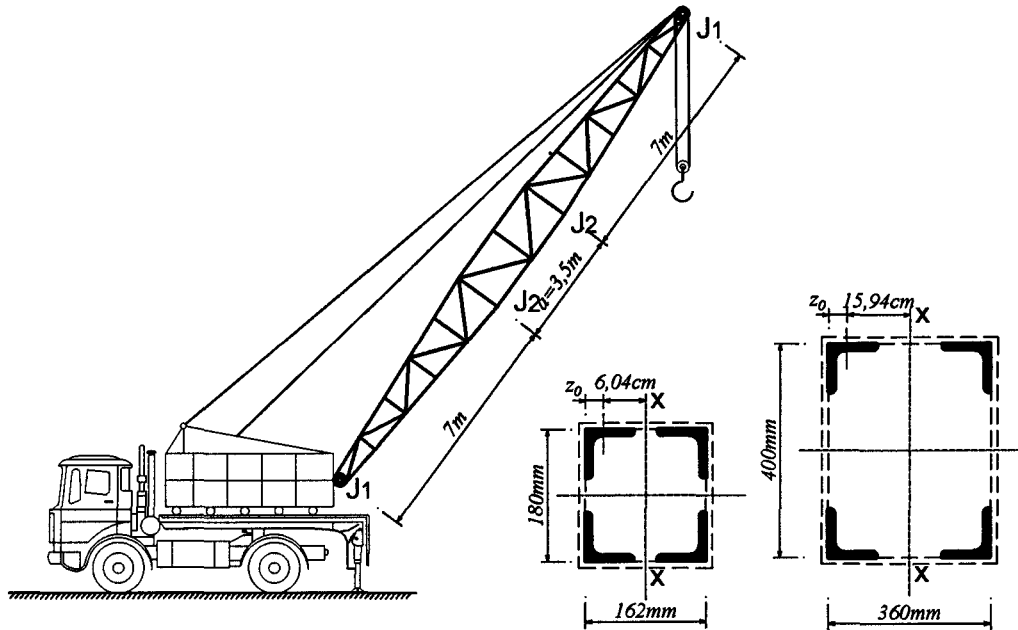


Hình 3-15

Bảng 3-3

J_1/J_2	n	a/l					
		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,1	1	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82	π^2
	2	5,40	6,67	8,08	9,25	9,79	
	3	5,01	6,32	7,84	9,14	9,77	
	4	4,81	6,11	7,68	9,08	9,77	
0,2	1	7,01	7,99	8,91	9,63	9,82	π^2
	2	6,37	7,49	8,61	9,44	9,81	
	3	6,14	7,31	8,49	9,39	9,81	
	4	6,02	7,20	8,42	9,38	9,80	

Ví dụ 3-4: Xác định tải trọng tới hạn cho một thanh chịu nén của cần trục (Hình 3-16). Thanh được cấu tạo bởi 4 thép góc 75x75x6. Mặt cắt giữa và mặt cắt hai đầu bố trí như hình vẽ. Cho $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$; $n = 2$.



Hình 3-16

Bài giải:

a) Tra bảng thép định hình L75x75x6, có $F = 8,78 \text{ cm}^2$; $J_{x0} = 46,6 \text{ cm}^4$; $z_0 = 2,06 \text{ cm}$.

b) Tính đặc trưng hình học của mặt cắt ghép:

Khi mất ổn định, thanh quay xung quanh trục x-x (Hình 3-16b,c). Do đó, mômen quán tính của mặt cắt giữa và mặt cắt hai đầu đối với trục x-x là:

$$J_2 = J_{x2} = 4(46,6 + 15,94^2 \cdot 8,78) = 9110,2 \text{ cm}^4$$

$$J_1 = J_{x1} = 4(46,6 + 6,04^2 \cdot 8,78) = 1468 \text{ cm}^4$$

c) Tính P_{th} : Theo công thức (3-30), ta có:

$$P_{th} = k_5 \frac{EJ_2}{l^2}$$

Để tìm k_5 , ta cần tìm tỷ số J_1/J_2 và a/l

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{1468}{9110,2} = 0,161; \quad \frac{a}{l} = \frac{3,5}{17,5} = 0,2 \text{ và } n = 2$$

Theo bảng 3-3, và áp dụng nội suy, ta xác định được $k_5 \approx 7$. Do đó:

$$P_{th} = k_5 \frac{EJ_2}{l^2} = 7 \cdot \frac{2,1 \cdot 10^4 \cdot 9110,2}{(1750)^2} = 437,3 \text{ KN}$$

CHƯƠNG IV. ỔN ĐỊNH CỦA CÁC KHUNG PHẪNG

§1. CÁC GIẢ THIẾT

Khi nghiên cứu ổn định của các khung phẳng, người ta dùng các giả thiết để đơn giản hóa việc xác định tải trọng tới hạn.

1. Vật liệu của khung làm việc trong giới hạn đàn hồi.
2. Các nút của khung xem như tuyệt đối cứng. Do đó, chuyển vị của các đầu thanh quy tụ vào nút đều như nhau.
3. Bỏ qua biến dạng dọc trục và biến dạng trượt so với biến dạng uốn.

$$\text{Ví dụ: } \Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m}{EJ} dz + \underbrace{\sum \int \frac{\bar{N}_k N_m}{EF} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_k Q_m}{GF} dz}_{\text{bỏ qua}}$$

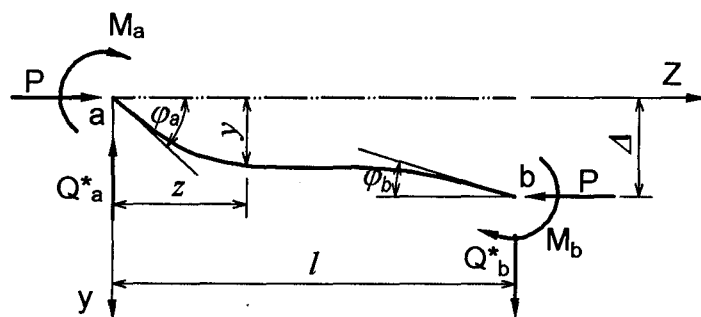
Chiều dài của các thanh theo phương ban đầu không đổi trong quá trình biến dạng.

4. Khi xác định chuyển vị tại các nút trong khung chỉ kể đến ảnh hưởng của biến dạng uốn do lực dọc và do các lực liên kết X_1, X_2, \dots, X_n xuất hiện khi biến dạng.

5. Tải trọng tác dụng lên khung chỉ đặt ở các nút, những tải trọng này chỉ gây ra hiện tượng kéo hoặc nén và uốn dọc mà không gây ra hiện tượng uốn ngang trong các thanh khi hệ chưa mất ổn định.

Phần A. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CÁC KHUNG PHẪNG THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

§2. CÁCH XÁC ĐỊNH PHẢN LỰC VÀ NỘI LỰC TRONG NHỮNG THANH CHỊU NÉN KHI CÁC LIÊN KẾT CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC



Hình 4-1

Xét thanh ab có liên kết bất kỳ ở 2 đầu, chịu lực nén P (Hình 4-1)

Giả thiết, ở các đầu thanh có chuyển vị cưỡng bức như sau:

φ_a, φ_b - góc xoay tại đầu a và đầu b với quy ước chiều dương là chiều quay thuận theo chiều xoay của kim đồng hồ.

Δ - chuyển vị thẳng tương đối giữa 2 đầu ab theo phương vuông góc với trục ban đầu của thanh.

Dưới tác dụng của lực nén P và các chuyển vị $\varphi_a, \varphi_b, \Delta$ thanh bị biến dạng như hình 4-1.

Chiều của các chuyển vị và phản lực như trên hình vẽ (Hình 4-1) được xem là dương.

Từ điều kiện cân bằng:

$$\begin{aligned}\sum Y &= 0 \Leftrightarrow Q_a^* - Q_b^* = 0 \\ \sum M_b &= 0 \Leftrightarrow Q_a^* l + M_a + M_b + P\Delta = 0 \\ \text{Rút ra } Q_a^* &= Q_b^* = -\frac{M_a + M_b + P\Delta}{l}\end{aligned}\quad (4-1)$$

Mômen uốn tại mặt cắt z:

$$M(z) = Q_a^* z + M_a + Py$$

Từ phương trình vi phân của đường đàn hồi:

$$y'' = -\frac{M(z)}{EJ} = -\frac{P}{EJ}y - \frac{Q_a^* z + M_a}{EJ}$$

$$\text{Đặt } \alpha^2 = \frac{P}{EJ} \quad (a)$$

$$y'' + \alpha^2 y = -\frac{Q_a^* z + M_a}{EJ} \quad (b)$$

Nghiệm của phương trình (b) là:

$$y(z) = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z - \frac{Q_a^* z + M_a}{\alpha^2 EJ} \quad (c)$$

Xác định A, B theo các điều kiện biên:

Khi $z = 0, y(0) = 0, y'(0) = \varphi_a$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow B = \frac{M_a}{\alpha^2 EJ} \\ y'(0) = \varphi_a \Rightarrow A = \frac{\varphi_a}{\alpha} + \frac{Q_a^*}{\alpha^3 EJ} \end{cases} \quad (d)$$

Thay (d) vào (c), ta được:

$$y(z) = \frac{\varphi_a}{\alpha} \sin \alpha z - \frac{M_a}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha z) - \frac{Q_a^*}{\alpha^3 EJ} (\alpha z - \sin \alpha z) \quad (4-2a)$$

Thay Q_a^* của (4-1) vào (4-2a), ta được:

$$y(z) = \frac{\varphi_a}{\alpha} \sin \alpha z - \frac{M_a}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha z) - \frac{\frac{M_a + M_b}{l} + \alpha^2 EJ \frac{\Delta}{l}}{\alpha^3 EJ} (\alpha z - \sin \alpha z) \quad (4-2b)$$

$$y'(z) = \varphi_a \cos \alpha z - \frac{M_a}{\alpha EJ} \sin \alpha z + \left(\frac{M_a + M_b}{l \alpha^2 EJ} + \frac{\Delta}{l} \right) (1 - \cos \alpha z) \quad (4-3)$$

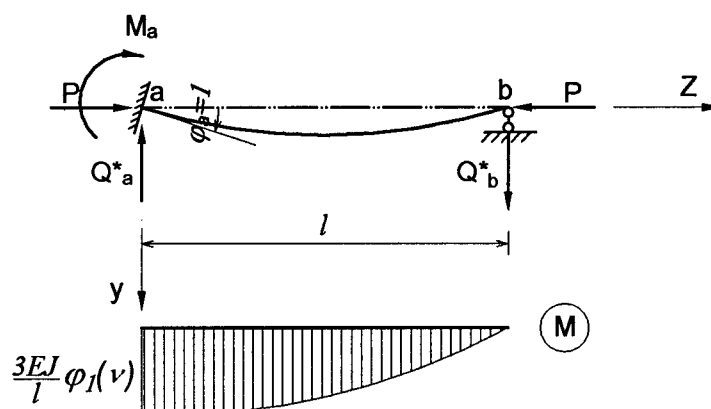
$$M(z) = -EJy''(z) = \alpha EJ \varphi_a \sin \alpha z + M_a \cos \alpha z - \left(\frac{M_a + M_b}{\alpha l} + \alpha EJ \frac{\Delta}{l} \right) \sin \alpha z \quad (4-4)$$

Từ các phương trình (4-2b), (4-3), (4-4), M_a , M_b là các ẩn số được xác định theo các điều kiện biên ở đầu b.

Dưới đây, xét một số trường hợp cụ thể:

1. Thanh có một đầu ngàm, một đầu khớp:

a) Đầu ngàm xoay 1 góc bằng đơn vị (Hình 4-2)



Hình 4-2

Trong trường hợp này, ta có:

$$\varphi_a = 1; \quad \Delta \approx 0; \quad M_b = 0$$

Theo (4-4)

$$M(z) = \alpha EJ \sin \alpha z + M_a \cos \alpha z - \frac{M_a}{\alpha l} \sin \alpha z$$

$$M_b = M(l) = \alpha l \frac{EJ}{l} \sin \alpha l + M_a \cos \alpha l - \frac{M_a}{\alpha l} \sin \alpha l = 0$$

$$\text{Ký hiệu: } i = \frac{EJ}{l}; \quad \nu = \alpha l = l \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

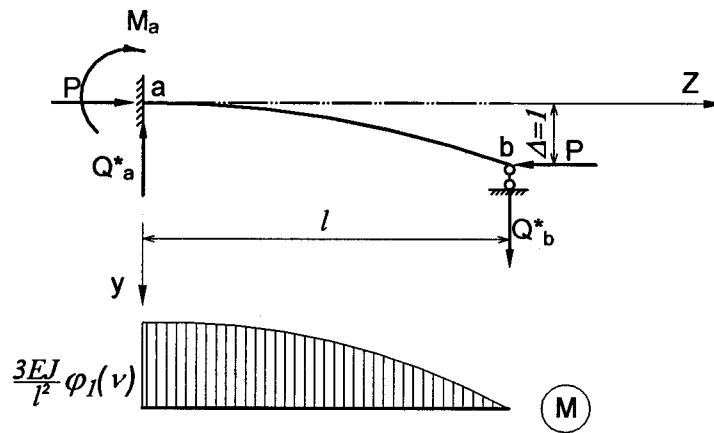
$$\text{Rút ra} \quad M_a = 3i\varphi_1(\nu)$$

$$\text{Với} \quad \varphi_1(\nu) = \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \nu}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)} \quad (4-5)$$

$$\text{Từ (4-1):} \quad Q_a^* = Q_b^* = -\frac{3i\varphi_1(\nu)}{l}; \text{ dấu } (-) \text{ có nghĩa chiều thực của } Q_a^*$$

ngược với chiều giả thiết của nó.

b) Hai đầu thanh chuyển vị tương đối theo phương vuông góc với trục thanh một giá trị bằng đơn vị ($\Delta=1$)



Hình 4-3

Trong trường hợp này, ta có:

$$\varphi_a = 0; \Delta = l; M_b = 0$$

Theo (4-4):

$$M(z) = M_a \cos \alpha z - \left(\frac{M_a}{\alpha l} + \frac{\alpha EJ}{l} \right) \sin \alpha z$$

$$M_b = M(l) = M_a \cos v - \left(\frac{M_a}{v} + \frac{vi}{l} \right) \sin v = 0$$

Rút ra $M_a = -3 \frac{EJ}{l^2} \varphi_1(v) = -3 \frac{i}{l} \varphi_1(v)$

Dấu (-) tức là chiều của M_a trên hình 4-3 ngược với chiều thực của nó.

Trong đó, ký hiệu $v = \alpha l = l \sqrt{\frac{P}{EJ}}; i = \frac{EJ}{l}; \varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}$

Từ (4-1), ta có:

$$Q_a^* = Q_b^* = \frac{3EJ}{l^3} \eta_1(v) = 3 \frac{i}{l^2} \eta_1(v)$$

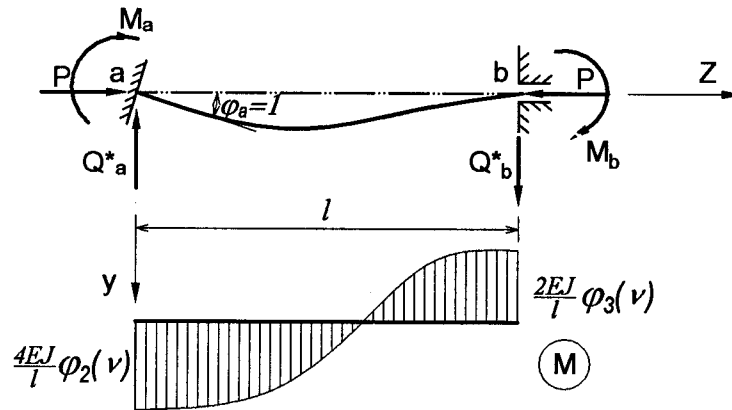
Trong đó: $\eta_1(v) = \varphi_1(v) - \frac{v^2}{3} = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}$ (4-6)

Chú thích:

Từ (4-1) $\Rightarrow Q_a^* = -\frac{M_a + M_b + P\Delta}{l} = -\frac{M_a}{l} - \frac{\alpha^2 EJ}{l} = \frac{3EJ}{l^3} \left[\varphi_1(v) - \frac{v^2}{3} \right]$

2. Thanh có hai đầu bị ngàm:

a) Đầu ngàm xoay một góc bằng đơn vị (H4-4)



Hình 4-4

Trong trường hợp này: $\varphi_a = 1$; $\varphi_b = 0$; $\Delta = 0$

Theo (4-2b)

$$y(z) = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha z - \frac{M_a}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha z) + \frac{(M_a + M_b)}{l \alpha^3 EJ} (\alpha z - \sin \alpha z)$$

Theo (4-3)

$$y'(z) = \cos \alpha z - \frac{M_a}{\alpha EJ} \sin \alpha z + \frac{(M_a + M_b)}{l \alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha z)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow y(l) = \frac{1}{\alpha} \sin v - \frac{M_a}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos v) + \frac{(M_a + M_b)}{l \alpha^3 EJ} (v - \sin v) = 0$$

$$\varphi_b = 0 \Rightarrow y'(l) = \cos v - \frac{M_a}{\alpha EJ} \sin v + \frac{(M_a + M_b)}{l \alpha^2 EJ} (1 - \cos v) = 0$$

$$\text{Với } v = \alpha l = l \sqrt{\frac{P}{EJ}}; \quad i = \frac{EJ}{l}$$

$$\text{Từ đó, giải ra: } M_a = 4 \frac{EJ}{l} \varphi_2(v) = 4i \varphi_2(v)$$

$$\text{với } \varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v (\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2})} \quad (4-7)$$

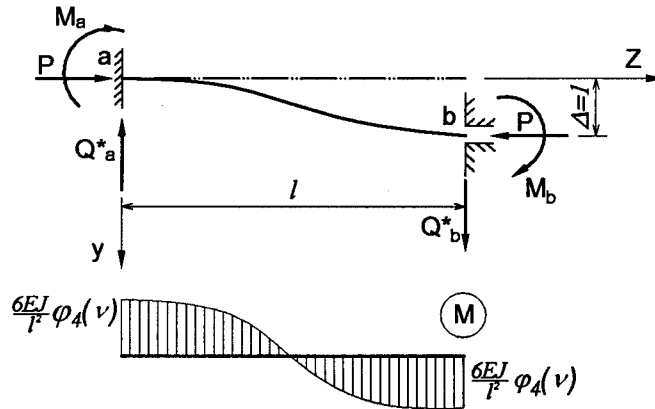
$$M_b = 2 \frac{EJ}{l} \varphi_3(v) = 2i \varphi_3(v)$$

$$Q_a^* = Q_b^* = -6 \frac{EJ}{l^2} \eta_3(v) = -6 \frac{i}{l} \eta_3(v)$$

$$\text{với } \varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v (\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2})} \quad (4-8)$$

$$\eta_3(\nu) = \varphi_1\left(\frac{\nu}{2}\right) = \varphi_4(\nu) \quad (4-9)$$

b) Hai đầu chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thành một giá trị bằng đơn vị $\Delta = 1$ (Hình 4-5)



Hình 4-5

Trong trường hợp này: $\varphi_a = \varphi_b = 0$; $\Delta = 1$

$$M_a = M_b = -6 \frac{EJ}{l^2} \varphi_4(\nu) = -6 \frac{i}{l} \varphi_4(\nu)$$

Dấu (-): tức chiều thực của M_a, M_b ngược chiều với chiều giả thiết (chiều thực của M_a, M_b là quay ngược chiều với kim đồng hồ)

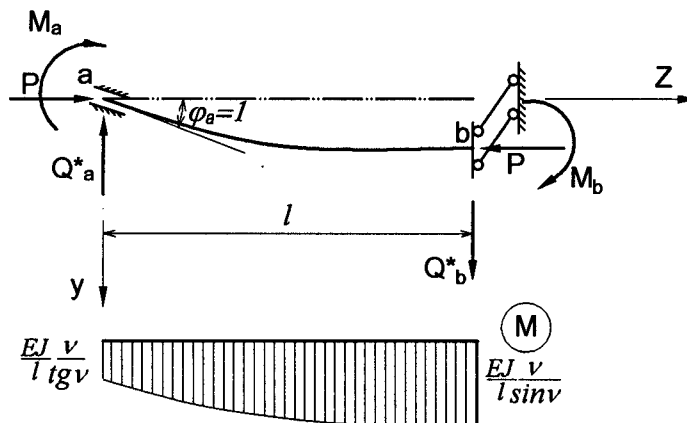
$$Q_a^* = Q_b^* = +12 \frac{EJ}{l^3} \eta_2(\nu) = +12 \frac{i}{l^2} \eta_2(\nu)$$

Trong đó: $\varphi_4(\nu) = \varphi_1\left(\frac{\nu}{2}\right) \quad (4-10)$

$$\eta_2(\nu) = \eta_1\left(\frac{\nu}{2}\right) = \varphi_4(\nu) - \frac{\nu^2}{12} \quad (4-11)$$

3. Thanh có một đầu ngàm, một đầu ngàm trượt:

a) Đầu ngàm xoay một góc bằng đơn vị $\varphi_a = 1$ (Hình 4-6)



Hình 4-6

Trong trường hợp này

$$\varphi_a = 1; \quad \varphi_b = 0; \quad Q_a^* = Q_b^* = 0$$

Theo phương trình (4-3)

$$y'(z) = \cos \alpha z - \frac{M_a}{\alpha EJ} \sin \alpha z$$

Từ điều kiện biên $\varphi_b = y'(l) = 0$

$$\Rightarrow \cos v - \frac{M_a}{\alpha EJ} \sin v = 0$$

$$\text{Vậy } M_a = \frac{EJ}{l} \frac{v}{\operatorname{tg} v} = i \frac{v}{\operatorname{tg} v}$$

Theo (4-4):

$$M(z) = \alpha EJ \varphi_a \sin \alpha z + M_a \cos \alpha z$$

$$\text{khi } z = l, \quad M(l) = i v \sin v + i \frac{v}{\operatorname{tg} v} \cos v = -M_b$$

$$\text{Vậy } M_b = -\frac{EJ}{l} \frac{v}{\sin v} = -i \frac{v}{\sin v}$$

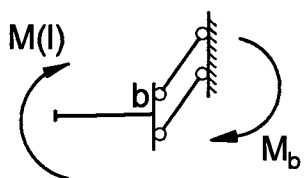
***Chú thích:** Điều kiện cân bằng nút:

$$M(l) + M_b = 0$$

$$\Rightarrow M(l) = -M_b$$

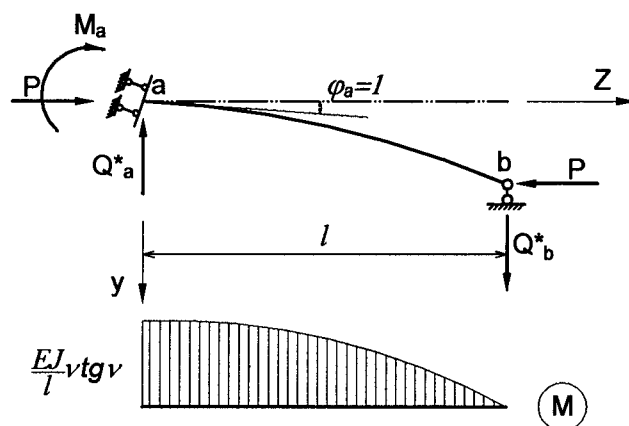
Trong đó $M(l)$: nội lực

M_b : ngoại lực



4. Thanh có một đầu ngàm trượt, một đầu là khớp:

a) Đầu ngàm trượt xoay một góc bằng đơn vị (hình 4-7)



Hình 4-7

Trong trường hợp này $\varphi_a = 1; \quad Q_a^* = Q_b^* = 0; \quad M_b = 0$

Theo phương trình (4-4)

$$M(z) = \alpha EJ \varphi_a \sin \alpha z + M_a \cos \alpha z$$

$$M_b = M(l) = i v \sin v + M_a \cos v = 0$$

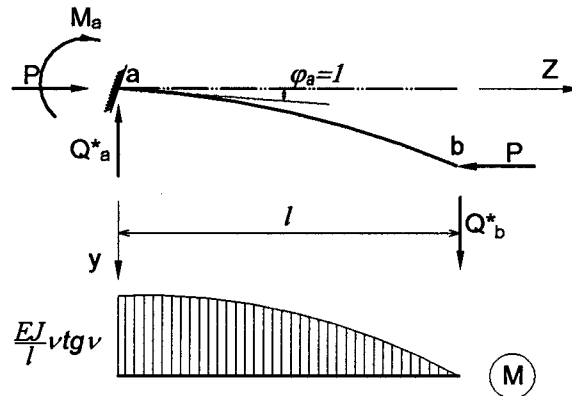
$$\text{Rút ra } M_a = -ivtg\nu$$

$$\text{Với } \nu = \alpha l; \quad i = \frac{EJ}{l}$$

Dấu (-): nghĩa là chiều thực của M_a ngược với chiều giả thiết của nó.

5. Thanh một đầu ngàm, một đầu tự do:

a) Đầu ngàm xoay một góc bằng đơn vị (hình 4-8)



Hình 4-8

Trong trường hợp này

$$\varphi_a = 1; \quad Q_a^* = Q_b^* = 0; \quad M_b = 0$$

Theo phương trình (4-4)

$$M(z) = \alpha EJ \varphi_a \sin \alpha z + M_a \cos \alpha z$$

Theo điều kiện

$$M_b = M(l) = i\nu \sin \nu + M_a \cos \nu = 0$$

$$\text{Rút ra } M_a = -ivtg\nu$$

Dấu (-) nghĩa là chiều thực của M_a ngược với chiều giả thiết của nó trên hình (4-8)

6. Thanh có hai đầu khớp (Hình 4-9):

$$M_a = M_b = 0$$

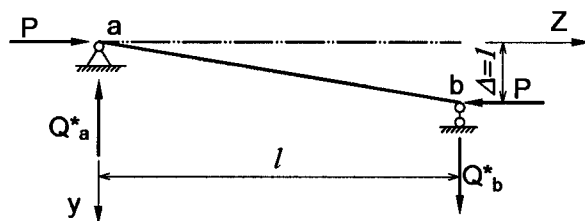
$$Q_a^* l + P\Delta = 0$$

$$\Rightarrow Q_a^* l = -\frac{Pl}{l}$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ} \rightarrow P = \alpha^2 EJ$$

$$\Rightarrow Q_a^* = -\frac{\alpha^2 EJ}{l} = \frac{(\alpha l)^2 EJ}{l^2 l}$$

$$Q_a^* = Q_b^* = -\frac{\nu^2 i}{l^2}$$



Hình 4-9

Trong bảng 4-1 ghi tóm tắt các kết quả vừa tìm được về các mômen M_a , M_b

Giá trị của các hàm $\varphi_1(\nu)$, $\varphi_2(\nu)$, $\varphi_3(\nu)$, $\varphi_4(\nu)$, $\eta_1(\nu)$, $\eta_2(\nu)$, $\frac{\nu}{\sin \nu}$, $\frac{\nu}{\tan \nu}$ theo đối số ν cho biết trong bảng phụ lục.

Chú thích:

Trong trường hợp thanh không chịu lực nén ($P = 0$) thì $\nu = l\sqrt{\frac{P}{EJ}} = 0$, do đó các hàm và đều có giá trị bằng một, tức là khi $\nu = 0$ thì $\varphi_1(\nu) = \varphi_2(\nu) = \varphi_3(\nu) = \varphi_4(\nu) = \eta_1(\nu) = \eta_2(\nu) = 1, 0$

Bảng 4-1

Thứ tự	Điều kiện	Dạng chuyển vị và biểu đồ mômen	M_a	M_b	$Q^*_a = Q^*_b$
1	$\varphi_a = 1$ $\Delta = 0$ $M_b = 0$		$3i\varphi_1(\nu)$ $\varphi_1(\nu)$ theo (4-5)	0	$-\frac{3i}{l}\varphi_1(\nu)$
2	$\varphi_a = 0$ $\Delta = 1$ $M_b = 0$		$-\frac{3i}{l}\varphi_1(\nu)$	0	$\frac{3i}{l^2}\eta_1(\nu)$ $\eta_1(\nu)$ theo (4-6)
3	$\varphi_a = 1$ $\Delta = 0$ $\varphi_b = 0$		$4i\varphi_2(\nu)$ $\varphi_2(\nu)$ theo (4-7)	$2i\varphi_3(\nu)$ $\varphi_3(\nu)$ theo (4-8)	$-\frac{6i}{l}\eta_3(\nu)$ $\eta_3(\nu)$ theo (4-9)
4	$\varphi_a = 0$ $\Delta = 1$ $\varphi_b = 0$		$-\frac{6i}{l}\varphi_4(\nu)$ $\varphi_4(\nu)$ theo (4-10)	$-\frac{6i}{l}\varphi_4(\nu)$	$\frac{12i}{l^2}\eta_2(\nu)$ $\eta_2(\nu)$ theo (4-11)

Thứ tự	Điều kiện	Dạng chuyển vị và biểu đồ mômen	M_a	M_b	$Q^*_a = Q^*_b$
5	$\varphi_a = 1$ $\varphi_b = 0$ $Q^*_a = 0$ $Q^*_b = 0$		$i \frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu}$	$-i \frac{\nu}{\sin \nu}$	0
6	$\varphi_a = 1$ $\varphi_b = 0$ $Q^*_a = 0$ $Q^*_b = 0$		$i \frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu}$	$-i \frac{\nu}{\sin \nu}$	0
7	$\varphi_a = 1$ $M_b = 0$ $Q^*_a = 0$ $Q^*_b = 0$		$-i \nu \operatorname{tg} \nu$	0	0
8	$\varphi_a = 1$ $M_b = 0$ $Q^*_a = 0$ $Q^*_b = 0$		$-i \nu \operatorname{tg} \nu$	0	0
9	$\Delta = 1$ $Q^*_a = 0$ $Q^*_b = 0$		0	0	$\frac{i}{l^2} \nu^2$

$i = \frac{EJ}{l}$, $\nu = \alpha l = l \sqrt{\frac{P}{EJ}}$, giá trị của các hàm φ , η tìm trong các bảng phụ lục.

Ghi chú: Trường hợp thanh không chịu lực nén ($P = 0$) thì $\nu = 0$, do đó các hàm φ , η đều bằng 1.

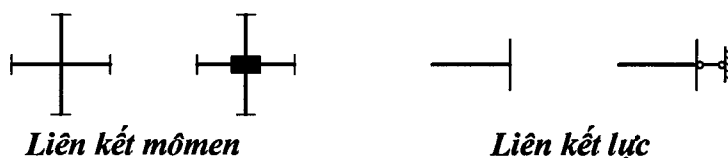
§3. CÁCH TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CÁC KHUNG PHẪNG THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

1. Hệ cơ bản:

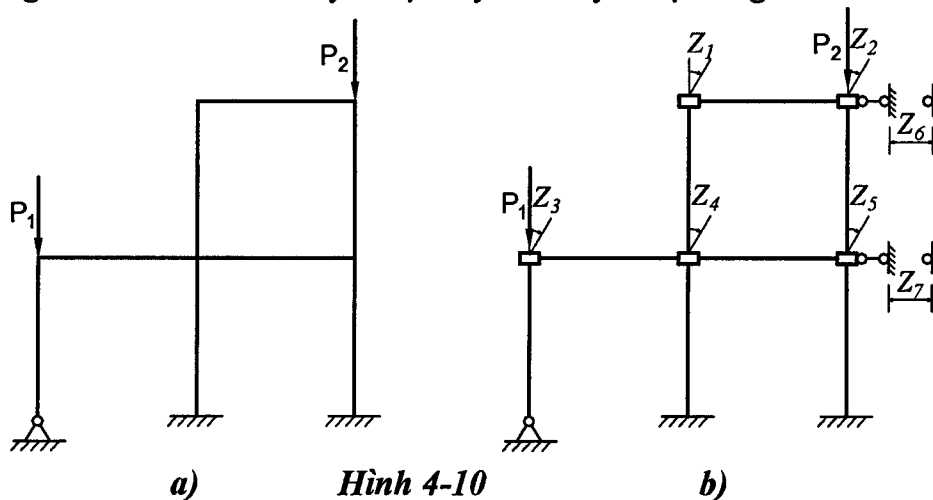
Khi lập hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị, người ta đặt vào hệ các liên kết phụ ngăn cản tất cả chuyển vị của các nút của hệ.

Các liên kết phụ đặt thêm vào hệ gồm:

- Liên kết mômen:** nó có tác dụng làm cho các nút không thể xoay được nhưng có thể di chuyển được. Trong liên kết này, chỉ phát sinh ra phản lực mômen vì nó chỉ ngăn cản chuyển vị xoay của nút.
- Liên kết lực:** nó có tác dụng làm cho các nút của hệ không chuyển vị thẳng được. Trong liên kết này phát sinh phản lực hướng trục.



Muốn lập hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị, ta đặt thêm các liên kết mômen và liên kết lực vào các nút của hệ thực để sao cho những liên kết này với số liệu tối thiểu, có khả năng ngăn cản tất cả các chuyển vị xoay và chuyển vị thẳng của các nút.



Ví dụ: Hệ trên hình 4-10b là hệ cơ bản của hệ vẽ trên hình 4-10a. Trong đó, ta đặt thêm các liên kết mômen và liên kết lực để ngăn cản tất cả các chuyển vị của các nút của hệ.

2. Phương trình chính tắc:

a, **Về phương diện chuyển vị:** muốn bảo đảm hệ cơ bản tương đương với hệ thực thì sau khi thêm các liên kết ta phải gây ra những chuyển vị cưỡng bức Z_1, Z_2, \dots

b, **Về phương diện lực:** tại các nút của hệ thực không có phản lực vì không có liên kết. Muốn bảo đảm cho hệ cơ bản tương đương với hệ thực về phương diện lực, ta phải viết điều kiện phản lực tại các liên kết mới thêm vào hệ phải bằng không.

Nếu gọi R_k là phản lực tại liên kết đặt thêm thứ k nào đó, ta phải có:

$$R_k = 0 \quad (4-12)$$

Tức là $R_k = R_k(Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n, P)$ là phản lực tại liên kết thứ k lần lượt do các chuyển vị cưỡng bức $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ tại các liên kết tương ứng gây ra và do tải trọng gây ra trong hệ cơ bản phải bằng không.

Theo nguyên lý cộng tác dụng ta có:

$$R_k(Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n, P) = R_{kz_1} + R_{kz_2} + \dots + R_{kz_n} + R_{kp}$$

Trong đó: $R_{kz1}, R_{kz2}, \dots, R_{kzn}$ lần lượt là phản lực tại liên kết thứ k trong hệ cơ bản do chuyển vị cưỡng bức $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ tại các liên kết thứ 1, 2, ..., n gây ra.

R_{kp} - là phản lực liên kết thứ k trong hệ cơ bản do tải trọng gây ra.

Chú ý, theo giả thiết 5, trong trường hợp tải trọng chỉ đặt ở nút, nên khi chưa mất ổn định, thì trong các thanh chỉ xuất hiện các lực nén hoặc kéo tự cân bằng mà không xuất hiện mômen uốn ngang. Do đó, các số hạng tự do R_{kp} đều bằng không, tức là:

$$R_{1p}=R_{2p}=...=R_{kp}=...=R_{np}=0$$

Nếu ký hiệu r_{km} - là phản lực tại liên kết thứ k do chuyển vị $\bar{Z}_m = 1$ tại liên kết thứ m và do lực nén P gây ra trong hệ cơ bản, ta có:

$$R_{kZ_m} = r_{km} Z_m$$

Vậy, ta có thể viết điều kiện (4-12) như sau:

$$r_{k_1}Z_1 + r_{k_2}Z_2 + \dots + r_{k_n}Z_n = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Nếu viết điều kiện phản lực bằng không cho tất cả các liên kết đặt thêm vào hệ, ta sẽ được hệ phương trình chính tắc theo phương pháp chuyển vị:

[illegible]

3. Cách xác định các hệ số r_{km} trong phương trình chính tắc:

a. Về ý nghĩa vật lý

Hệ số r_{km} là phản lực đơn vị tại liên kết thứ k do chuyển vị cưỡng bức $\bar{Z}_m = 1$ tại liên kết thứ m và do lực nén P gây ra trên hệ cơ bản.

b. Cách xác định r_{km}

1. Vẽ biểu đồ mômen uốn \overline{M}_m do chuyển vị cưỡng bức đơn vị $\overline{Z}_m = 1$ tại liên kết thứ m và do lực nén P gây ra trên hệ cơ bản.
2. Sử dụng phương pháp tách nút và xét điều kiện cân bằng nút, rút ra r_{km} (xem các ví dụ sau)

Chú ý: Định lý về sự tương hỗ giữa các phản lực đơn vị $r_{km} = r_{mk}$ vẫn nghiệm đúng trong trường hợp này.

4. Phương trình ổn định:

Hệ phương trình thuần nhất (4-13) được thoả mãn với hai khả năng:

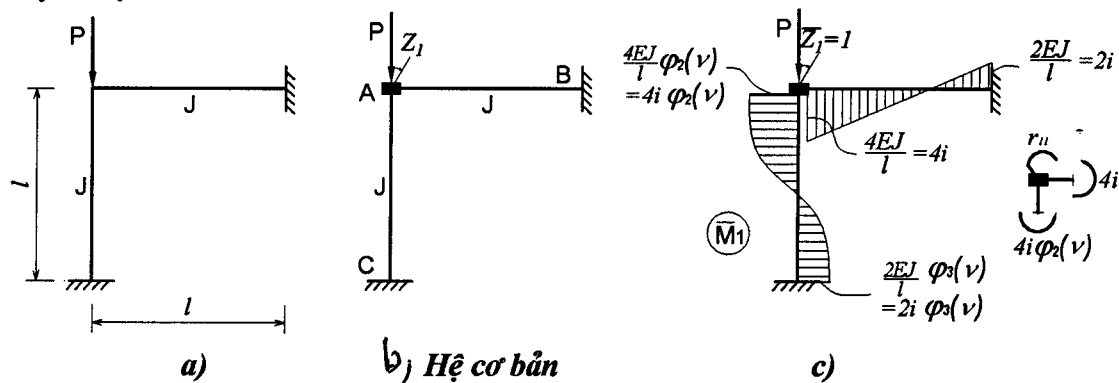
1. Tất cả ẩn Z_i đều bằng không. Đó là nghiệm tầm thường vì trong trường hợp này các nút không chuyển vị, nên hệ vẫn chưa bị mất dạng cân bằng ban đầu, tức là chưa mất ổn định.
2. Tất cả hoặc một số ẩn Z_i khác không. Lúc này các nút có chuyển vị, do đó hệ có dạng cân bằng mới khác với dạng ban đầu, tức là hệ mất ổn định. Muốn được nghiệm này, thì định thức các hệ số của hệ (4-13) phải bằng không.

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (4-14)$$

Bởi vì các hệ số r_{km} phụ thuộc giá trị lực nén, nên ta có thể chọn giá trị của lực nén để sao cho điều kiện (4-14) được thoả mãn. Như vậy, ta có thể xác định lực tới hạn hay thông số tới hạn từ điều kiện (4-14) và gọi điều kiện này là phương trình ổn định theo phương pháp chuyển vị.

Muốn tìm đường biến dạng của hệ khi mất ổn định, ta có thể cho một ẩn nào đó, chẳng hạn $Z_1 = 1$, rồi xác định các ẩn còn lại theo hệ phương trình chính tắc (4-13)

Ví dụ 4-1: Xác định lực tới hạn của hệ vẽ trên hình (4-11a) theo phương pháp chuyển vị. Cho $EJ = \text{const}$.



Hình 4-11

Bài giải:

1. Hệ đã cho có một ẩn số: Z_1 (H4-11a)

Hệ cơ bản (hình 4-11b)

$$\text{Độ cứng đơn vị: } i = \frac{EJ}{l}$$

2. Xác định thông số ν cho thanh chịu nén:

$$\nu = l \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

3. Phương trình chính tắc:

$$r_{11}Z_1=0$$

4. Phương trình ổn định:

$$D=r_{11}=0$$

5. Xác định r_{11} :

a) Vẽ biểu đồ mômen uốn đơn vị \overline{M}_1 do chuyển vị đơn vị $\overline{Z}_1 = 1$ và lực nén P gây ra trên hệ cơ bản.

Chú thích: Trong hệ cơ bản (hình 4-11b), thanh AB không chịu nén, $P=0$, $\nu=0$, nên các hàm $\varphi_2(\nu) = \varphi_3(\nu) = 1$. Do đó, dạng biểu đồ mômen uốn của đoạn AB là đường thẳng.

b) Tách nút A và xét sự cân bằng nút A, ta được:

$$r_{11} - 4i - 4i\varphi_2(\nu) = 0 \rightarrow r_{11} = 4i + 4i\varphi_2(\nu)$$

Từ phương trình ổn định $r_{11}=0$, rút ra $\varphi_2(\nu) = -1$

Tra bảng phụ lục

Chọn $\nu_{th} = 5,3$

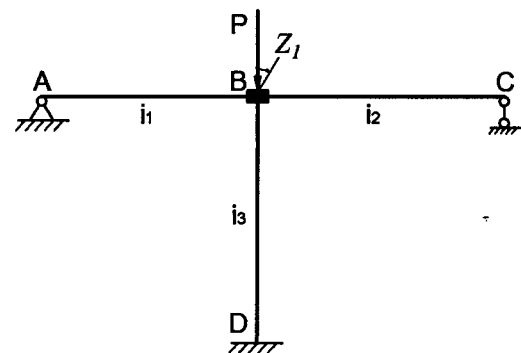
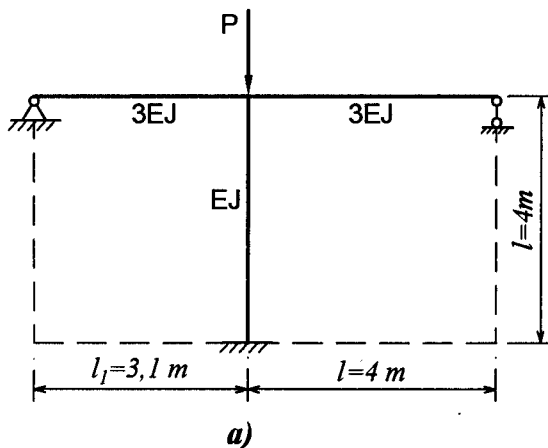
Lực tới hạn P_{th} :

$$P_{th} = \nu_{th}^2 \frac{EJ}{l^2} = 5,3^2 \frac{EJ}{l^2}$$

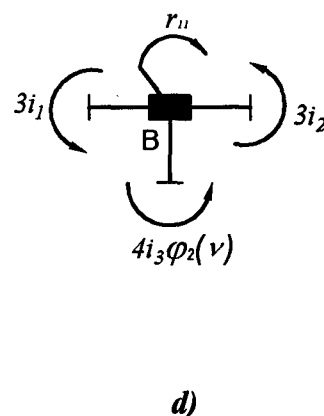
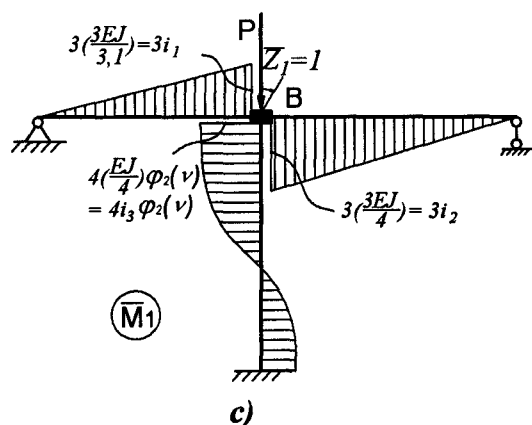
$$P_{th} = 28,09 \frac{EJ}{l^2}$$

ν	$\varphi_2(\nu)$
5,3	-0,9423
5,4	-1,1563

Ví dụ 4-2: Tìm lực tới hạn cho hệ vẽ trên hình (4-12a) theo phương pháp chuyển vị.



Hệ cơ bản



Hình 4-12

Bài giải:

1. Hệ đã cho (H4-12a) có một ẩn:

Hệ cơ bản (hình 4-12b)

Độ cứng đơn vị của các thanh trong hệ cơ bản

❖ Thanh AB: $i_1 = \frac{3EI}{3,1} = 0,9677EI$

❖ Thanh BC: $i_2 = \frac{3EI}{4} = 0,75EI$

❖ Thanh BD: $i_3 = \frac{EI}{4} = 0,25EI$

2. Xác định thông số ν cho thanh chịu nén:

$$\nu = 4\sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

3. Phương trình chính tắc: $r_{II}Z_I = 0$

4. Phương trình ổn định: $r_{II} = 0$

5. Xác định r_{II} :

a) Vẽ biểu đồ mômen uốn đơn vị \overline{M}_1 do chuyển vị đơn vị $\overline{Z}_1 = 1$ và lực nén gây ra trên hệ cơ bản.

Chú ý: - Độ cứng đơn vị ($i_n, n = 1, 2, 3$) của các thanh trong hệ cơ bản khác nhau.
- Dạng biểu đồ mômen uốn của các thanh không chịu nén là đường thẳng, ví dụ thanh AB, BC.

b) Tách nút B và xét sự cân bằng nút B (H4-12d), ta có:

$$r_{II} - 3i_1 - 3i_2 - 4i_3\varphi_2(\nu) = 0$$

$$\Rightarrow r_{II} = 3i_1 + 3i_2 + 4i_3\varphi_2(\nu)$$

Từ phương trình ổn định $r_{II}=0$, rút ra:

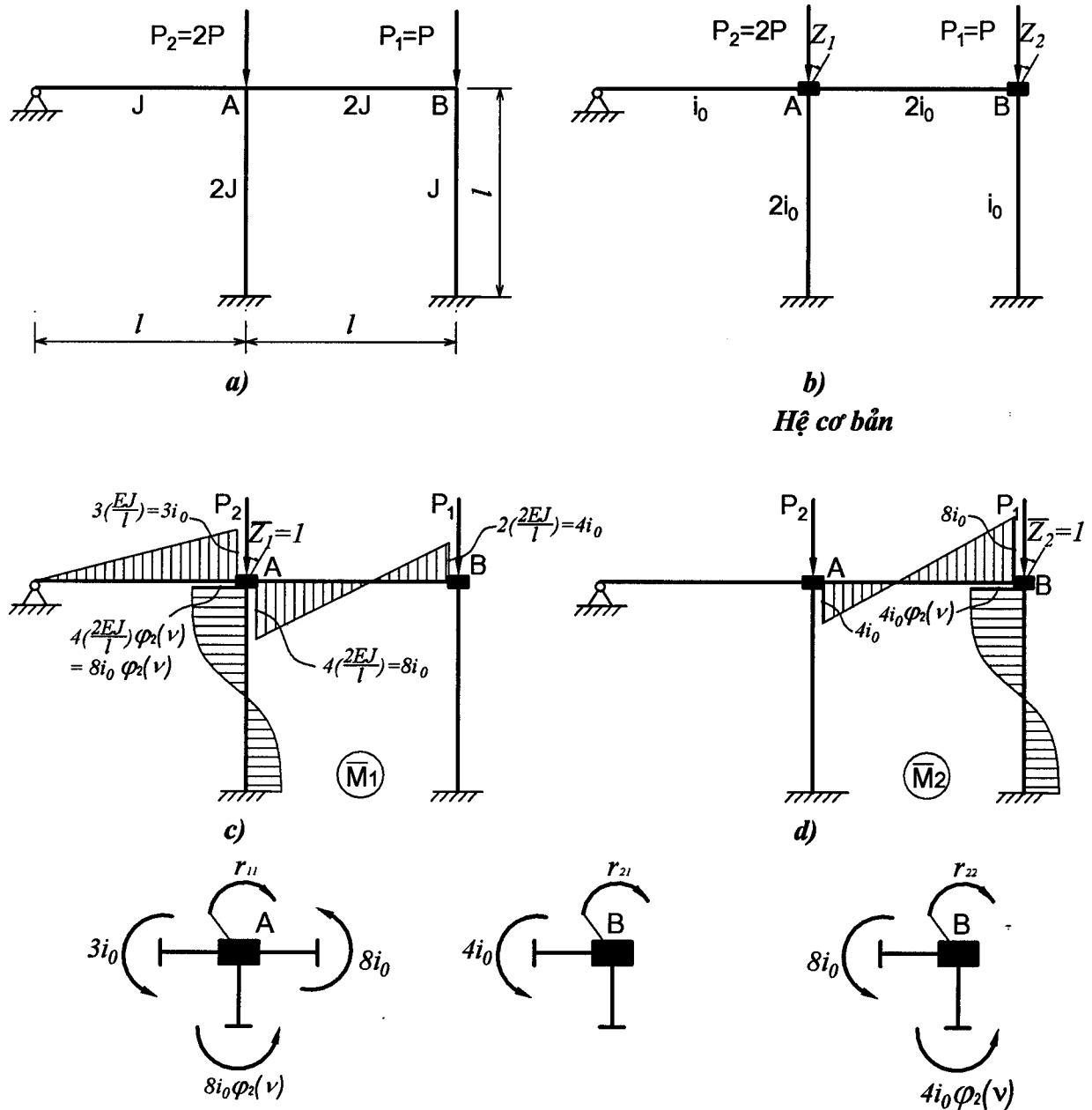
$$\varphi_2(\nu) = -\frac{3i_1 + 3i_2}{4i_3} = -\frac{3(0,9677 + 0,75)EI}{4 \cdot 0,25EI} = -5,1531$$

Tra bảng phụ lục, chọn $\nu_{th} = 6$

ν	$\varphi_2(\nu)$
6	-5,1531

Vậy, lực tới hạn: $P_{th} = 6^2 \frac{EJ}{4^2} = 2,25EJ$

Ví dụ 4-3: Xác định lực tới hạn cho hệ vẽ trên hình 4-13a



Hình 4-13

Bài giải

1. Hệ đã cho có 2 ẩn

Hệ cơ bản (hình 4-13b)

Độ cứng đơn vị của từng thanh: $i_0 = \frac{EJ}{l}$

2. Xác định thông số ν của các thanh chịu nén

Thanh đứng bên phải:

$$\nu_1 = l \sqrt{\frac{P_1}{EJ}} = l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \nu$$

Thanh đứng bên trái:

$$\nu_2 = l \sqrt{\frac{P_2}{2EJ}} = l \sqrt{\frac{2P}{2EJ}} = \nu$$

3. Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} = 0$$

4. Xác định r_{11} , $r_{12} = r_{21}$, r_{22}

a) Xác định r_{11} , r_{12}

- Vẽ biểu đồ mômen uốn đơn vị \overline{M}_1 do chuyển vị đơn vị $\overline{Z}_1 = 1$ và lực nén gây ra trên hệ cơ bản (Hình 4-13c)

- Tách nút A và xét sự cân bằng nút A, ta có

$$r_{11} - 8i_0 - 3i_0 - 8i_0\varphi_2(\nu) = 0$$

$$\Rightarrow r_{11} = 11i_0 + 8i_0\varphi_2(\nu)$$

- Xét sự cân bằng của nút B trên biểu đồ \overline{M}_1 , ta có:

$$r_{21} = 4i_0$$

b) Xác định r_{22}

- Vẽ biểu đồ mômen uốn đơn vị \overline{M}_2 do chuyển vị đơn vị $\overline{Z}_2 = 1$ và lực nén gây ra trên hệ cơ bản. (hình 4-13d)

- Tách nút B và xét cân bằng của nút B, ta có

$$r_{22} = 8i_0 + 4i_0\varphi_2(\nu)$$

Thay kết quả vào phương trình ổn định

$$D = \begin{vmatrix} i_0[11 + 8\varphi_2(\nu)] & 4i_0 \\ 4i_0 & i_0[8 + 4\varphi_2(\nu)] \end{vmatrix} = 0$$

$$D = 8\varphi_2^2(\nu) + 27\varphi_2(\nu) + 18 = 0$$

$$\varphi_2(\nu) = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 4 \cdot 8 \cdot 18}}{2 \cdot 8} = \begin{bmatrix} -2,460 \\ -0,914 \end{bmatrix}$$

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình này là $\varphi_2(\nu) = -0,914$

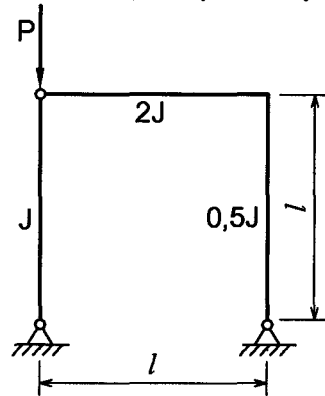
Tra bảng phụ lục; lấy gần đúng thì $\nu_{th} = 5,3$

ν	$\varphi_2(\nu)$
5,3	-0,9423

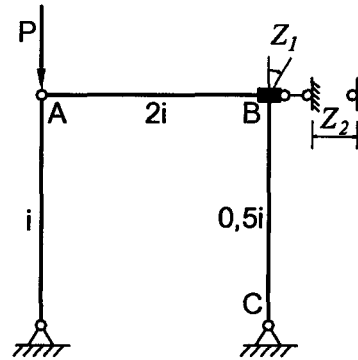
Do đó lực tới hạn P_{th}

$$P_{th} = \nu_{th}^2 \frac{EJ}{l^2} = 28,1 \frac{EJ}{l^2}$$

Ví dụ 4-4: Xác định lực tới hạn cho hệ vẽ trên hình 4-14a.

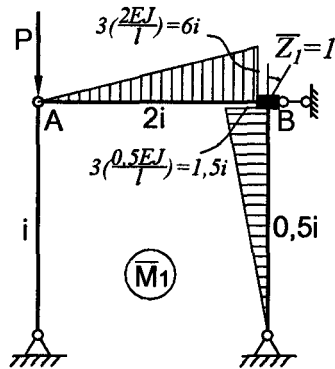


a)

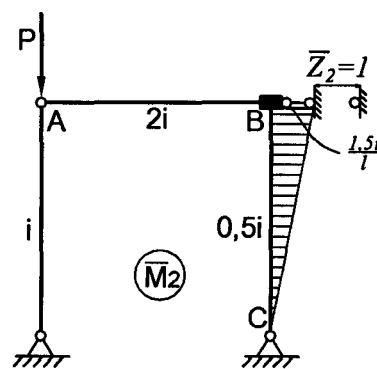


b)

Hệ cơ bản



c)



d)

Hình 4-14

Bài giải:

1) Hệ có 2 ẩn số Z_1, Z_2 :

Hệ cơ bản (hình 4-14b)

Độ cứng đơn vị của từng thanh: $i_0 = \frac{EJ}{l}$

2) Thông số của thanh chịu nén:

$$\nu = l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \alpha l$$

3) Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0$$

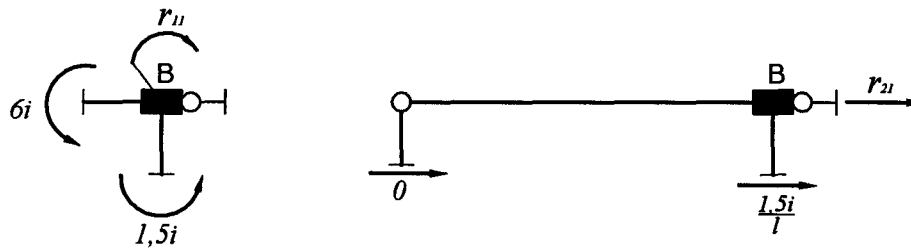
4) Xác định r_{11} , $r_{12} = r_{21}$, r_{22} :

a) Xác định r_{11} , r_{12}

- Vẽ biểu đồ mômen uốn đơn vị \overline{M}_1 do chuyển vị đơn vị $\overline{Z}_1 = 1$ và lực nén gây ra trên hệ cơ bản. (Hình 4-14c)

Chú thích: Trong hệ cơ bản, 2 thanh AB và BC có liên kết một đầu ngàm và một đầu khớp, không chịu nén nên hàm $\varphi_1(v) = 1$. Do đó dạng biểu đồ \overline{M}_1 là đường thẳng (Hình 4-14c).

b) Tách nút B và xét sự cân bằng nút B, ta có:



Nút tách từ \overline{M}_1

Nút tách từ \overline{M}_1

$$r_{11} - 6i - 1,5i = 0 \Rightarrow r_{11} = 7,5i$$

$$r_{21} + 1,5 \frac{i}{l} = 0 \Rightarrow r_{21} = r_{12} = -1,5 \frac{i}{l}$$

b) Xác định r_{22}

- Vẽ biểu đồ mômen uốn đơn vị \overline{M}_2 do chuyển vị đơn vị $\overline{Z}_2 = 1$ và lực nén gây ra trên hệ cơ bản. (Hình 4-14d)

- Tách nút từ \overline{M}_2 và xét cân bằng của nó, ta có:



$$r_{22} = \frac{i}{l^2} (1,5 - v^2)$$

Thay các kết quả này vào phương trình ổn định:

$$D = \begin{bmatrix} 7,5i & -1,5 \frac{i}{l} \\ -1,5 \frac{i}{l} & \frac{i}{l^2} (1,5 - v^2) \end{bmatrix} = \frac{i^2}{l^2} [7,5(1,5 - v^2) - 1,5^2] = 0$$

$$\text{Hay } 7,5v^2 - 9 = 0; \text{ suy ra } v_{th}^2 = 1,2$$

Lực tới hạn:

$$P_{th} = v_{th}^2 \frac{EJ}{l^2} = 1,2 \frac{EJ}{l^2}$$

§4. CÁCH SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG KHI TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CÁC KHUNG PHẪNG

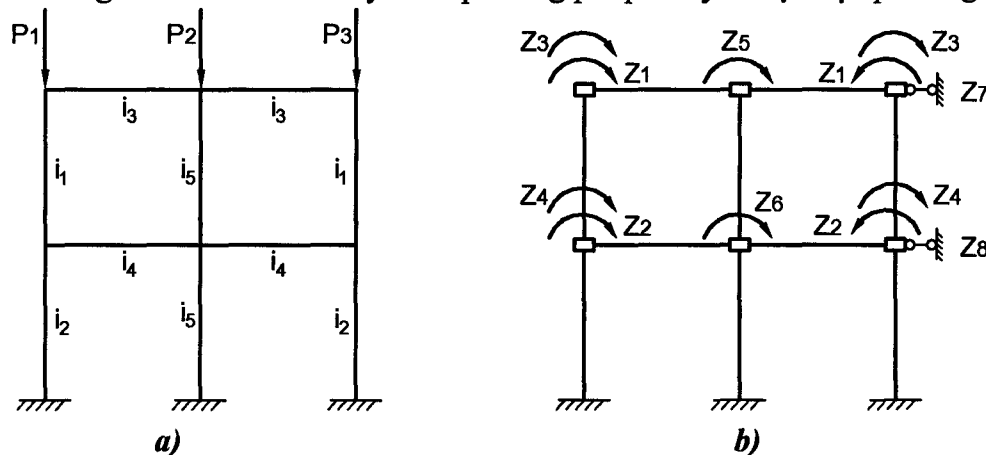
Khi tính ổn định, ta chỉ có thể sử dụng tính chất đối xứng trong trường hợp hệ đối xứng chịu tải trọng đối xứng.

Trong mục này, ta sẽ chứng minh tính chất sau:

Hệ đối xứng chịu tải trọng đối xứng có thể bị mất ổn định theo một trong 2 dạng: dạng biến dạng đối xứng và dạng biến dạng phản đối xứng.

Để chứng minh tính chất này, ta chỉ cần chứng minh là định thức D biểu thị điều kiện ổn định của hệ bằng tích của hai định thức: một định thức chỉ chứa các hệ số thuộc nhóm ẩn số đối xứng, còn một định thức chỉ chứa các hệ số thuộc nhóm các ẩn số phản xứng.

Có thể chứng minh tính chất này theo phương pháp chuyển vị hoặc phương pháp lực.



Hình 4-15

Dưới đây, ta dùng phương pháp chuyển vị. Giả sử có hệ số n ẩn số (n có thể chẵn hoặc lẻ) trong đó có m ẩn số là chuyển vị xoay tại các nút nằm trên trục đối xứng (các ẩn Z_5, Z_6 trên hình 4-15b) hoặc các chuyển vị thẳng (các ẩn Z_7, Z_8); các ẩn này là các ẩn phản đối xứng (khi hệ biến dạng phản đối xứng các ẩn số này tồn tại, còn khi hệ biến dạng đối xứng, các ẩn số này đều bằng không)

Trong hệ còn lại $n - m$ ẩn số có vị trí đối xứng với nhau từng đôi một.

Đem phân tích $n - m$ ẩn số này thành 2 nhóm gồm:

1. $\frac{n-m}{2}$ cặp ẩn số đối xứng, ví dụ các cặp ẩn số Z_1, Z_2 trên hình 4-15b
2. $\frac{n-m}{2}$ cặp ẩn số phản đối xứng, ví dụ các cặp ẩn số Z_3, Z_4 trên hình 4-17b

(Trên hình 4-15b, dùng các mũi tên để biểu thị chiều của chuyển vị)

Như vậy trong hệ gồm có $k = \frac{n-m}{2}$ cặp ẩn số đối xứng và $\frac{n-m}{2} + m = n - k$ các ẩn số phản đối xứng.

Các ẩn số đối xứng đánh từ số 1, 2, ... đến k ;

Các ẩn số phản đối xứng đánh số từ $k+1, k+2 \dots$ đến n .

Phương trình ổn định có dạng:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} & r_{1(k+1)} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} & r_{2(k+1)} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk} & r_{k(k+1)} & \dots & r_{kn} \\ r_{(k+1)1} & r_{(k+1)2} & \dots & r_{(k+1)k} & r_{(k+1)(k+1)} & \dots & r_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nk} & r_{n(k+1)} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (4-15)$$

Nhưng như đã biết (xem chú thích * trang 67)

- Các phần lực đối xứng do các chuyển vị phản đối xứng gây ra bằng không.
- Các phần lực phản đối xứng do các chuyển vị đối xứng gây ra bằng không (xem chú thích * trang 67)

Do đó, các phần tử trong định thức (4-15) có giá trị như sau:

$$r_{pq} = r_{qp} = 0 \text{ khi } p \leq k; q > k$$

$$r_{pq} = r_{qp} \neq 0 \text{ khi } p \leq k; q \leq k \text{ và khi } p > k; q > k$$

Do đó, định thức (4-15) có dạng:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{(k+1)(k+1)} & \dots & r_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{n(k+1)} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Hay } D = \begin{vmatrix} D_{dx} & 0 \\ 0 & D_{pdx} \end{vmatrix} = D_{dx} \cdot D_{pdx} = 0$$

Trong đó:

- D_{dx} : định thức chỉ chứa các phần lực đối xứng do chuyển vị đối xứng gây ra.
- D_{pdx} : Định thức chỉ chứa các phần lực phản đối xứng do chuyển vị phản đối xứng gây ra

Như vậy, hệ sẽ mất ổn định khi một trong 2 điều kiện dưới đây xảy ra

$$D_{dx} = 0 \quad (4-16)$$

$$\text{Hoặc } D_{pdx} = 0 \quad (4-17)$$

Điều kiện: $D_{dx} = 0$ xảy ra tương ứng với dạng mất ổn định đối xứng.

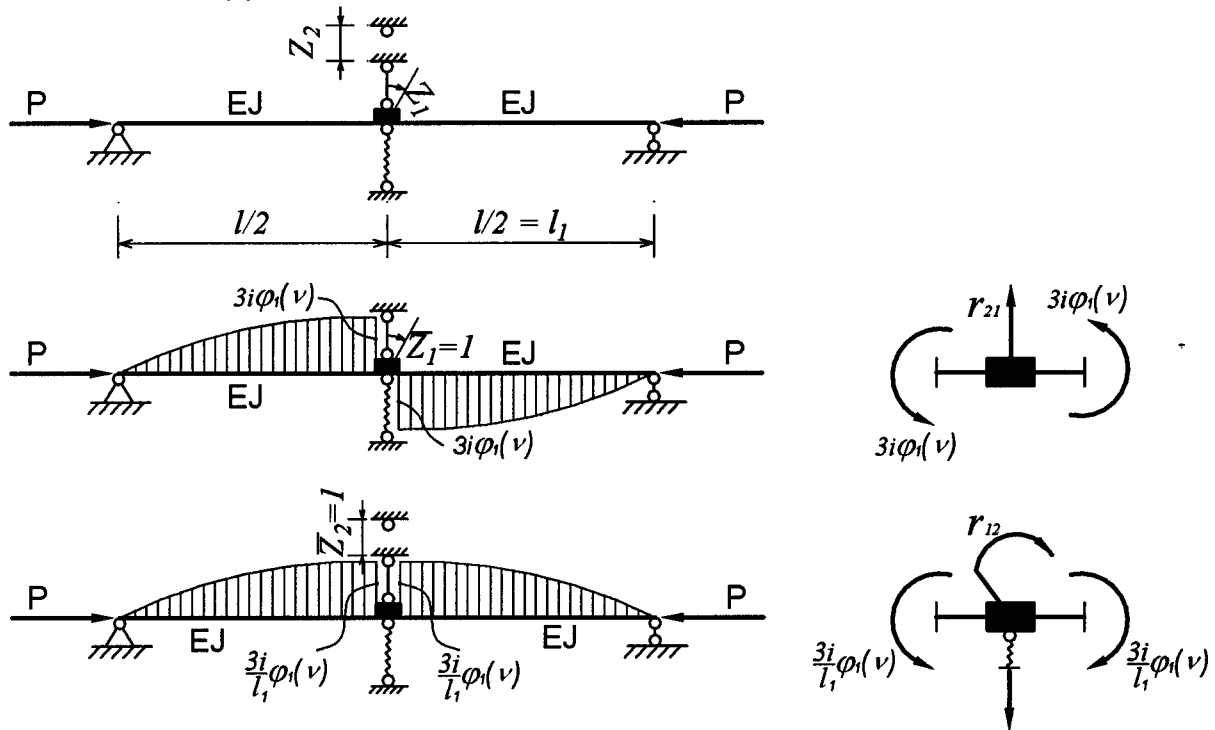
$D_{pdx} = 0$ xảy ra tương ứng với dạng mất ổn định phản đối xứng.

Đó là điều cần chứng minh.

Dựa vào tính chất trên, khi tính ổn định của khung đối xứng chịu tải trọng đối xứng, ta được phép khảo sát hệ với hai trường hợp riêng biệt: hệ mất ổn định theo dạng đối xứng và hệ mất ổn định theo dạng phản đối xứng.

Tất nhiên lực tới hạn của hệ đã cho là lực nhỏ nhất trong hai lực tới hạn tìm được tương ứng với hai dạng biến dạng nêu trên.

Chú thích (*):



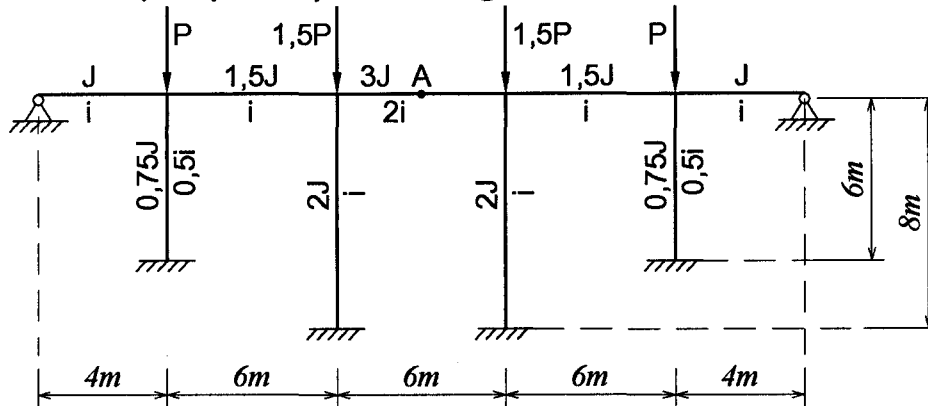
Z_1 : chuyển vị phản đối xứng

Z_2 : chuyển vị đối xứng

$r_{21} = 0$: phản lực đối xứng do chuyển vị phản đối xứng gây ra bằng không.

$r_{12} = 0$: phản lực phản đối xứng do chuyển vị đối xứng gây ra bằng không.

Ví dụ 4-3: Xác định lực tối hạn cho khung vẽ trên hình 4-16



Hình 4-16

Bài giải:

Hệ đã cho là hệ đối xứng, chịu tải trọng đối xứng.

Trước tiên, ta xác định các thông số của các thanh chịu nén:

a. Hai thanh đứng ngoài biên

$$\nu_1 = 6 \sqrt{\frac{P}{0,75EJ}} = \sqrt{\frac{48P}{EJ}} = \nu$$

b. Hai thanh đứng giữa

$$\nu_2 = 8 \sqrt{\frac{1,5P}{2EJ}} = \sqrt{\frac{48P}{EJ}} = \nu$$

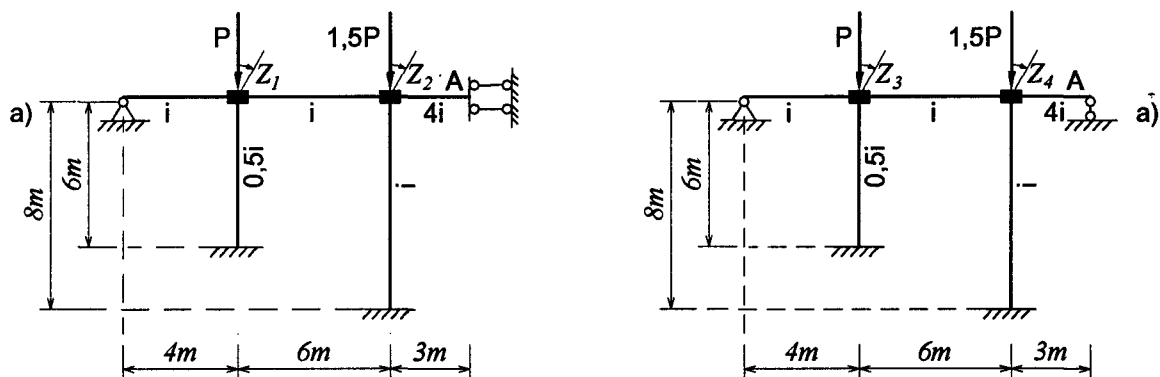
Độ cứng đơn vị của các thanh tính theo I (H4-18) với $i = \frac{EJ}{4}$

1. Giả thiết hệ mất ổn định theo dạng đối xứng:

Xét mặt cắt A trên trục đối xứng (Hình 4-18), ta thấy:

Khi hệ bị mất ổn định theo dạng đối xứng, mặt cắt A không thể xoay được và cũng không dịch chuyển ngang được, nhưng chuyển vị thẳng đứng vẫn tồn tại vì chuyển vị này không phá vỡ tính đối xứng và không có yếu tố nào ngăn cản nó.

Do nhận xét đó, ta thay mặt cắt A bằng ngàm trượt, và do đó hệ cơ bản trên hình 4-17a

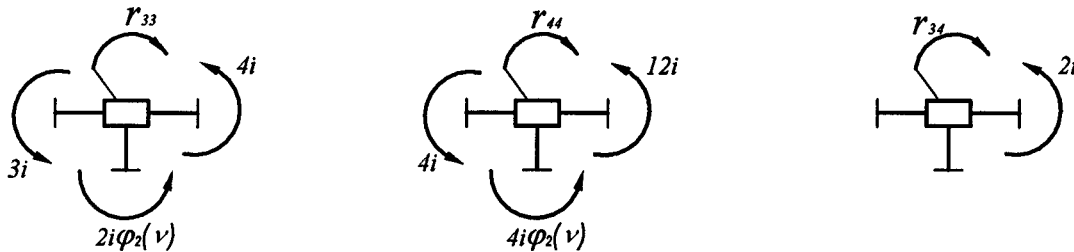


2. Giả thiết hệ mất ổn định theo dạng phản đối xứng:

Xét mặt cắt A nằm trên trục đối xứng, (Hình 4-16). Khi hệ mất ổn định theo dạng phản đối xứng, ta thấy: mặt cắt A có thể tự do xoay và có thể chuyển vị ngang, nhưng không thể chuyển vị thẳng đứng, vì nếu có thì hệ sẽ mất tính chất biến dạng phản đối xứng.

Do đó, ta có thể thay mặt cắt A bằng gối tựa di động và cắt đôi hệ ra để tính. Trong trường hợp này, hệ cơ bản như trên hình 4-18a.

Các biểu đồ mômen uốn đơn vị $\overline{M}_3, \overline{M}_4$ cần thiết vẽ trên các hình 4-18b,c. Dùng phương pháp tách nút và xét sự cân bằng nút, ta xác định được r_{33}, r_{34}, r_{44} như sau:



$$r_{33} = 3i + 4i + 2i\varphi_2(\nu) = i[7 + 2\varphi_2(\nu)]$$

$$r_{34} = r_{43} = 2i$$

$$r_{44} = 4i + 12i + 4i\varphi_2(\nu) = i[16 + 4\varphi_2(\nu)]$$

Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} 7 + 2\varphi_2(\nu) & 2 \\ 2 & 4[4 + \varphi_2(\nu)] \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Hay } 2\varphi_2^2(\nu) + 14\varphi_2(\nu) + 27 = 0$$

Nghiệm của phương trình:

$$\varphi_2(\nu) = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 2 \cdot 27}}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_2(\nu) = -3,0 \\ \varphi_2(\nu) = -4,5 \end{cases}$$

Nghiệm nhỏ nhất của phương trình: $\varphi_2(\nu) = -3,0$

Tra bảng 2 phần phụ lục, ta xác định được $\nu = 5,83$

$$\text{Do đó: } P_{th}^{**} = \frac{\nu^2 EJ}{48} = 0,708 EJ$$

So sánh hai kết quả tìm được, ta thấy: $P_{th}^* < P_{th}^{**}$. Như vậy, hệ trên hình 4-18 sẽ mất ổn định theo dạng đối xứng với giá trị lực tới hạn:

$$P_{th} = 0,651 EJ$$

**Phần B. TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA CÁC KHUNG PHẪNG
THEO PHƯƠNG PHÁP LỰC**

**§5. CÁCH XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG NHỮNG THANH
CHỊU UỐN CÙNG VỚI NÉN HOẶC KÉO.**

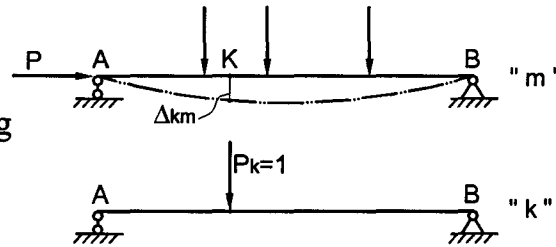
- ❖ Xét thanh chịu uốn cùng chịu nén (Hình 4-19a):

Gọi M_m : là mômen uốn do tải trọng ngang và lực nén P gây ra.

- ❖ Để xác định chuyển vị Δ_{km} tại điểm K , ta tạo ra trạng thái "k" bằng cách đặt tại K lực $P_k = 1$ theo phương cần xác định chuyển vị (Hình 4-19b). Ở trạng thái này (trạng thái "k") không có lực nén.

- ❖ Thiết lập biểu thức về sự cân bằng giữa công khả dĩ của nội lực và ngoại lực ở trạng thái "k" trên chuyển vị và biến dạng ở trạng thái "m", ta có:

$$1. \Delta_{km} = \sum \int \bar{M}_k \frac{M_m}{EJ} ds \quad (4-18)$$



Hình 4-19

Đó là công thức tính chuyển vị của thanh chịu uốn cùng chịu nén, kéo. Trong đó theo giả thiết 3, bỏ qua ảnh hưởng biến dạng dọc trục và biến dạng trượt.

1. Thanh có hai đầu khớp:

Xét thanh đặt tự do trên các gối tựa, chịu lực nén P và các tải trọng đặt ở đầu thanh (Hình 4-20a).

Tìm biểu thức $M_m(z)$:

Ký hiệu $M_A = c$, $M_B = d$, phản lực tại A là:

$$Q_A^* = \frac{d-c}{l}$$

Biểu đồ mômen uốn $M_m(z)$ có dạng đường cong như hình (4-20b).

Bây giờ tìm phương trình $M_m(z)$ như sau:

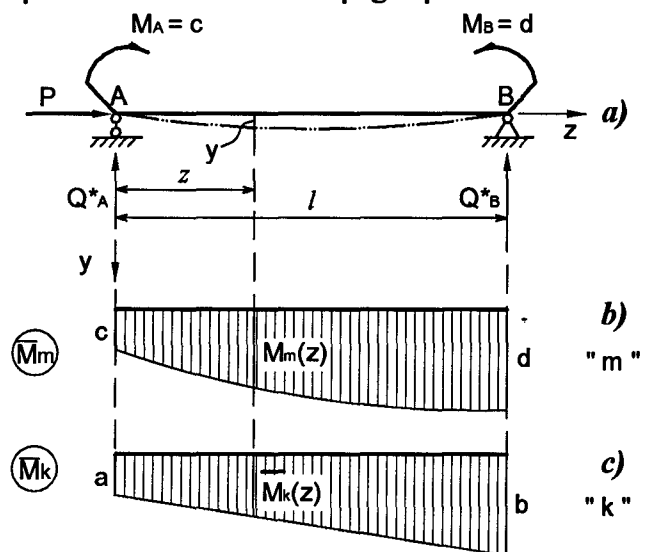
$$M_m(z) = M_A + Q_A^* z + Py$$

$$EJy'' = -M_m(z) = -(M_A + Q_A^* z + Py)$$

$$y'' + \alpha^2 y = -\frac{M_A + Q_A^* z}{EJ} \quad (a)$$

Trong đó: $\alpha^2 = \frac{P}{EJ} \quad (b)$

Nghiệm của phương trình (a) có dạng:



Hình 4-20

$$y(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z - \frac{M_A + Q_A^* z}{\alpha^2 EJ}$$

Xác định các hằng số tích phân A và B như sau:

❖ Các thông số ban đầu:

$$\begin{cases} y|_{z=0} = y(0) = 0 \\ y'|_{z=0} = y'(0) = ? \\ M(0) \\ Q^*(0) \end{cases}$$

Ta có: $y|_{z=0} = y(0) = 0 \Leftrightarrow A - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ} = 0 \Leftrightarrow A = \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ}$

Ta có: $y'|_{z=0} = y'(0) = B\alpha - \frac{Q^*(0)}{\alpha^2 EJ} \Rightarrow B = \frac{Q^*(0)}{\alpha^3 EJ} + \frac{y'(0)}{\alpha}$

$$y(z) = \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ} \cos \alpha z + \left[\frac{Q^*(0)}{\alpha^3 EJ} + \frac{y'(0)}{\alpha} \right] \sin \alpha z - \frac{M(0) + Q^*(0)z}{\alpha^2 EJ}$$

Do $M_m(z) = -y''(z)EJ$, ta được:

$$M_m(z) = \alpha EJ y'(0) \sin \alpha z + M(0) \cos \alpha z + \frac{Q^*(0)}{\alpha} \sin \alpha z$$

$$M_m(z) = \alpha EJ y'(0) \sin \alpha z + c \cos \alpha z + \frac{d-c}{\alpha l} \sin \alpha z$$

❖ Điều kiện biên: $z = l, y(l) = 0$

Theo (3-5)

$$y(z) = \frac{y'(0)}{\alpha} \sin \alpha z - \frac{M(0)}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha z) - \frac{Q^*(0)}{\alpha^3 EJ} (\alpha z - \sin \alpha z)$$

Từ điều kiện $y(l) = 0$, rút ra:

$$y'(0) = \frac{c}{\alpha EJ} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\operatorname{tg} \nu} \right) + \frac{d}{\alpha EJ} \left(\frac{1}{\sin \nu} - \frac{1}{\nu} \right)$$

Trong đó: $\nu = \alpha l = l \sqrt{\frac{P}{EJ}}$ (4-19)

Thay $y'(0)$ vào phương trình $M_m(z)$, ta được:

$$M_m(z) = c \cos \alpha z + \left[\frac{d}{\sin \nu} - \frac{c}{\operatorname{tg} \nu} \right] \sin \alpha z \quad (4-20)$$

Để xác định chuyển vị các đầu thanh, ta tạo trạng thái "k" và tìm phương trình $\overline{M}_k(z)$. Trong trường hợp tổng quát, biểu đồ mômen $\overline{M}_k(z)$ có dạng như hình 4-20c.

Phương trình $\overline{M}_k(z)$ có dạng: $\overline{M}_k(z) = a + \frac{b-a}{l} z$ (4-21)

Thay (4-20) và (4-21) vào (4-18), ta có:

$$EJ\Delta_{km} = \int_0^l \overline{M}_k M_m dz = c \int_0^l \left(a + \frac{b-a}{l}z\right) \cos \alpha z dz + \left(\frac{d}{\sin \nu} - \frac{c}{\operatorname{tg} \nu}\right) \int_0^l \left(a + \frac{b-a}{l}z\right) \sin \alpha z dz$$

Sau khi lấy tích phân và biến đổi, ta có:

$$EJ\Delta_{km} = \left(\frac{acl}{3} + \frac{bdl}{3}\right)\alpha(\nu) + \left(\frac{adl}{6} + \frac{bcl}{6}\right)\beta(\nu) \quad (4-22)$$

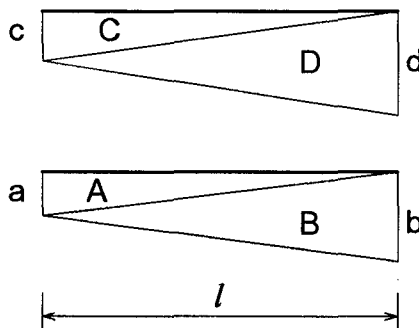
$$\text{Trong đó: } \alpha(\nu) = \frac{3}{\nu^2} \left(1 - \frac{\nu}{\operatorname{tg} \nu}\right); \beta(\nu) = \frac{6}{\nu^2} \left(\frac{\nu}{\sin \nu} - 1\right) \quad (4-23)$$

$\alpha(\nu)$ và $\beta(\nu)$ là các hàm điều chỉnh, kể đến ảnh hưởng của lực nén P.

Giá trị của chúng tra theo bảng phụ lục.

Lưu ý rằng trong bảng: khi $P = 0$ thì $\alpha(\nu) = \beta(\nu) = 1$

$$\text{khi } \nu = 0 \Rightarrow l \sqrt{\frac{P}{EJ}} = 0 \Rightarrow P = 0$$



$$A.C = \frac{cl}{2} \cdot \frac{2}{3} a = \frac{acl}{3}$$

$$B.D = \frac{dl}{2} \cdot \frac{2}{3} b = \frac{bdl}{3}$$

$$A.D = \frac{dl}{2} \cdot \frac{1}{3} a = \frac{adl}{6}$$

$$B.C = \frac{cl}{2} \cdot \frac{1}{3} b = \frac{bcl}{6}$$

2. Thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do:

Xét thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do, chịu lực nén P và các tải trọng ngang đặt ở đầu thanh (Hình 4-21a)

Hãy xác định chuyển vị ở đầu tự do của thanh.

a) Biểu đồ mômen uốn $M_m(z)$ do tải trọng ngang và lực nén P gây ra có dạng đường cong như hình (4-21b).

Mômen uốn tại đầu ngàm B:

$$M_B = c + el + Py_A = d + Py_A$$

Trong đó: d - mômen uốn

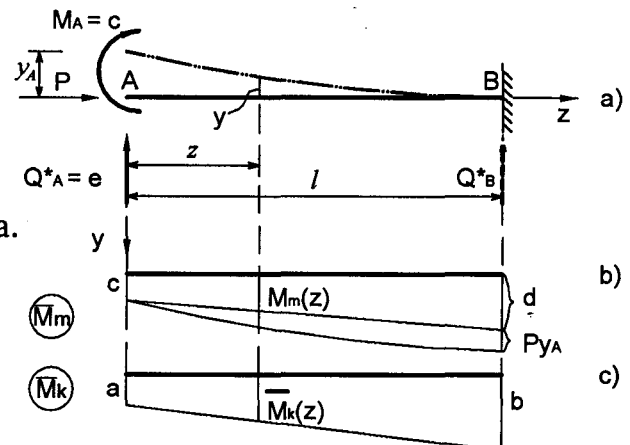
tại đầu ngàm do riêng tải trọng ngang gây ra.

Từ đó ta có:

$$e = \frac{d - c}{l}$$

Theo (3-6):

$$y'(z) = y'(0) \cos \alpha z - \frac{M(0)}{\alpha EJ} \sin \alpha z - \frac{Q^*(0)}{\alpha^2 EJ} (1 - \cos \alpha z)$$



Hình 4-21

Theo điều kiện biên ở ngàm: $y'|_{z=l} = y'(l) = 0$, rút ra:

$$y'(0) = \frac{M(0)}{\alpha EJ} \operatorname{tg} \nu + \frac{Q^*(0)}{\alpha^2 EJ} \left(\frac{1}{\cos \nu} - 1 \right), \text{ với } \nu = \alpha l$$

$$\text{Hay: } y'(0) = \frac{c}{\alpha EJ} \operatorname{tg} \nu + \frac{d-c}{\nu \alpha^2 EJ} \left(\frac{1}{\cos \nu} - 1 \right) \quad (a)$$

Theo phương trình (3-7), ta có:

$$M_m(z) = \alpha EJ y'(0) \sin \alpha z + M(0) \cos \alpha z + \frac{Q^*(0)}{\alpha} \sin \alpha z \quad (b)$$

Thay (a) vào (b) ta có:

$$M_m(z) = c \cos \alpha z + \left[\frac{c(\nu \sin \nu - 1) + d}{\nu \cos \nu} \right] \sin \alpha z \quad (4-24)$$

b) Để xác định chuyển vị đầu tự do, ta cần tạo trạng thái "k" và tìm $\overline{M}_k(z)$

Trong trường hợp tổng quát, biểu đồ mômen $\overline{M}_k(z)$ có dạng như hình 4-21c.

$$\text{Phương trình } \overline{M}_k(z) \text{ có dạng: } \overline{M}_k(z) = a + \frac{b-a}{l} z \quad (4-21)$$

Sau khi thay (4-21) và (4-24) vào (4-18), lấy tích phân và biến đổi, ta được công thức xác định chuyển vị cho thanh có một đầu ngàm, một đầu tự do như sau:

$$EJ \Delta_{km} = \frac{bdl}{3} \theta_1(\nu) + \frac{acl}{3} \theta_2(\nu) + \left(\frac{adl}{6} + \frac{bcl}{6} \right) \theta_3(\nu) \quad (4-25)$$

Trong đó các hàm $\theta_1(\nu), \theta_2(\nu), \theta_3(\nu)$: là các hàm số hiệu chỉnh kể đến ảnh hưởng của lực nén P. Trong đó:

$$\begin{cases} \theta_1(\nu) = \frac{3}{\nu^2} \left(\frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu} - 1 \right) \\ \theta_2(\nu) = \frac{3}{\nu^2} \left(1 + \nu \operatorname{tg} \nu - \frac{2}{\cos \nu} + \frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu} \right) \\ \theta_3(\nu) = \frac{6}{\nu^2} \left(\frac{1}{\cos \nu} - \frac{\operatorname{tg} \nu}{\nu} \right) \end{cases} \quad (4-26)$$

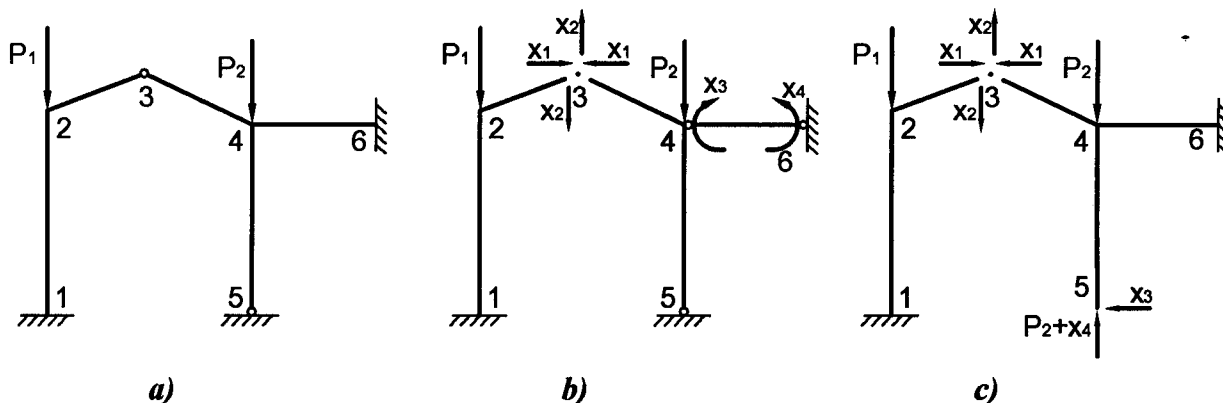
Giá trị của các hàm số tra theo bảng phụ lục.

Khi lực nén $P = 0$ thì $\theta_1(\nu) = \theta_2(\nu) = \theta_3(\nu) = 1$

1. Cách chọn hệ cơ bản:

Với cách chọn như vậy, ta sẽ dễ dàng xác định chuyển vị trong hệ cơ bản theo công thức (4-22) và (4-25) ở §5.

Ví dụ:



Hình 4-22

2. Phương trình chính tắc:

Theo giả thiết 5, tải trọng P_i (tải trọng $\neq X_i$) chỉ gây ra hiện tượng nén hoặc kéo trong các thanh của hệ cơ bản mà không gây ra uốn ngang. Như vậy biểu đồ M_p^0 do tải trọng P_i gây ra trong hệ cơ bản không tồn tại (tức $M_p^0 = 0$). Do đó các số hạng tự do Δ_{kp}

của phương trình chính tắc đều bằng không (tức là $\Delta_{kp} = \frac{1}{E_k} \bar{M}_k M_p^0 = 0$).

Lúc này, hệ phương trình chính tắc trở thành hệ phương trình thuần nhất.

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n = 0 \end{cases} \quad (4-27)$$

3. Cách xác định các hệ số của phương trình chính tắc:

Để xác định δ_{km} , ta cần tạo ra:

- Trạng thái "k" do lực $X_k = 1$ gây ra trong hệ cơ bản.
- Trạng thái "m" do lực $X_m = 1$ và các lực nén P gây ra trong hệ cơ bản.

Sau đó áp dụng công thức (4-18) hoặc áp dụng công thức nhân biểu đồ

Vê - rê - sa - ghin.

Chú ý:

a) Đối với những thanh không có lực nén P_i , áp dụng công thức (4-18) hoặc cách nhân biểu đồ Vê - rê - sa - ghin như thường lệ.

b) Đối với những thanh có lực nén P_i , ta cần áp dụng công thức (4-22) và (4-25) đã thiết lập ở mục §5.

Ngoài ra, chú ý định lý chuyển vị đơn vị tương hỗ $\delta_{km} = \delta_{mk}$ vẫn áp dụng được trong trường hợp này.

Khi tính chuyển vị trong các thanh chịu nén, ta cần quan niệm: lực nén và tải trọng đặt tại các nút.

4. Hệ phương trình ổn định:

Hệ phương trình thuần nhất (4-27) được thỏa mãn với hai khả năng:

1. Tất cả các ẩn X_i đều bằng không. Lúc này trong hệ chỉ có biến dạng kéo hoặc nén, chưa có biến dạng uốn. Do đó hệ vẫn ở trạng thái ổn định ban đầu.

Vậy hệ ổn định, tải trọng chưa đạt tới giá trị tới hạn.

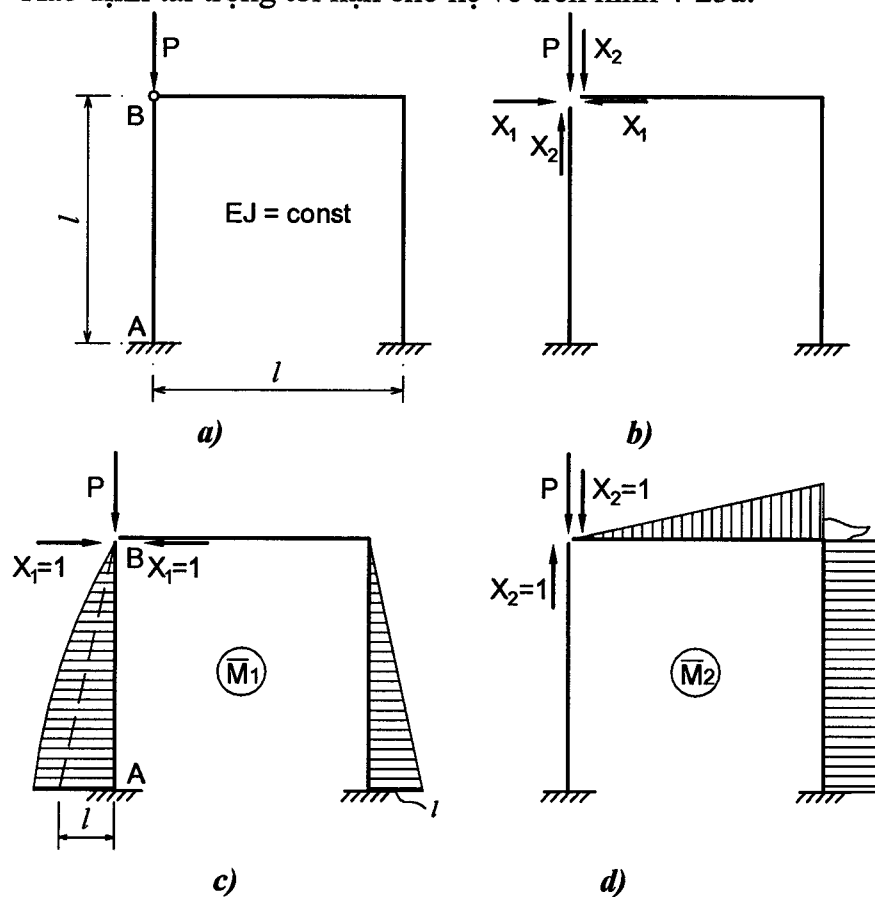
2. Tất cả hoặc một số ẩn X_i khác không. Lúc này trong hệ xuất hiện biến dạng uốn và hệ bị mất ổn định.

Điều kiện $X_i \neq 0$ là:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (4-28)$$

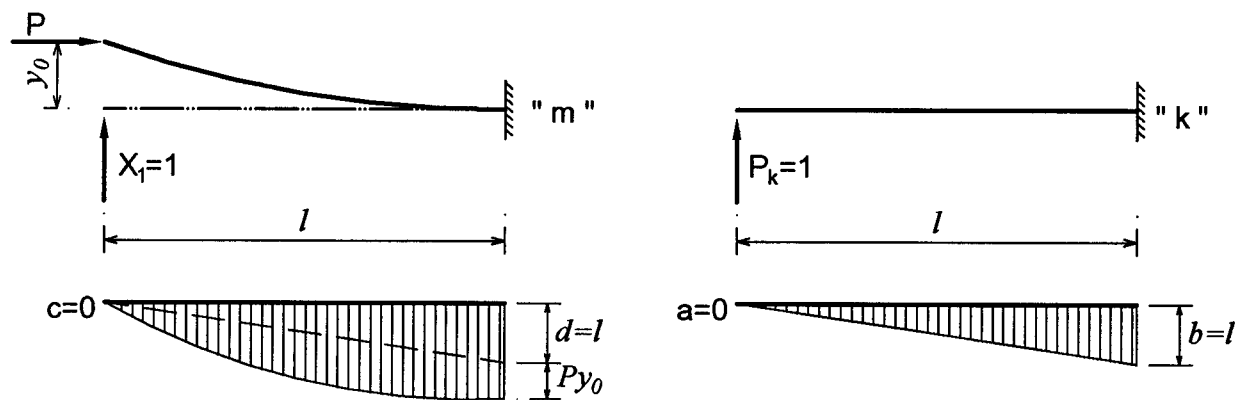
Vì giá trị δ_{km} phụ thuộc vào giá trị của lực P, nên có thể chọn các giá trị của lực P sao cho điều kiện (4-28) được thỏa mãn. Như vậy, ta có thể xác định tải trọng tới hạn từ điều kiện (4-28) và gọi điều kiện (4-28) là phương trình ổn định theo phương pháp lực.

Ví dụ 4-1: Xác định tải trọng tới hạn cho hệ vẽ trên hình 4-23a.



Hình 4-23

Chú thích: Thanh AB.



Giải:

1. Chọn hệ cơ bản:
Chọn hệ cơ bản (Hình 4-23b).
2. Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} = 0$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc δ_{11} , $\delta_{12} = \delta_{21}$, δ_{22} :

a, Để xác định δ_{11} , ta cần vẽ:

- ✓ Biểu đồ mômen uốn do $X_1 = 1$ và lực nén P gây ra trên hệ cơ bản (Hình 4-23c).
- ✓ Biểu đồ mômen uốn do riêng $X_1 = 1$ gây ra trên hệ cơ bản (Hình 4-23c, nét đứt).

Đối với thanh chịu nén AB, ta áp dụng công thức (4-25), trong đó thay:

$$c = 0, d = l, a = 0, b = l.$$

$$EJ\Delta_{km} = \frac{bdl}{3}\theta_1(\nu) + \frac{acl}{3}\theta_2(\nu) + \left(\frac{adl}{6} + \frac{bcl}{6}\right)\theta_3(\nu) = \frac{l^3}{3}\theta_1(\nu)$$

Còn đối với các thanh khác áp dụng cách nhân biểu đồ như thường lệ:

$$EJ\delta_{11} = \frac{l^3}{3} + \frac{l^3}{3}\theta_1(\nu) = \frac{l^3}{3}(1 + \theta_1(\nu))$$

b, Để xác định δ_{22} , δ_{21} , ta vẽ biểu đồ \overline{M}_2 (Hình 4-23d):

$$EJ\delta_{22} = \overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2 = \frac{l}{2} \cdot \frac{2l}{3} + l^3 = \frac{4l^3}{3}$$

$$EJ\delta_{21} = \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 = l^2 \frac{l}{2} = \frac{l^3}{2}$$

Thay kết quả vào phương trình ổn định :

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{EJ} \begin{vmatrix} \frac{l^3}{3}[1 + \theta_1(\nu)] & \frac{l^3}{2} \\ \frac{l^3}{2} & \frac{4l^3}{3} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9}[1 + \theta_1(\nu)] - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \theta_1(\nu) = -0,4375$$

Sử dụng bảng 1 phần phụ lục, ta tìm được: $\nu = 2,79$

$$\text{Ta có: } P_{th} = \nu^2 \frac{EJ}{l^2} = 7,78 \frac{EJ}{l^2}$$

CHƯƠNG V. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM LIÊN TỤC VÀ CỦA DÀN

Trong chương này, chúng ta nghiên cứu phương pháp xác định lực tối hạn cho các dầm liên tục và các thanh trong dàn phẳng.

Bài toán ổn định của dầm liên tục đã nghiên cứu tương đối hoàn chỉnh. Trong chương này, ta chỉ vận dụng phương pháp chuyển vị và phương pháp lực là 2 phương pháp cơ bản để tính ổn định của dầm liên tục chịu lực nén dọc trục.

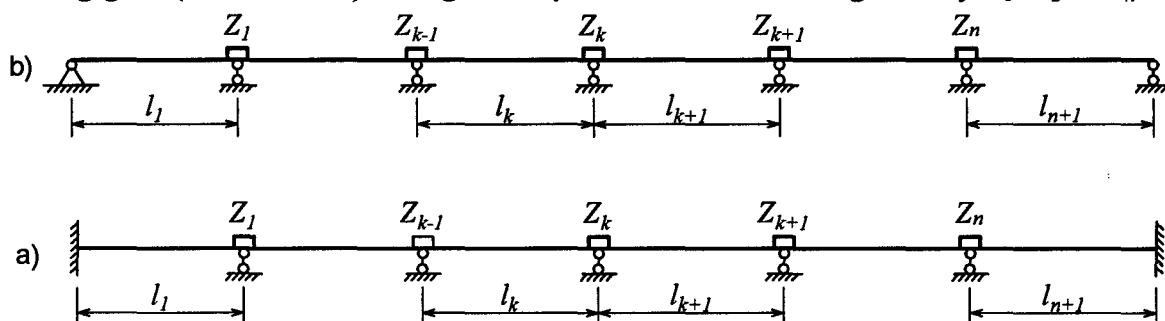
Bài toán ổn định tổng thể của dàn vẫn còn là một vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu. Ở đây, chỉ xét bài toán ổn định cục bộ của các thanh trong dàn. Các bài toán này, thường đưa về bài toán ổn định của thanh đơn giản, thanh liên tục trên gối đàn hồi hoặc thanh làm việc trong môi trường đàn hồi.

§1. CÁCH TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA DẦM LIÊN TỤC THEO PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

Nội dung của phương pháp chuyển vị đã trình bày ở mục §3 trong chương IV.

1. Hệ cơ bản:

Lập hệ cơ bản bằng cách đặt thêm các liên kết mômen vào các mặt cắt ở trên các gối trung gian (Hình 5-1a,b). Đồng thời đặt thêm các ẩn là các góc xoay Z_1, Z_2, \dots, Z_n .



Hình 5-1

2. Phương trình chính tắc:

Phương trình chính tắc biểu thị điều kiện phản lực mômen tại liên kết đặt thêm vào thứ k bằng không và có dạng:

$$r_{k(k-1)}Z_{k-1} + r_{kk}Z_k + r_{k(k+1)}Z_{k+1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5-1)$$

Trong đó:

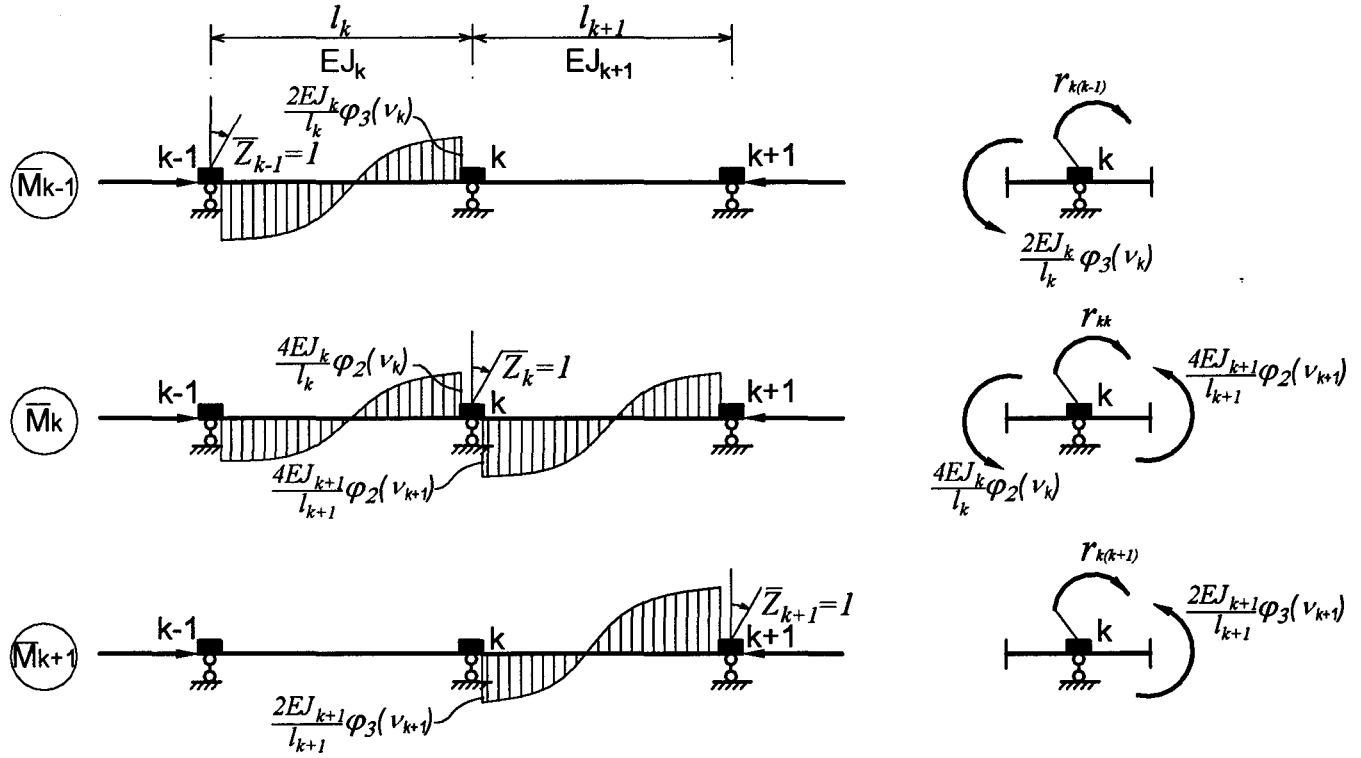
a) $r_{k(k-1)}, r_{kk}, r_{k(k+1)}$ là các phản lực mômen đơn vị tại liên kết mômen thứ k lần lượt do các chuyển vị cưỡng bức đơn vị $\bar{Z}_{k-1} = 1, \bar{Z}_k = 1, \bar{Z}_{k+1} = 1$ và do lực nén dọc trục gây ra trong hệ cơ bản.

b) $Z_{(k-1)}, Z_k, Z_{(k+1)}$ lần lượt là góc xoay ở liên kết mômen thứ $k-1, k, k+1$.

Phương trình (5-1) gọi là phương trình 3 góc xoay, vì nó chứa 3 ẩn là 3 góc xoay.

3. Xác định $r_{k(k-1)}$, r_{kk} , $r_{k(k+1)}$:

Để xác định $r_{k(k-1)}$, r_{kk} , $r_{k(k+1)}$, ta vẽ các biểu đồ mômen uốn đơn vị \bar{M}_{k-1} , \bar{M}_k , \bar{M}_{k+1} (Hình 5-2a, b, c).



Hình 5-2

Chú thích:

Biểu đồ \bar{M}_{k-1} là biểu đồ mômen uốn đơn vị do chuyển vị cưỡng bức đơn vị $\bar{Z}_{k-1} = 1$ tại liên kết k-1 và do lực nén gây ra trên hệ cơ bản.

Bây giờ sử dụng phương pháp tách nút k và xét sự cân bằng nút k trên biểu đồ \bar{M}_{k-1} , ta có:

$$r_{k(k-1)} - 2 \frac{EJ_k}{l_k} \varphi_3(v_k) = 0$$

$$\text{Rút ra: } r_{k(k-1)} = 2 \frac{EJ_k}{l_k} \varphi_3(v_k) \quad (5-2)$$

Tương tự, ta xác định được:

$$r_{kk} = 4 \frac{EJ_k}{l_k} \varphi_2(v_k) + 4 \frac{EJ_{k+1}}{l_{k+1}} \varphi_2(v_{k+1}) \quad (5-3)$$

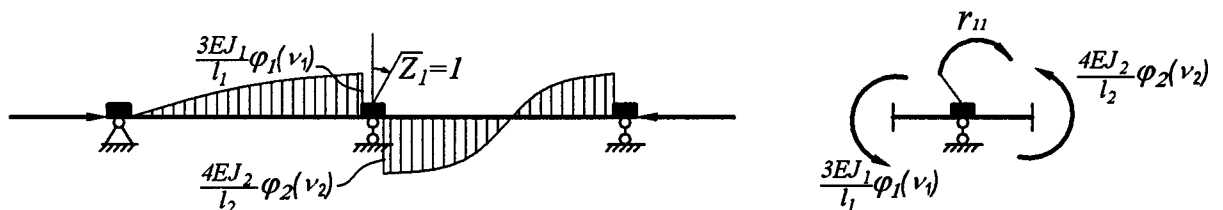
$$r_{k(k+1)} = 2 \frac{EJ_{k+1}}{l_{k+1}} \varphi_3(v_{k+1}) \quad (5-4)$$

Chú ý:

- Công thức (5-3) chỉ nghiệm đúng với trường hợp $k > 1$ và $k < n$ (Xem hình 5-1)
- Khi $k = 1$ và $k = n$, biểu thức r_{kk} phụ thuộc vào điều kiện liên kết ở 2 đầu thanh.
 - Nếu các gối biên là ngàm, như hình 5-1a, thì hệ số r_{11} và r_{nn} được xác định theo công thức (5-3).
 - Nếu các gối tựa biên là khớp, như hình 5-1b, thì hệ số r_{11} và r_{nn} được xác định theo công thức sau:

$$r_{11} = 3 \frac{EJ_1}{l_1} \varphi_1(v_1) + 4 \frac{EJ_2}{l_2} \varphi_2(v_2) \quad (5-5)$$

$$r_{nn} = 4 \frac{EJ_n}{l_n} \varphi_2(v_n) + 3 \frac{EJ_{n+1}}{l_{n+1}} \varphi_2(v_{n+1}) \quad (5-6)$$



4. Phương trình ổn định:

Từ phương trình thuần nhất (5-1), ta thiết lập phương trình ổn định của dầm theo phương pháp chuyển vị bằng cách cho định thức các hệ số phương trình đó bằng không.

$$D = 0 \quad (5-7)$$

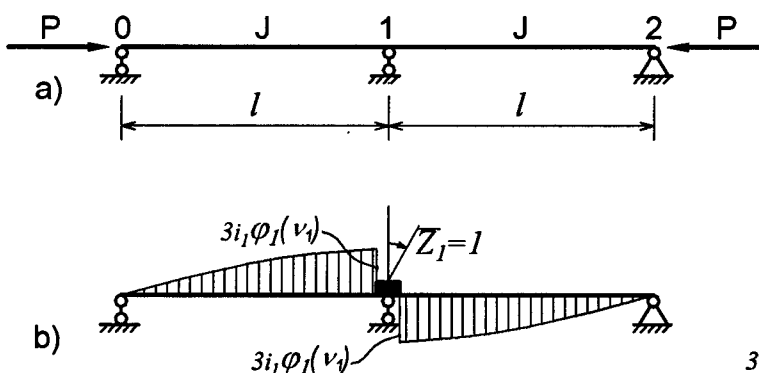
Giải phương trình (5-7) ta được lực tới hạn cho dầm liên tục.

Chú ý:

- ✓ Lực tới hạn tìm được theo điều kiện (5-7) xảy ra tương ứng với trường hợp dầm bị mất ổn định khi đó chuyển vị góc xoay $Z_k \neq 0$.
- ✓ Thực tế có thể xảy ra trường hợp dầm bị mất ổn định với góc xoay $Z_k = 0$.

Ví dụ 5-1:

Xác định lực tới hạn cho dầm liên tục (Hình 5-3a).



Hình 5-3

Bài giải:

Phương trình chính tắc:

$$r_{11}Z_1 = 2.3 \frac{EJ}{l_1} \varphi_1(\nu) Z_1 = 0$$

Phương trình có thể thỏa mãn với $Z_1 = 0$ tương ứng với dạng mất ổn định đối xứng. Và có thể thỏa mãn với $Z_1 \neq 0$ tương ứng với dạng mất ổn định phản đối xứng.

1. Trường hợp $Z_1 \neq 0$, ta có:

$$\varphi_1(\nu) = \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \nu}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)} = 0$$

$$\text{Suy ra: } \operatorname{tg} \nu = 0 \Rightarrow \nu = \pi \Rightarrow P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

2. Trường hợp $Z_1 = 0$, ta có:

Khi mất ổn định, mỗi nhịp của dầm có đường biến dạng như đường biến dạng của thanh có một đầu ngàm (tại 1) và một đầu khớp (tại 0, 2). Do đó:

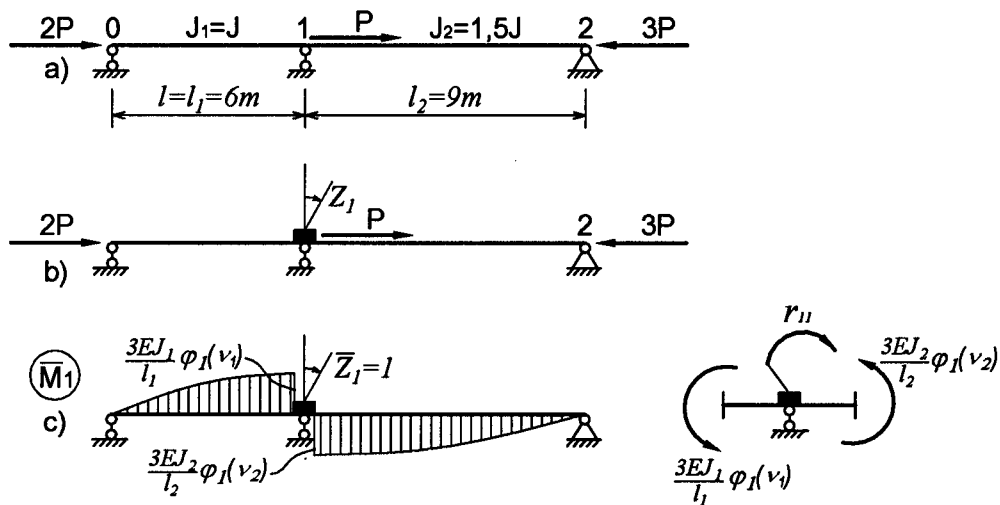
$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,7l)^2}$$

Ta thấy lực tới hạn nhỏ nhất xảy ra tương ứng với trường hợp $Z_1 \neq 0$. Vậy:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

Ví dụ 5-2:

Xác định lực tới hạn cho dầm liên tục (Hình 5-4a), theo phương pháp chuyển vị.



Hình 5-4

Bài giải:

1. Hệ đã cho có một ẩn Z_1 . Hệ cơ bản (Hình 5-4b)

Hệ số ν của các thanh chịu nén:

$$\text{Thanh 0 - 1: } \nu_1 = l_1 \sqrt{\frac{2P}{EJ_1}} = l \sqrt{\frac{2P}{EJ}} = \nu$$

$$\text{Thanh 1 - 2: } \nu_2 = l_2 \sqrt{\frac{3P}{EJ_2}} = 1,5\nu$$

2. Phương trình chính tắc: $r_{11}Z_1 = 0$

3. Phương trình ổn định:

Trong trường hợp hệ không đối xứng, hệ mất ổn định với $Z_1 \neq 0$. Vậy phương trình ổn định:

$$r_{11} = 0$$

4. Xác định r_{11} :

Để xác định r_{11} , ta vẽ biểu đồ mômen uốn đơn vị \overline{M}_1 do chuyển vị cưỡng bức đơn vị $\overline{Z}_1 = 1$ và lực nén gây ra trên hệ cơ bản. Biểu đồ \overline{M}_1 trên hình 5-4c.

Sau đó, sử dụng phương pháp tách nút và xét sự cân bằng nút, ta có:

$$r_{11} - 3\frac{EJ_1}{l_1}\varphi_1(\nu_1) - 3\frac{EJ_2}{l_2}\varphi_1(\nu_2) = 0$$

$$\text{Rút ra: } r_{11} = 3\frac{EJ_1}{l_1}\varphi_1(\nu_1) + 3\frac{EJ_2}{l_2}\varphi_1(\nu_2)$$

Phương trình ổn định:

$$r_{11} = 0 \Rightarrow 3\frac{EJ_1}{l_1}\varphi_1(\nu_1) + 3\frac{EJ_2}{l_2}\varphi_1(\nu_2) = 0$$

$$\text{Hay } 3\frac{EJ}{6}\varphi_1(\nu) + 3\frac{1,5EJ}{9}\varphi_1(1,5\nu) = 0$$

Như vậy, phương trình ổn định trở thành:

$$\varphi_1(\nu) + \varphi_1(1,5\nu) = 0 \quad (a)$$

Giải phương trình (a) theo phương pháp thử dần như sau:

$$\diamond \text{ Khi } \nu = 2,34: \quad 1,5\nu = 3,51$$

$$\varphi_1(\nu) = \varphi_1(2,34) = 0,5589$$

$$\varphi_1(1,5\nu) = \varphi_1(3,51) = -0,5075$$

Thay vào phương trình (a):

$$0,5589 - 0,5075 = 0,0514 > 0 \quad (b)$$

$$\diamond \text{ Khi } \nu = 2,36: \quad 1,5\nu = 3,54$$

$$\varphi_1(\nu) = \varphi_1(2,36) = 0,5486$$

$$\varphi_1(1,5\nu) = \varphi_1(3,54) = -0,5638$$

Thay vào phương trình (a):

$$0,5496 - 0,5638 = -0,0142 < 0 \quad (c)$$

Như vậy, giá trị của ν ở trong khoảng:

$$2,34 < \nu < 2,36$$

Vì kết quả (c) gần bằng không hơn kết quả (b), nên ta lấy:

$$\nu_{th} = 2,355$$

Giá trị lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{\nu_{th}^2 EJ}{2 \cdot 6^2} = \frac{(2,355)^2 EJ}{2 \cdot 6^2} = 0,077 EJ$$

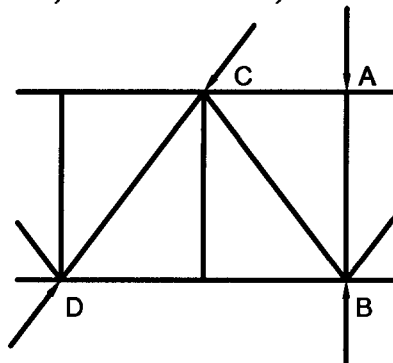
$$P_{th} = 0,077 EJ$$

§2. ỔN ĐỊNH CỦA CÁC THANH CHỊU NÉN TRONG DÀN

Dưới tác dụng của tải trọng, các thanh chịu nén của dàn có thể bị mất ổn định làm cho toàn dàn bị phá hoại. Những thanh nén trong dàn có thể là:

1. Các thanh đứng, thanh biên hoặc thanh xiên không cắt qua các thanh khác:

Ví dụ: Thanh đứng AB, thanh xiên CD, thanh biên AC trên hình 5-5.

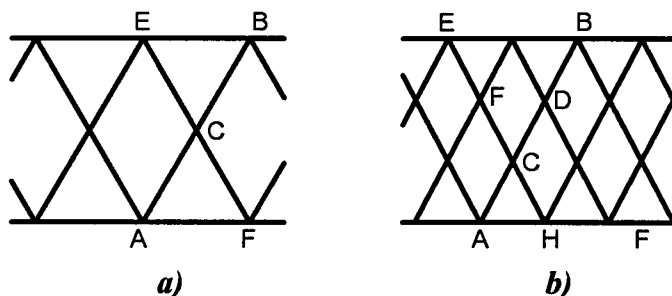


Hình 5-5

Để kiểm tra ổn định, ta coi thanh là thanh đơn giản, có liên kết khớp hai đầu và tùy theo thanh đó là thanh đơn hay thanh ghép, ta có thể áp dụng các công thức đã nghiên cứu ở chương III.

Giả thiết thanh có hai đầu khớp chỉ là gần đúng, thực ra liên kết khớp ở hai đầu thanh là liên kết dàn hồi, song xét đến yếu tố đó thì bài toán rất phức tạp.

2. Những thanh đứng hoặc thanh xiên cắt qua một, hai hoặc nhiều thanh đứng hoặc thanh xiên khác.

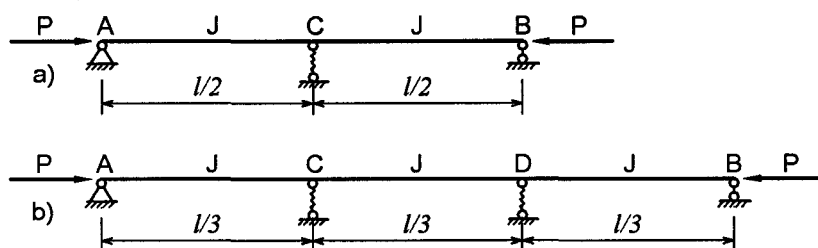


Hình 5-6

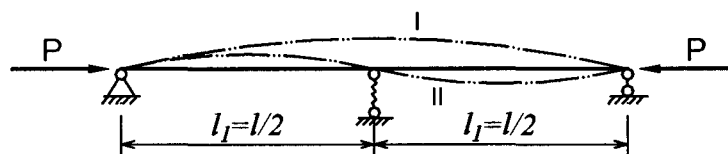
Ví dụ:

Các thanh chịu nén ACB (Hình 5-6a) là thanh xiên cắt qua một thanh xiên khác ở giữa nhịp. Các thanh ACDB (Hình 5-6b) là thanh xiên cắt qua hai thanh đứng hoặc hai thanh xiên khác.

Khi mất ổn định, những thanh này làm việc như những thanh đặt trên hai khớp tựa cứng ở hai đầu và có một, hai hoặc nhiều gối tựa đàn hồi ở trong nhịp (Hình 5-7).

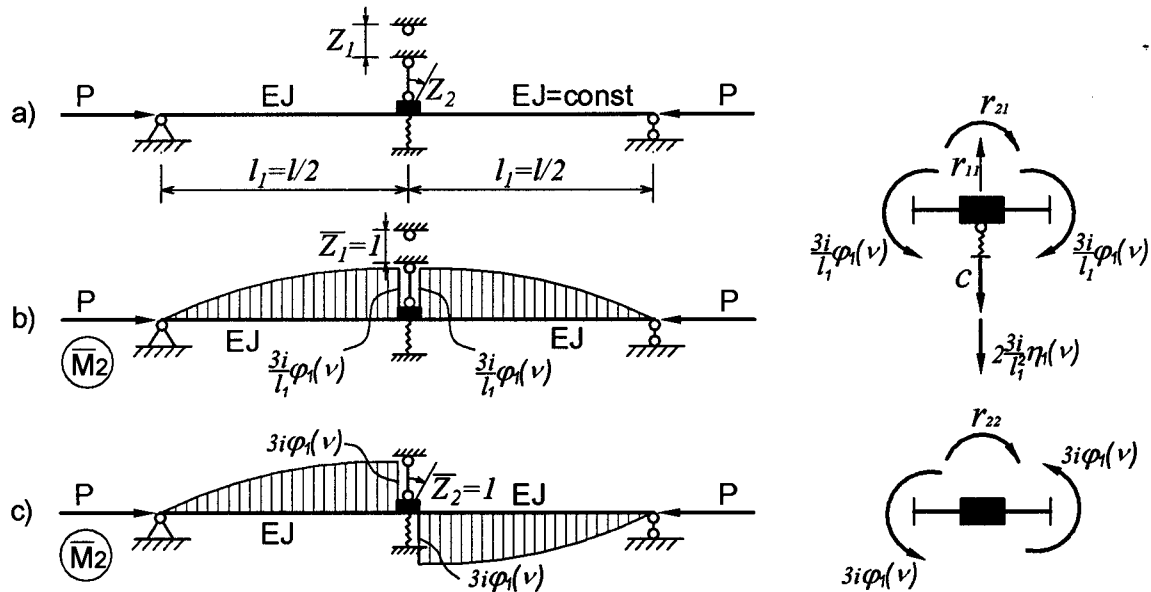
**Hình 5-7**

Trong thực tế, đã có một số công trình cầu bị phá hoại do mất ổn định của các thanh chịu nén. Cầu dầm Cơ Béch ở Canada bị phá hoại năm 1907 do một thanh biên chịu nén mất ổn định.

§3. ỔN ĐỊNH CỦA THANH LIÊN TỤC CÓ GỐI TỰA ĐÀN HỒI**I. Ổn định của thanh liên tục hai nhịp có gối trung gian là gối đàn hồi (Hình 5-8):****Hình 5-8**

Gọi C là độ cứng của liên kết đàn hồi. Độ cứng C chính là phản lực cản tác dụng tại liên kết đàn hồi để sao cho liên kết biến dạng với giá trị bằng đơn vị.

Để giải bài toán này theo phương pháp chuyển vị, ta lập hệ cơ bản bằng cách trên gối đàn hồi trung gian, đặt thêm vào một liên kết mômen và một liên kết lực (Hình 5-9a).



Hình 5-9

Vì hệ đang xét có tính chất đối xứng, nên ta có thể phân tích bài toán ra hai trường hợp.

- Thanh bị mất ổn định theo trường hợp đối xứng (đường I trên hình 5-8)
- Thanh bị mất ổn định theo trường hợp phản đối xứng (đường II trên hình 5-8)

1. Trường hợp thanh bị mất ổn định theo dạng đối xứng:

Trong trường hợp này, ta có: $Z_1 \neq 0$, $Z_2 = 0$

Phương trình chính tắc có dạng:

$$r_{11}Z_1 = 0$$

Phương trình ổn định:

$$r_{11} = 0$$

Xác định r_{11}

Dựa vào sơ đồ số 2 trong bảng 4-1 (Trang 54) và từ biểu đồ mômen đơn vị \bar{M}_1 trên hình 5-9b, ta xác định được:

$$r_{11} = 2 \frac{3i}{l^2} \eta_1(\nu) + C$$

$$\text{Với } i = \frac{EJ}{l} \text{ và } \nu = l_1 \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

$$\text{Từ } r_{11} = 0, \text{ rút ra: } \eta_1(\nu) = -\frac{Cl^3}{48EJ} \quad (5-8)$$

Như vậy, nếu biết độ cứng C của liên kết đàn hồi, thì ta có thể sử dụng bảng trong phần phụ lục để xác định thông số ν và từ đó suy ra lực tới hạn.

2. Trường hợp thanh bị mất ổn định theo dạng phản đối xứng:

Trong trường hợp này, ta có: $Z_1 = 0, Z_2 \neq 0$

Phương trình chính tắc có dạng:

$$r_{22}Z_2 = 0$$

Phương trình ổn định:

$$r_{22} = 0$$

Xác định r_{22} :

Dựa vào sơ đồ số 1 trong bảng 4-1 (Trang 54) và từ biểu đồ mômen đơn vị \bar{M}_2 trên hình 5-9c, ta có:

$$r_{22} = 2.3i\varphi_1(\nu)$$

Theo phương trình ổn định, suy ra:

$$\varphi_1(\nu) = 0 \quad (5-9)$$

$$\varphi_1(\nu) = \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \nu}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \nu = 0 \Rightarrow \nu = \pi$$

$$\text{Do đó: } P_{th} = \frac{\pi^2 EJ}{l_1^2} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} \quad (5-10)$$

Tất nhiên, sau khi xác định lực tới hạn tương ứng với hai trường hợp biến dạng nói trên, ta chọn giá trị nhỏ hơn làm giá trị tới hạn.

3. Xác định độ cứng C của gối đàn hồi:

Để nghiên cứu ổn định của thanh chịu nén ACB trong dầm (Hình 5-6a), ta có thể áp dụng lời giải vừa tìm trên.

Gọi EJ - độ cứng của thanh ACB đang khảo sát.

EJ_1 - độ cứng của thanh bị cắt ECF (Hình 5-6a).

Muốn áp dụng kết quả trên, trước hết ta cần xác định độ cứng C của liên kết đàn hồi như sau:

Định nghĩa: Độ cứng C là lực cần thiết để gây ra một đơn vị chuyển vị.

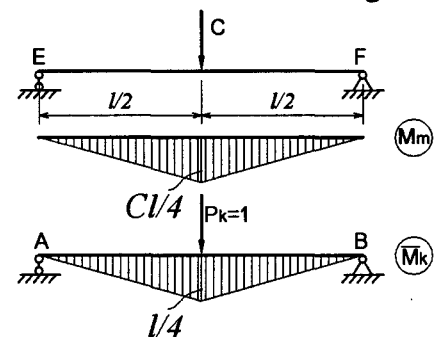
Xác định C theo phương pháp nhân biểu đồ Vê - rê - sa - ghin.

$$\delta = \frac{2}{EJ_1} \left[\frac{1}{2} \frac{Cl}{4} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{l}{4} \right]$$

$$\delta = \frac{Cl^3}{48EJ_1} = 1$$

Rút ra:

$$C = \frac{48EJ_1}{l^3} \quad (5-11)$$



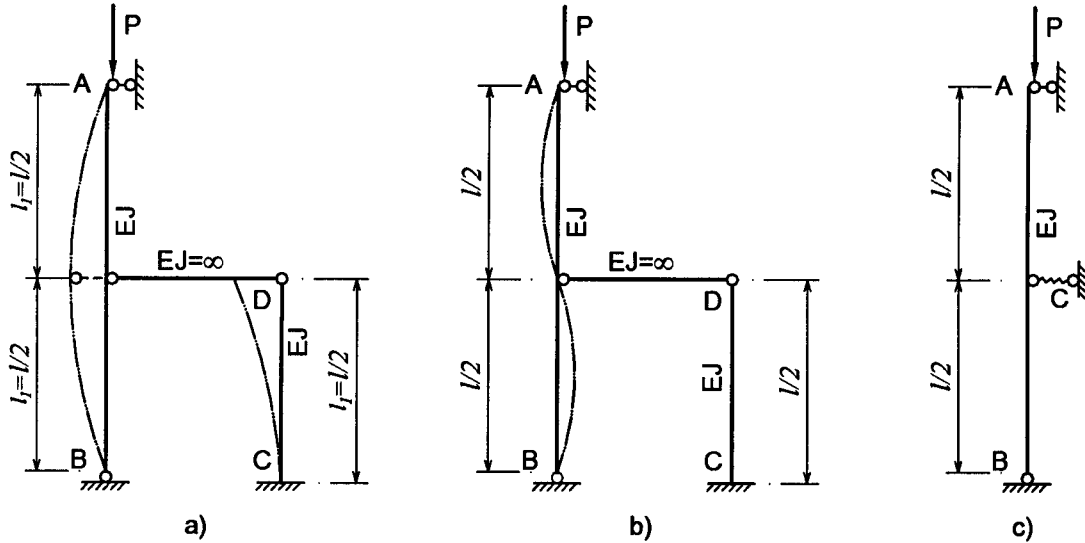
Thay (5-11) vào (5-8), ta được phương trình ổn định tương ứng với dạng mất ổn định đối xứng:

$$\eta_1(\nu) = -\frac{J_1}{J} \quad (5-12)$$

Nếu biết tỷ số $\frac{J_1}{J}$, ta tìm được thông số ν , từ đó suy ra lực tới hạn.

4. Ví dụ 5-4:

Tìm lực tới hạn tương ứng với hai dạng mất ổn định (dạng đối xứng và dạng phản đối xứng) của dầm liên tục như trên hình (5-10a, b) theo phương pháp chuyển vị.



Hình 5-10

Bài giải:

1. Sơ đồ tính toán của dầm AB được biểu diễn trên hình 5-10c.

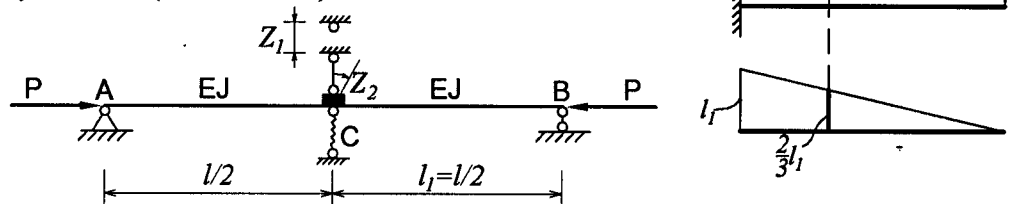
+ Xác định độ cứng C của gối đàn hồi: Độ cứng C là lực cần thiết để gây ra một đơn vị chuyển vị tại liên kết đàn hồi.

$$\delta = \frac{1}{EJ} \left[\frac{Cl_1 J_1}{2} \frac{2l_1}{3} \right] = \frac{Cl_1^3}{3EJ}$$

Cho $\delta = 1$, rút ra độ cứng C :

$$C = \frac{3EJ}{l_1^3} = \frac{24EJ}{l^3}$$

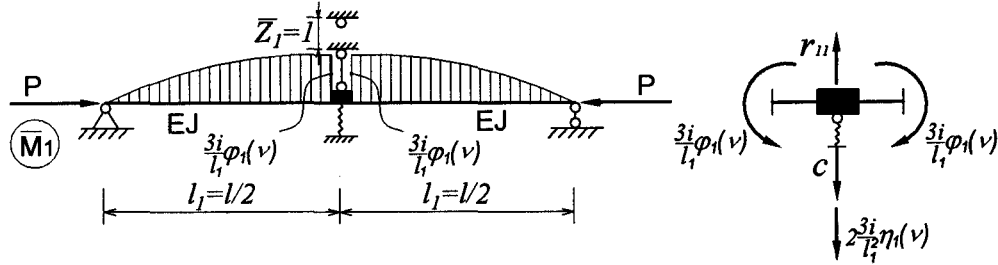
2. Hệ cơ bản, (Hình 5-11a):



Hình 5-11a

3. Trường hợp dầm mất ổn định theo dạng đối xứng:

Trong trường hợp này, ta có: $Z_1 \neq 0$, $Z_2 = 0$



Hình 5-11b

a. Phương trình chính tắc có dạng:

$$r_{11}Z_1 = 0$$

b. Phương trình ổn định:

$$r_{11} = 0$$

c. Xác định r_{11} :

Để xác định r_{11} , ta vẽ biểu đồ mômen đơn vị \overline{M}_1 do $\overline{Z}_1 = 1$ và lực nén gây ra (Hình 5-11b).

Điều kiện cân bằng nút là:

$$r_{11} - C - 2 \cdot \frac{3i}{l_1^2} \eta_1(v) = 0$$

Suy ra:

$$r_{11} = C + 2 \cdot \frac{3i}{l_1^2} \eta_1(v) = 0$$

$$\Rightarrow \eta_1(v) = -\frac{Cl_1^2}{6i} \quad (1)$$

Trong đó: $v = l_1 \sqrt{\frac{P}{EJ}}$

Thay $i = \frac{EJ}{l_1}$ và $C = \frac{3EJ}{l_1^3}$ vào (1), rút ra:

$$\eta_1(v) = -0,5$$

Tra bảng 2 trong phần phụ lục, với $\eta_1(v) = -0,5$, ta được

$v_{th} = 1,92$, rút ra:

$$P_{th} = \frac{v_{th}^2 EJ}{l_1^2} = \frac{(2,1,92)^2 EJ}{l^2} = 14,74 \frac{EJ}{l^2}$$

$$P_{th}^* = 14,74 \frac{EJ}{l^2}$$

4. Trường hợp dầm mất ổn định theo dạng phản đối xứng (Hình 5-11c):

Trong trường hợp này, ta có: $Z_1 = 0$, $Z_2 \neq 0$

a. Phương trình chính tắc:

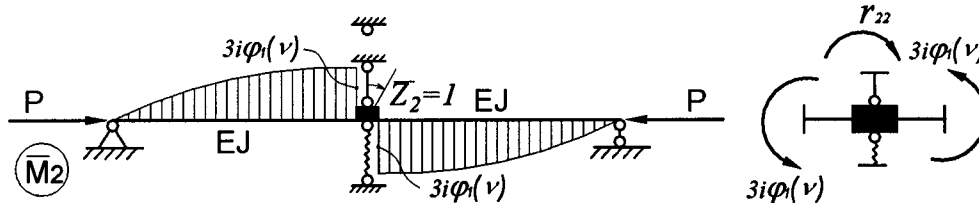
$$r_{22}Z_2 = 0$$

b. Phương trình ổn định:

$$r_{22} = 0$$

c. Xác định r_{22} :

Để xác định r_{22} , ta vẽ biểu đồ mômen đơn vị \overline{M}_2 do $\overline{Z}_2 = 1$ và lực nén P gây ra (Hình 5-11c).



Hình 5-11c

$$r_{22} = 2.3i\phi_1(\nu)$$

Theo phương trình ổn định, suy ra:

$$\phi_1(\nu) = 0$$

$$\phi_1(\nu) = \frac{\nu^2 \operatorname{tg} \nu}{3(\operatorname{tg} \nu - \nu)} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \nu = 0 \Rightarrow \nu = \pi$$

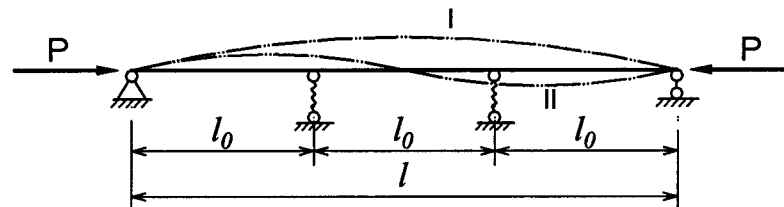
Do đó:
$$P_{th}^{**} = \frac{\pi^2 EJ}{l_1^2} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2}$$

Đáp số:
$$P_{th} = 14,74 \frac{EJ}{l^2}$$

II. Ổn định của thanh liên tục ba nhịp có gối trung gian là gối đàn hồi:

Xét hệ trên hình 5-12

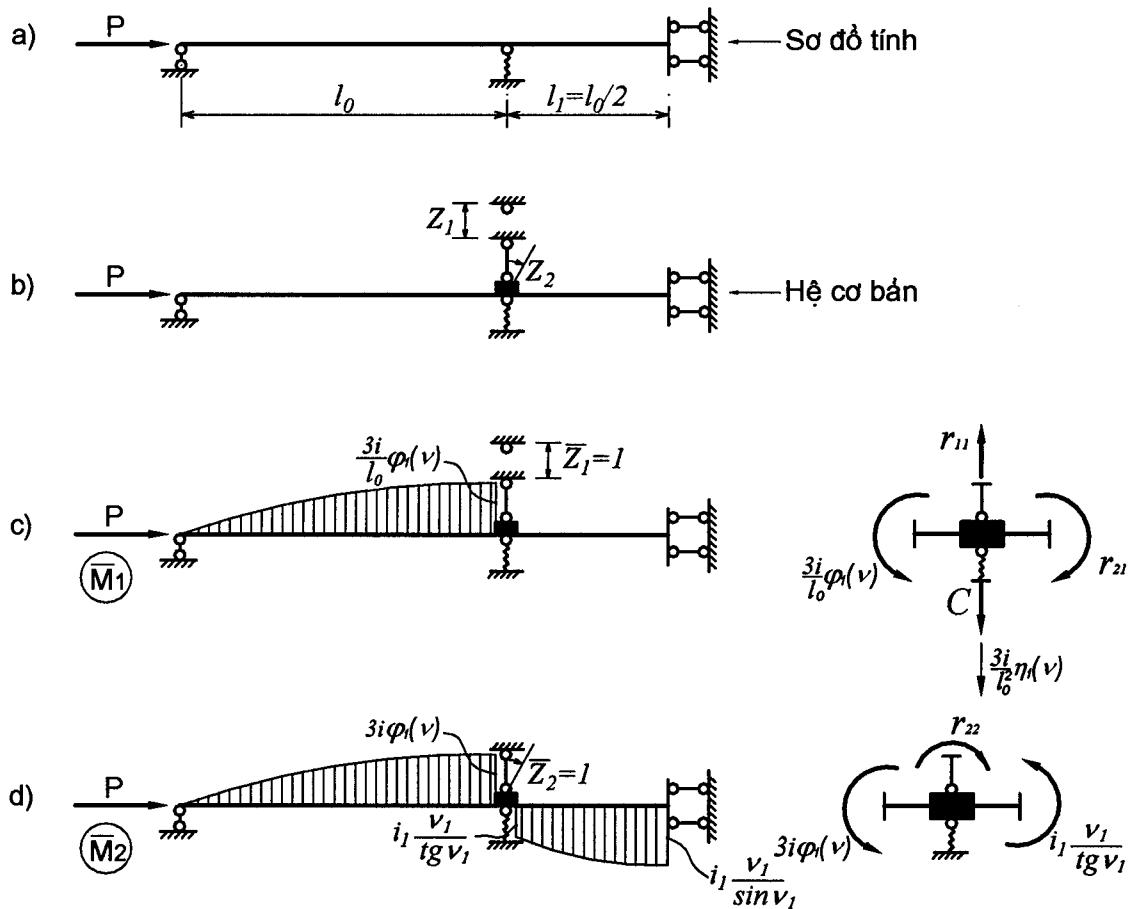
Giả sử độ cứng C của hai gối đàn hồi như nhau. Hệ đang xét có tính chất đối xứng, nên ta có thể phân tích bài toán ra hai trường hợp: biến dạng đối xứng (đường I), biến dạng phản đối xứng (đường II).



Hình 5-12

1. Trường hợp hệ bị mất ổn định theo dạng đối xứng:

Lúc này, sơ đồ tính toán có dạng như hình 5-13a.



Hình 5-13

$$\text{Với } \begin{cases} i_1 = \frac{EJ}{l_0/2} = 2i \\ \nu_1 = \frac{l_0}{2} \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\nu}{2} \end{cases}$$

a. - Hệ cơ bản: (Hình 5-13b)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0 \end{cases}$$

- Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0$$

- Xác định r_{11} , $r_{12} = r_{21}$, r_{22}

Vẽ biểu đồ mômen đơn vị \overline{M}_1 do $\overline{Z}_1 = 1$ và lực nén P gây ra trên hệ cơ bản. Vẽ biểu đồ mômen đơn vị \overline{M}_2 do $\overline{Z}_2 = 1$ và lực nén P gây ra trên hệ cơ bản (Hình 5-13c, d).

Dùng phương pháp tách nút và xét sự cân bằng nút, ta được:

Các phản lực đơn vị:

$$r_{11} = 3 \frac{EJ}{l_0^3} \eta_1(\nu) + C$$

$$r_{12} = r_{21} = 3 \frac{EJ}{l_0^3} \varphi_1(\nu)$$

$$r_{22} = 3 \frac{EJ}{l_0} \varphi_1(\nu) + \frac{2EJ}{l_0} \cdot \frac{\frac{\nu}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\nu}{2}}$$

$$r_{22} = 3 \frac{EJ}{l_0} \left[\varphi_1(\nu) + \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{\nu}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\nu}{2}} \right]$$

b. - Xác định độ cứng C của gối đàn hồi:

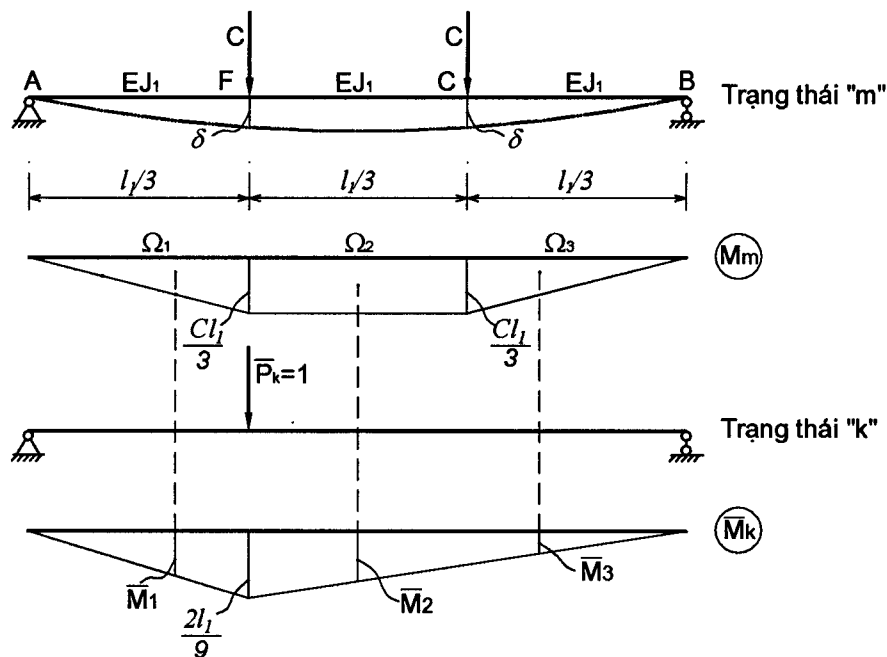
Gọi EJ - độ cứng của thanh ACDB đang khảo sát.

EJ_1 - độ cứng của thanh bị cắt EFCH (Hình 5-6b).

Ý nghĩa vật lý của C :

Độ cứng C là lực cần tác dụng vuông góc với mặt phẳng của dàn tại vị trí giao nhau giữa thanh bị cắt EFCH với thanh bị nén ACDB (Hình 5-6b) để sao cho độ võng δ tại điểm đó bằng đơn vị.

Xác định C bằng phương pháp nhân biểu đồ Vê - rê - sa - ghin (Hình 5-14).



Hình 5-14

$$EJ\delta = \Omega_1 \bar{M}_1 + \Omega_2 \bar{M}_2 + \Omega_3 \bar{M}_3$$

Trong đó: $\Omega_1 = \Omega_3 = \frac{1}{2} \frac{Cl_1}{3} \frac{l_1}{3} = \frac{Cl_1^2}{18}$

$$\Omega_2 = \frac{Cl_1}{3} \frac{l_1}{3} = \frac{Cl_1^2}{9}$$

$$\bar{M}_1 = \frac{4}{27} l_1; \bar{M}_2 = \frac{l_1}{6}; \bar{M}_3 = \frac{2}{27} l_1$$

$$\delta = \frac{5}{162} \frac{l_1^3}{EJ_1}$$

Cho $\delta = 1$, rút ra độ cứng C của gối đàn hồi:

$$C = \frac{162}{5} \frac{EJ_1}{l_1^3} \quad (5-13)$$

c. - Giải phương trình ổn định để xác định P_m :

Biến đổi r_{11}

$$r_{11} = 3 \frac{EJ}{l_0^3} \eta_1(\nu) + C = 3 \frac{EJ}{l_0^3} \left[\eta_1(\nu) + \frac{2}{5} f \right]$$

Trong đó:

$$f = \frac{5}{6} \frac{Cl_0^3}{EJ} = \frac{5}{162} \frac{Cl^3}{EJ}, \text{ (vì } l_0 = \frac{l}{3} \text{)} \quad (5-14)$$

$$\nu = l_0 \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{l}{3} \sqrt{\frac{P}{EJ}} \quad (5-15)$$

Sau khi thay các phản lực đơn vị r_{11} , $r_{12} = r_{21}$, r_{22} vào phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3EJ}{l_0^3} \left[\eta_1(\nu) + \frac{2}{5} f \right] & \frac{3EJ}{l_0^2} \varphi_1(\nu) \\ \frac{3EJ}{l_0^2} \varphi_1(\nu) & \frac{3EJ}{l_0} \left[\varphi_1(\nu) + \frac{2}{3} \frac{\frac{\nu}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\nu}{2}} \right] \end{vmatrix} = 0 \quad (5-16)$$

Triển khai phương trình ổn định (5-16), ta được:

$$f = \frac{5}{2} \frac{\varphi_1^2(\nu) - \eta_1(\nu) \left[\varphi_1(\nu) + \frac{1}{3} \frac{\nu}{\operatorname{tg} \frac{\nu}{2}} \right]}{\varphi_1(\nu) + \frac{1}{3} \frac{\nu}{\operatorname{tg} \frac{\nu}{2}}} \quad (5-17)$$

Theo (5-13) và (5-14):

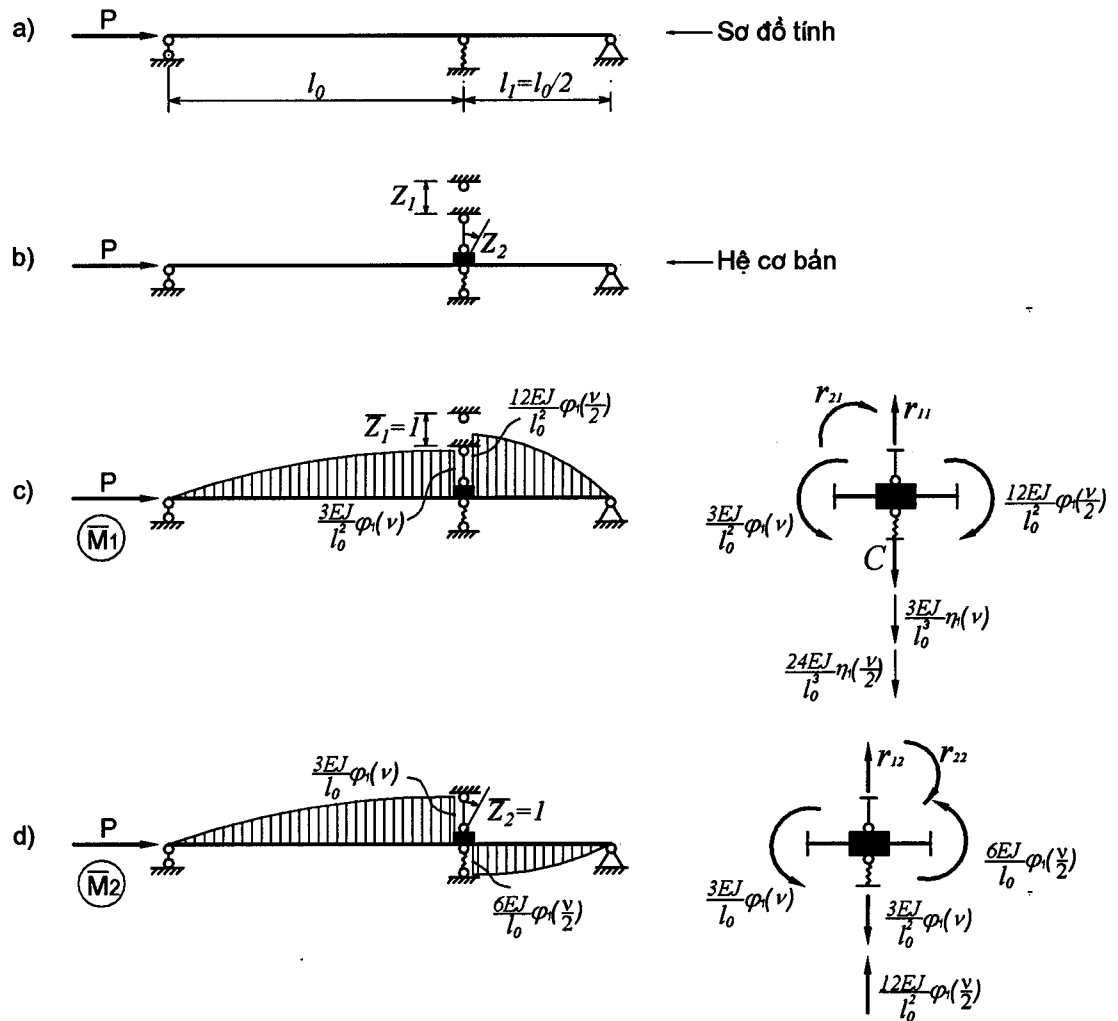
$$f = \frac{5}{162} \frac{Cl^3}{EJ} = \frac{J_1 l^3}{J l_1^3} \quad (5-18)$$

Nếu biết kích thước của thanh bị nén (l và J) và độ cứng C của liên kết đàn hồi, tức là biết đại lượng f . Sau đó giải (5-17), ta xác định được thông số ν .

Từ đó suy ra lực tới hạn, theo (5-15), ta có:

$$P_{th} = 9 \frac{\nu^2 EJ}{l^2} \quad (5-19)$$

3. Trường hợp hệ bị mất ổn định theo dạng phản đối xứng:



Hình 5-15

Sơ đồ tính toán của thanh có dạng như trên hình 5-15b.

Phương trình ổn định:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Từ các biểu đồ mômen đơn vị \overline{M}_1 và \overline{M}_2 trên hình 5-12c, d, ta xác định các phản lực đơn vị:

$$r_{11} = 3 \frac{EJ}{l_0^3} \eta_1(\nu) + C + 24 \frac{EJ}{l_0^3} \eta_1\left(\frac{\nu}{2}\right)$$

$$r_{11} = 3 \frac{EJ}{l_0^3} \left[\eta_1(\nu) + 8\eta_1\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{2}{5}f \right]$$

$$r_{12} = r_{21} = 3 \frac{EJ}{l_0^3} \left[\phi_1(\nu) - 4\phi_1\left(\frac{\nu}{2}\right) \right]$$

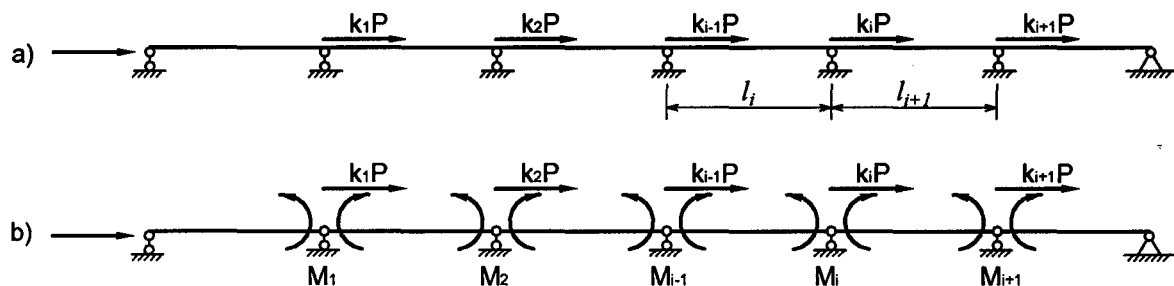
$$r_{22} = 3 \frac{EJ}{l_0^3} \left[\phi_1(\nu) + 2\phi_1\left(\frac{\nu}{2}\right) \right]$$

Trong đó, f và ν được xác định theo công thức (5-14), (5-15).

Cũng tương tự trên, nếu biết f , tức là biết được kích thước của thanh và độ cứng của gối đàn hồi, từ phương trình ổn định, ta sẽ xác định được thông số ν và theo (5-15) suy ra lực tới hạn.

§4. CÁCH TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA DẦM LIÊN TỤC THEO PHƯƠNG PHÁP LỰC PHƯƠNG TRÌNH 3 MÔMEN

Giả sử dầm có mặt cắt không đổi trong từng nhịp và chịu lực dọc trục đặt ở các gối tựa (Hình 5-13).



Hình 5-16

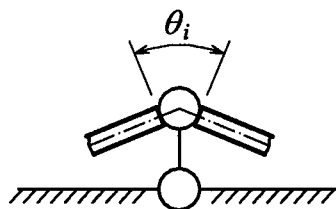
Những lực này có thể biểu thị theo một thông số P . Đó là đại lượng cần xác định.

➤ Hệ cơ bản:

Lập hệ cơ bản bằng cách đặt khớp vào các mặt cắt ở trên các gối trung gian và đặt thêm vào đó các ẩn số thừa là những mômen $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots$ (Hình 5-16b)

➤ Phương trình 3 mômen:

Điều kiện để cho hệ cơ bản (Hình 5-16b) biến dạng giống hệ thực (Hình 5-16a) là góc xoay tương đối giữa 2 mặt cắt ở hai bên gối tựa thứ i phải bằng không.

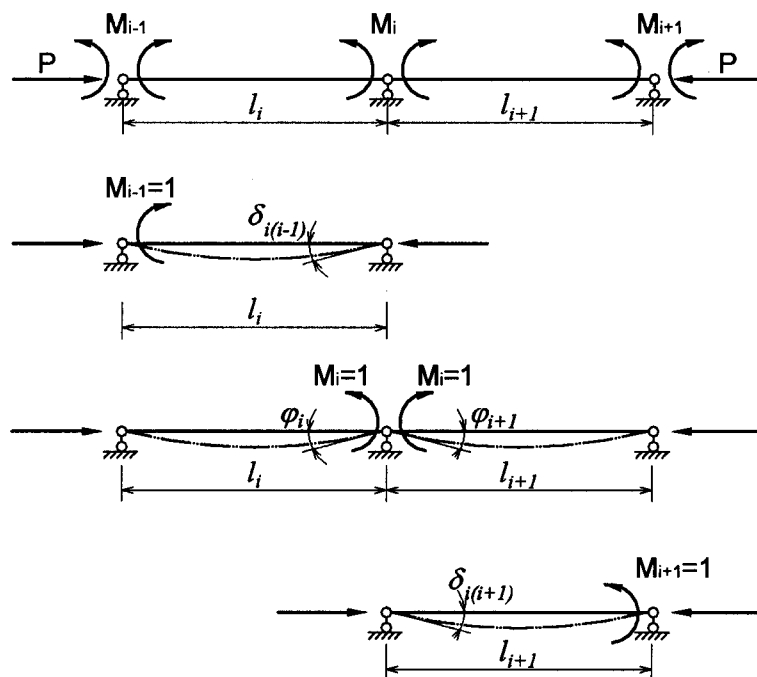


Viết điều kiện đó cho gối thứ i dưới dạng phương trình chính tắc của phương pháp lực, ta được:

$$\theta_i = \delta_{i(i-1)} M_{i-1} + \delta_i M_i + \delta_{i(i+1)} M_{i+1} = 0 \quad (5-20)$$

Đó là phương trình 3 mômen (chỉ có 3 số hạng).

Trong đó: $\delta_{i(i-1)}$, δ_i , $\delta_{i(i+1)}$ là góc xoay tương đối của hai mặt cắt hai bên gối tựa thứ i lần lượt do các mômen đơn vị $M_{i-1} = 1$, $M_i = 1$, $M_{i+1} = 1$ và lực dọc trục gây ra trên hệ cơ bản (Hình 5-17).



Hình 5-17

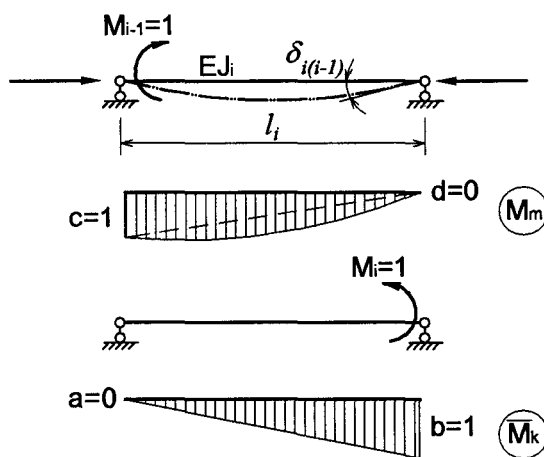
Để xác định $\delta_{i(i-1)}$, δ_i , $\delta_{i(i+1)}$ ta dựa vào công thức (4-5), tức:

$$EJ \Delta_{km} = \left(\frac{acl}{3} + \frac{bdl}{3} \right) \alpha(v) + \left(\frac{adl}{6} + \frac{bcl}{6} \right) \beta(v) \quad (4-5)$$

a. Khi tính $\delta_{i(i-1)}$, thì:

$$a = d = 0$$

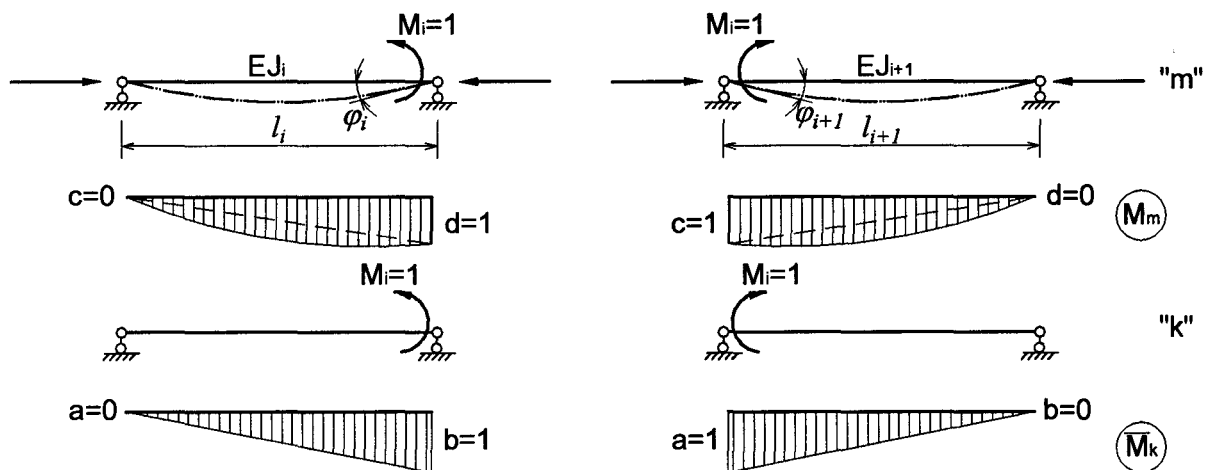
$$b = c = 1$$



Thay các giá trị a, b, c, d vào (4-5), ta được:

$$\delta_{i(i-1)} = \frac{l_i}{6EJ_i} \beta(v_i) \quad (5-21)$$

b. Tính $\delta_{ii} = \varphi_i + \varphi_{i+1}$:



Khi tính φ_i thì $a = 0, b = 1, c = 0, d = 1$, nên theo (4-5) thì:

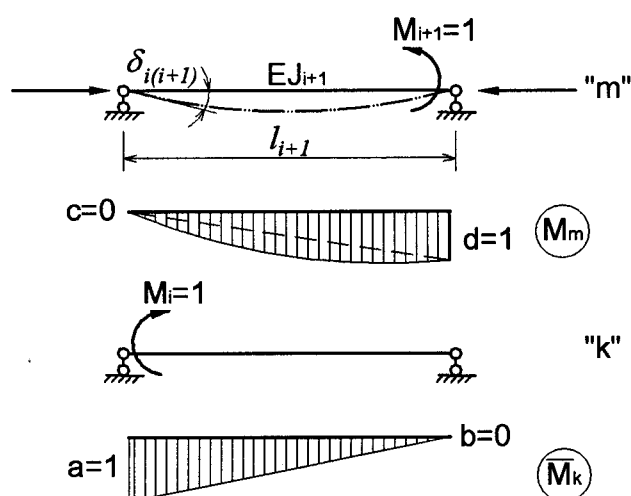
$$\varphi_i = \frac{l_i}{3EJ_i} \alpha(v_i)$$

Khi tính φ_{i+1} thì $a = c = 1, b = d = 0$, nên theo (4-5) thì:

$$\varphi_{i+1} = \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} \alpha(v_{i+1})$$

$$\delta_{ii} = \varphi_i + \varphi_{i+1} = \frac{l_i}{3EJ_i} \alpha(v_i) + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} \alpha(v_{i+1}) \quad (5-22)$$

c. Tính $\delta_{i(i+1)}$:



$a = d = 1, b = c = 0$, theo công thức (4-5), ta có:

$$\delta_{i(i+1)} = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} \beta(v_{i+1}) \quad (5-23)$$

Trong đó, các hàm $\alpha(v_i)$, $\beta(v_i)$ được xác định theo công thức (4-6).

$$\alpha(v_i) = \frac{3}{v_i^2} \left(1 - \frac{v_i}{\operatorname{tg} v_i} \right) \quad (5-24)$$

$$\beta(v_i) = \frac{6}{v_i^2} \left(\frac{v_i}{\sin v_i} - 1 \right) \quad (5-25)$$

$$\text{Với } v_i = l_i \sqrt{\frac{k_i P}{EJ_i}} \quad (5-26)$$

Khi thay (5-21), (5-22) và (5-23) vào (5-20), ta được:

$$\frac{l_i}{6EJ_i} \beta(v_i) M_{i-1} + \left[\frac{l_i}{3EJ_i} \alpha(v_i) + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} \alpha(v_{i+1}) \right] M_i + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} \beta(v_{i+1}) M_{i+1} = 0 \quad (5-27)$$

$$\text{Đặt } \lambda_i = l_i \frac{J_0}{J_i} \quad (5-28)$$

Gọi λ_i là chiều dài quy ước.

Trong đó, J_0 là một đại lượng bất kỳ, thường lấy bằng mômen quán tính của một nhịp nào đó. Lúc này, phương trình 3 mômen có dạng:

$$\lambda_i \beta(v_i) M_{i-1} + 2[\lambda_i \alpha(v_i) + \lambda_{i+1} \alpha(v_{i+1})] M_i + \lambda_{i+1} \beta(v_{i+1}) M_{i+1} = 0 \quad (5-29)$$

Phương trình (5-29) là phương trình 3 mômen khi tính ổn định của dầm liên tục chịu tác dụng của lực dọc trục.

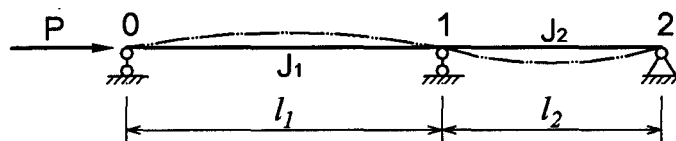
Như vậy, khi tính ổn định của dầm liên tục theo phương pháp lực, ta cần thực hiện các bước sau:

1. Xác định chiều dài quy ước λ_i theo (5-28)

2. Xác định đại lượng ν_i theo (5-26)
3. Thiết lập phương trình 3 mômen theo (5-29). Dầm có n gối trung gian, ta sẽ lập n phương trình. Hệ phương trình này là thuần nhất.
4. Thiết lập phương trình ổn định bằng cách cho định thức các hệ số của phương trình 3 mômen bằng không.

Giải phương trình ổn định, ta sẽ tìm được nghiệm ν từ đó suy ra lực tới hạn.

Ví dụ: Nghiên cứu ổn định của dầm liên tục 2 nhịp chịu lực nén (Hình 5-15).



Hình 5-18

Bài giải:

Trong trường hợp tổng quát, ta có:

- Chiều dài quy ước λ_i theo (5-28):

$$\lambda_1 = l_1 \frac{J_1}{J_1} = l_1, \quad \lambda_2 = l_2 \frac{J_1}{J_2}$$

- Các thông số ν_i theo (5-26):

$$\nu_1 = l_1 \sqrt{\frac{P}{EJ_1}}, \quad \nu_2 = l_2 \sqrt{\frac{P}{EJ_2}} = \nu_1 \frac{l_2}{l_1} \sqrt{\frac{J_1}{J_2}} \quad (a)$$

- Theo (5-29), phương trình 3 mômen trong trường hợp này có dạng:

$$2 \left[l_1 \alpha(\nu_1) + l_2 \frac{J_1}{J_2} \alpha(\nu_2) \right] M_1 = 0$$

- Phương trình ổn định:

$$\alpha(\nu_1) = -\frac{l_2 J_1}{l_1 J_2} \alpha(\nu_2) \quad (b)$$

Nếu biết kích thước cụ thể của dầm, ta có thể giải phương trình (b), tiếp đó suy ra lực tới hạn theo công thức (a)

CHƯƠNG VI. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM UỐN PHẪNG

Khi thiết kế dầm chịu uốn trong mặt phẳng Oyz, (Hình 6-1), để tăng độ cứng của dầm, người ta thường tăng mômen quán tính J_x đối với trục x của mặt cắt. Do đó, độ cứng EJ_x trong mặt phẳng uốn Oyz thường lớn hơn độ cứng EJ_y trong mặt phẳng uốn Oxz.

Khi EJ_x và EJ_y chênh lệch nhau nhiều, dầm có thể bị mất ổn định lệch khỏi mặt phẳng uốn Oyz do ảnh hưởng ứng suất nén trong khu vực chịu nén của dầm. Lúc này, trục dầm bị cong ra ngoài mặt phẳng uốn Oyz, đồng thời các mặt cắt ngang bị xoay trong mặt phẳng Oxy.

Như vậy, khi mất ổn định, dầm bị uốn trong 2 mặt phẳng Oxz và Oyz, đồng thời còn bị xoắn trong mặt phẳng Oxy.

Dưới đây sẽ nghiên cứu sự ổn định trong mặt phẳng uốn của dầm với giả thiết:

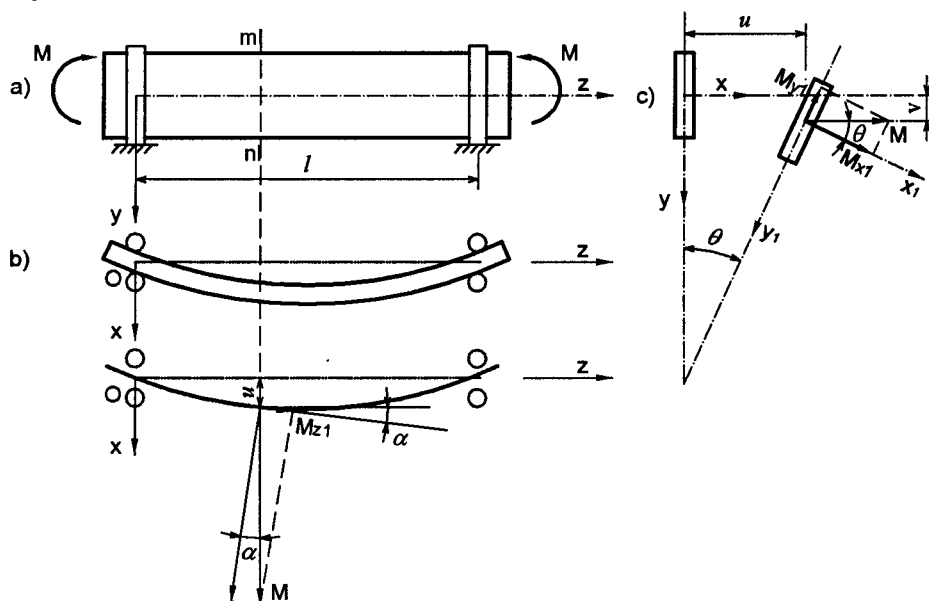
- Vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi.
- Khi mất ổn định, các mặt cắt ngang vẫn không thay đổi hình dạng (nói cách khác, khi mất ổn định, bản bụng của dầm không bị vênh)

§1. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM CÓ MẶT CẮT CHỮ NHẬT HẸP CHỊU UỐN THUẦN TUYẾT

Khảo sát dầm có mặt cắt hình chữ nhật hẹp, chịu uốn thuần túy trong mặt phẳng Oyz bởi 2 mômen M đặt ở hai đầu dầm.

Giả thiết thanh đặt tự do trên hai gối tựa, hai mặt cắt trên hai gối tựa có liên kết cản trở không cho mặt cắt xoay trong mặt phẳng Oxy.

Khi mômen uốn M nhỏ hơn giá trị tới hạn M_{th} , dầm chỉ chịu uốn trong mặt phẳng Oyz. Khi $M = M_{th}$, dầm bị mất ổn định, tức là trục dầm bị cong khỏi mặt phẳng uốn ban đầu Oyz. Lúc này, dầm bị uốn trong hai mặt phẳng Oxz và Oyz, đồng thời bị xoắn quanh trục thanh.



Hình 6-1

1. Lập phương trình vi phân cân bằng:

- Gọi x, y, z - hệ trục cố định, có chiều như trên hình 6-1.
 x_1, y_1, z_1 - hệ trục gắn liền với mặt cắt bất kỳ $m - n$ sau khi biến dạng.
 Trong đó, x_1, y_1 là các trục trùng với các trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt $m - n$, còn trục z_1 là trục hướng theo phương của tiếp tuyến tại mặt cắt $m - n$ với trục dầm sau khi biến dạng (Hình 6-1b, c).
 Gọi u, v - chuyển vị theo phương x và phương y của trọng tâm mặt cắt $m - n$.
 θ - góc xoay của mặt cắt $m - n$ trong mặt phẳng Oxy (Hình 6-1c)
 α - góc nghiêng của trục dầm tại mặt cắt $m - n$ trong mặt phẳng Oxz.
 Quy ước: Chiều dương của mômen uốn và mômen xoắn như hình 6 - 1d.
 $(M_x > 0$: làm căng thớ về phía dương của trục y).

Các phương trình vi phân khi uốn và khi xoắn có dạng:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_{x1}}{EJ_x} \quad (6-1)$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{M_{y1}}{EJ_y} \quad (6-2)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{M_{z1}}{GJ_z} \quad (6-3)$$

- Trong đó: EJ_x, EJ_y - độ cứng khi uốn đối với trục x và trục y .
 GJ_z - độ cứng chống xoắn của dầm.

Trường hợp mặt cắt chữ nhật hẹp, công thức J_z đã thiết lập theo lý thuyết đàn hồi:

$$J_z = \frac{hb^3}{3} \left(1 - 0,63 \frac{b}{h}\right) \quad (6-4)$$

b - bề rộng, h - chiều cao của mặt cắt.

Để xác định các mômen M_{x1}, M_{y1}, M_{z1} ta biểu diễn mômen M bằng vectơ \vec{M} rồi chiếu \vec{M} xuống các trục x_1, y_1, z_1 . Từ hình 6-1b,c, ta có:

$$M_{x1} = M \cos \theta \approx M$$

$$M_{y1} = M \sin \theta \approx M\theta$$

$$M_{z1} = M \sin \alpha \approx M \frac{du}{dz}$$

Thay thế các đại lượng này vào (6-1), (6-2), (6-3), ta được:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{EJ_x} \quad (6-5)$$

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{M\theta}{EJ_y} \quad (6-6)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{M}{GJ_z} \frac{du}{dz} \quad (6-7)$$

2. Để tìm mômen tới hạn M_{th} :

Ta chỉ cần dùng hai phương trình (6-6) và (6-7) là hai phương trình biến dạng chỉ xuất hiện khi mất ổn định. Lấy đạo hàm của (6-7), ta khử u từ (6-6) và (6-7), ta được phương trình vi phân theo phương pháp chuyển vị θ như sau:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + k^2\theta = 0 \quad (6-8)$$

Trong đó: $k = \frac{M}{\sqrt{EJ_y \cdot GJ_z}} \quad (6-9)$

Nghiệm của phương trình (6-8) có dạng:

$$\theta = A \sin kz + B \cos kz$$

Các hằng số tích phân A, B được xác định từ các điều kiện biên:

Khi $z = 0$, ta có: $\theta = 0 \quad (a)$

Khi $z = l$, ta có: $\theta = 0 \quad (b)$

Từ (a), rút ra: $B = 0$

Từ (b), rút ra: $A \sin kl = 0$

Nếu $A = 0$ thì $\theta = 0$, lúc này dầm không bị mất ổn định. Muốn dầm bị mất ổn định thì $\theta \neq 0$. Do đó $A \neq 0$, từ đó suy ra:

$$\sin kl = 0 \quad (6-10)$$

Suy ra:

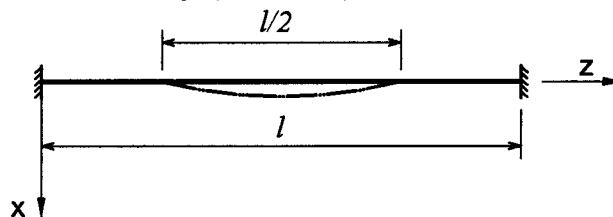
$$kl = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Nghiệm nhỏ nhất tương ứng: $kl = \pi$. Thay giá trị này vào (6-9), ta được công thức xác định mômen tới hạn:

$$M_{th} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_y \cdot GJ_z} \quad (6-11)$$

Công thức (6-11) chứng tỏ M_{th} không phụ thuộc EJ_x trong mặt phẳng uốn ban đầu.

❖ Trong trường hợp dầm có mặt cắt hình chữ nhật hẹp bị ngàm ở hai đầu, chịu uốn thuần túy (Hình 6-2)



Hình 6-2

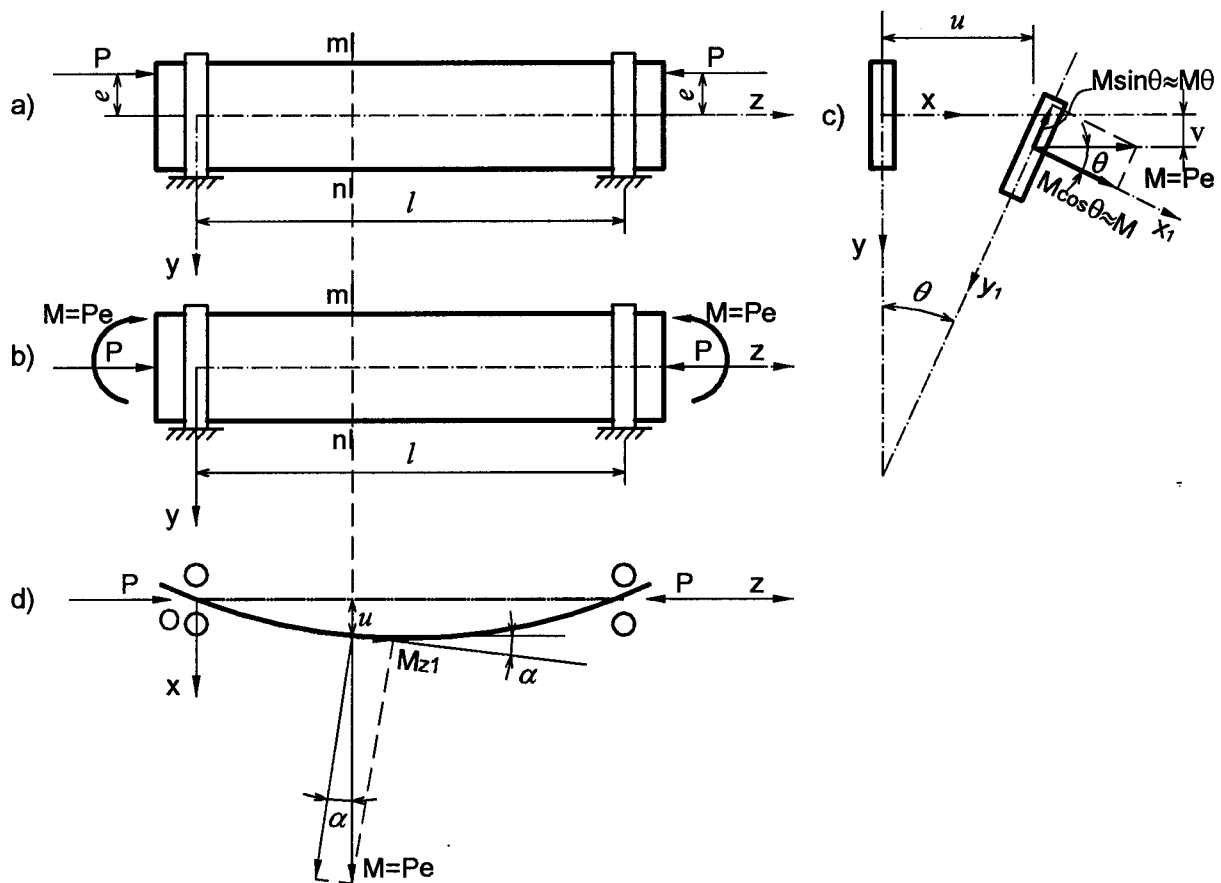
Ta nhận thấy, khoảng giữa hai điểm uốn với chiều dài $\frac{l}{2}$ đảm làm việc như trường hợp trên. Do đó, có thể dùng công thức (6-11) để xác định mômen tới hạn như đảm bị ngàm hai đầu:

$$M_{th} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{EJ_y \cdot GJ_z} \quad (6-12)$$

§2. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM CÓ MẶT CẮT CHỮ NHẬT HẸP CHỊU NÉN LỆCH TÂM

Xét thanh có mặt cắt chữ nhật hẹp, chịu nén lệch tâm bởi hai lực P (Hình 6-3).

Khi P đạt giá trị tới hạn, thanh bị mất ổn định. Lúc này, ngoài hiện tượng uốn đồng thời chịu nén trong mặt phẳng Oyz , còn xuất hiện hiện tượng uốn trong mặt phẳng Oxz và hiện tượng xoắn quanh trục thanh (tức mặt cắt xoay trong mặt phẳng Oxy).



Hình 6-3

Phân tích lực:

Khi dời P về trọng tâm mặt cắt trên gối tựa, ta được:

$N_z = P$ - nén đúng tâm.

$M = P.e$ - uốn phẳng, hình 6-3b.

Cũng sử dụng các ký hiệu và quy ước về dấu tương tự §1, trong trường hợp này, ta có:

$$M_{x1} = M \cos \theta + Pv \approx M \quad (\text{bỏ qua } v, \cos \theta = 1)$$

$$M_{y1} = M\theta + Pu$$

$$M_{z1} = M \frac{du}{dz}$$

Từ (6-2), suy ra: $EJ_y \frac{d^2u}{dz^2} = -My_1 = -M\theta - Pu$ (6-13)

Từ (6-3), suy ra: $GJ_z \frac{d\theta}{dz} = Mz_1 = M \frac{du}{dz}$ (6-14)

Tích phân phương trình (6-14), ta được:

$$GJ_z \theta = Mu + C$$

Xác định hằng số tích phân C theo điều kiện biên:

Khi $z = 0$, ta có: $\theta = 0$ và $u = 0$

Từ đó suy ra: $C = 0$

Vậy:

$$\theta = \frac{M}{GJ_z} u$$
 (6-15)

Thay (6-15) vào (6-13), ta được phương trình cấp 2 theo u :

$$\begin{aligned} EJ_y \frac{d^2u}{dz^2} &= \frac{M^2}{GJ_z} u - Pu \\ \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{M^2 + PGJ_z}{EJ_y \cdot GJ_z} u &= 0 \\ \frac{d^2u}{dz^2} + k^2 u &= 0 \end{aligned} \quad (6-16)$$

Trong đó:

$$k^2 = \frac{M^2 + PGJ_z}{EJ_y \cdot GJ_z} \quad (6-17)$$

Nghiệm của (6-16) có dạng:

$$u = A \sin kz + B \cos kz \quad (6-18)$$

Từ các điều kiện biên:

Khi $z = 0$, ta có: $u = 0$, suy ra: $B = 0$

Khi $z = l$, ta có: $u = 0$, suy ra: $A \sin kl = 0$

Điều kiện để hệ mất ổn định là $A \neq 0$, suy ra:

$$\sin kl = 0$$

Nghiệm nhỏ nhất $kl = \pi$, thay kết quả này vào (6-17), ta được:

$$M_{th}^2 + P_{th} GJ_z = \frac{\pi^2}{l^2} E J_y GJ_z \quad (6-19)$$

Nhận xét:

1. Nếu $e = 0$, ta có $M_{ih} = 0$, công thức (6-19) có dạng:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_y}{l^2}$$

Đây là công thức xác định lực tối hạn của thanh chịu nén đúng tâm.

2. Nếu $P_{th} = 0$, công thức (6-19) có dạng:

$$M_{th} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_y \cdot GJ_z}$$

Đó là trường hợp dầm chịu uốn thuần túy

3. Nếu $e \neq 0$, thì $M_{th} = P_{th}e$ công thức (6-19) có dạng:

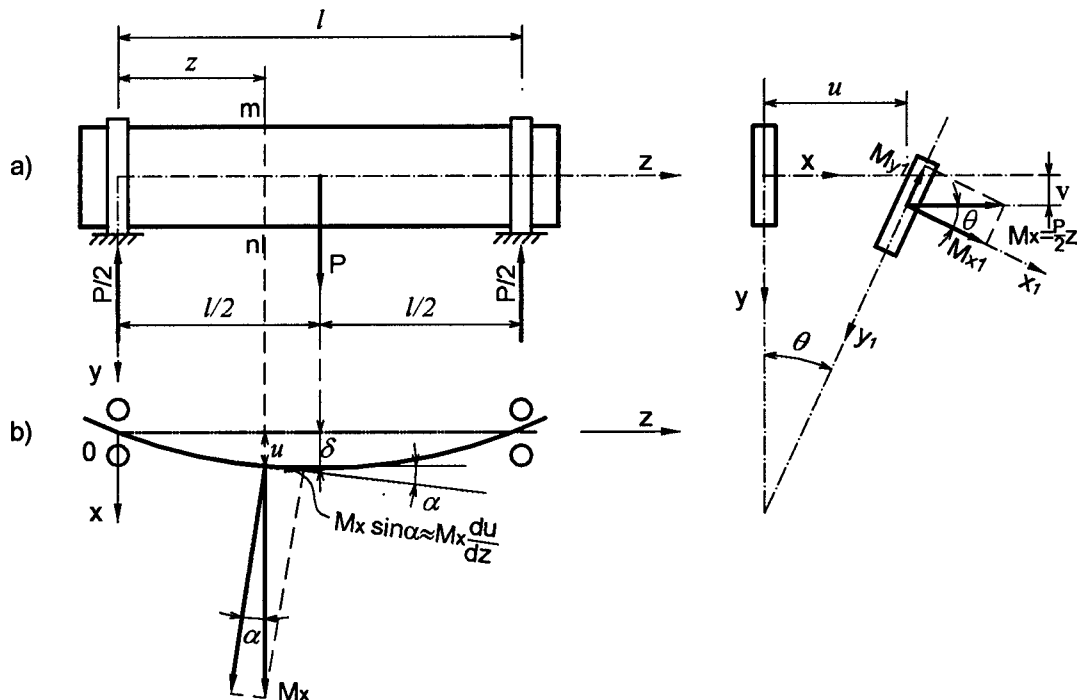
$$P_{th}^2 e^2 + P_{th} G J_z = \frac{\pi^2}{l^2} E J_y G J_z \quad (6-20)$$

Giải phương trình bậc 2 này, ta xác định được P_{th} .

§3. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM CÓ MẶT CẮT CHỮ NHẬT HẸP CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

I. Dầm đặt trên hai gối tựa:

Xét dầm đặt trên hai gối tựa, chịu lực tập trung đặt tại trọng tâm mặt cắt ở giữa nhịp (Hình 6-4a).



Hình 6-4

Khi $P = P_{th}$, dầm bị lệch ra khỏi mặt phẳng uốn Oyz (Hình 6-4b). Giả sử, khi biến dạng, các liên kết ở đầu dầm tự do quay xung quanh các trục quán tính x, y, mà không cho phép xoay quanh trục z. Lúc này, P gây ra tại liên kết những phản lực: Phản lực đứng $\frac{P}{2}$, phản lực mômen xoắn $\frac{P}{2}\delta$.

Các thành phần nội lực trên mặt cắt m - n ở trạng thái biến dạng:

$$M_{x1} = M_x \cos \theta \approx M_x = \frac{P}{2} z$$

$$M_{y1} = M_x \sin \theta \approx M_x \theta = \frac{P}{2} z \theta$$

$$M_{z1} = M_x \frac{du}{dz} + \frac{P}{2}(\delta - u) = \frac{P}{2} z \frac{du}{dz} + \frac{P}{2}(\delta - u)$$

Từ (6-2) suy ra:

$$EJ_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -M_{y1} = -\frac{P}{2} z \theta \quad (6-21)$$

Từ (6-3) suy ra:

$$GJ_z \frac{d\theta}{dz} = M_{z1} = \frac{P}{2} z \frac{du}{dz} + \frac{P}{2}(\delta - u) \quad (6-22)$$

Lấy đạo hàm (6-22) theo z, ta được:

$$GJ_z \frac{d^2 \theta}{dz^2} = \frac{P}{2} z \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{P}{2} \frac{du}{dz} - \frac{P}{2} \frac{du}{dz} = \frac{P}{2} z \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Thay (6-21) vào phương trình trên, ta được phương trình vi phân theo θ :

$$GJ_z \frac{d^2 \theta}{dz^2} = \frac{P}{2} z \left(-\frac{P}{2} z \theta \cdot \frac{1}{EJ_y} \right) = -\frac{P^2}{4EJ_y} z^2 \theta$$

$$\text{Hay } \frac{d^2 \theta}{dz^2} + k^2 z^2 \theta = 0 \quad (6-23)$$

$$\text{Với } k^2 = \frac{P^2}{4GJ_z \cdot EJ_y} \quad (6-24)$$

Nếu dùng chuỗi vô hạn, ta có thể viết nghiệm của (6-23) dưới dạng:

$$\theta = \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^i \quad (6-25)$$

Thay (6-25) vào (6-23), ta được:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) C_i z^{i-2} + k^2 z^2 \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^i = 0$$

$$\text{Hay } 2C_2 + 6C_3 z + \underbrace{\sum_{i=4}^{\infty} i(i-1) C_i z^{i-2}}_{\text{Số hạng 1}} + k^2 \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} C_i z^{i+2}}_{\text{Số hạng 2}} = 0$$

Chú thích: *

$$a) \quad \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)C_i z^{i-2} = 0 + 0 + 2C_2 + 6C_3 z + \sum_{i=4}^{\infty} i(i-1)C_i z^{i-2}$$

$$b) \quad \text{Thay đổi chỉ số chạy đối với số hạng 1: } \sum_{i=4}^{\infty} i(i-1)C_i z^{i-2}$$

$$\text{Đặt } m = i - 2 \Rightarrow i = m + 2 \text{ và } i - 1 = m + 1$$

$$\text{Khi } i = 4 \text{ thì } m = 2$$

$$\text{Do đó: } \sum_{i=4}^{\infty} i(i-1)C_i z^{i-2} = \sum_{m=2}^{\infty} (m+1)(m+2)C_{m+2} z^m$$

c) Số hạng thứ 2:

$$\text{Đặt } m = i + 2 \Rightarrow i = m - 2 \text{ và khi } i = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$\text{Do đó: } \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^{i+2} = \sum_{m=2}^{\infty} C_{m-2} z^m$$

Sau khi thay đổi chỉ số chạy, ta có:

$$2C_2 + 6C_3 z + \sum_{m=2}^{\infty} [(m+1)(m+2)C_{m+2} + k^2 C_{m-2}] z^m = 0$$

Đa thức trên phải nghiệm đúng với bất kỳ giá trị nào của z . Điều đó chỉ được thỏa mãn khi các hệ số đa thức đồng nhất bằng không. Từ đó, ta suy ra:

$$C_2 = 0, C_3 = 0, C_{m+2} = \frac{-k^2 C_{m-2}}{(m+1)(m+2)} \quad (6-26)$$

Các điều kiện (6-26) cho phép ta xác định các hệ số C_i .

Ta thấy:

$$C_{2+4i} = 0, \text{ với } i = 0, 1, 2, \dots$$

$$C_{3+4i} = 0, \text{ với } i = 0, 1, 2, \dots$$

Tức là:

$$C_2 = C_6 = C_{10} = \dots = 0$$

$$C_3 = C_7 = C_{11} = \dots = 0$$

Các hệ số còn lại được xác định theo biểu thức thứ 3 của (6-26) và biểu thị qua C_0 , C_1 như sau:

$$C_4 = -\frac{k^2}{3.4} C_0; C_8 = -\frac{k^2}{7.8} C_4 = \frac{k^4}{3.4.7.8} C_0; \dots$$

$$C_5 = -\frac{k^2}{4.5} C_1; C_9 = -\frac{k^2}{8.9} C_5 = \frac{k^4}{4.5.8.9} C_1; \dots$$

Do đó, nghiệm của (6-25) có thể đưa về dạng:

$$\begin{aligned} \theta = & C_0 \left(1 - \frac{k^2}{3.4} z^4 + \frac{k^4}{3.4.7.8} z^8 - \frac{k^6}{3.4.7.8.11.12} z^{12} + \dots \right) + \\ & + C_1 z \left(1 - \frac{k^2}{4.5} z^4 + \frac{k^4}{4.5.8.9} z^8 - \frac{k^6}{4.5.8.9.12.13} z^{12} + \dots \right) \end{aligned} \quad (6-27)$$

Các điều kiện biên:

1) Khi $z = 0$; $\theta = 0 \Rightarrow C_0 = 0$

2) Khi $z = \frac{l}{2}$; $u = \delta$ và $\frac{du}{dz} = 0$, cho nên theo (6-22) ta có: $\frac{d\theta}{dz} \approx 0$

Lấy đạo hàm (6-27):

$$\frac{d\theta}{dz} = C_1 \left(1 - \frac{k^2}{4.5} z^4 + \frac{k^4}{4.5.8.9} z^8 - \frac{k^6}{4.5.8.9.12.13} z^{12} + \dots \right)$$

Cho $z = \frac{l}{2}$, ta được:

$$C_1 \left[1 - \frac{k^2}{4.5} \left(\frac{l}{2} \right)^4 + \frac{k^4}{4.5.8.9} \left(\frac{l}{2} \right)^8 - \frac{k^6}{4.5.8.9.12.13} \left(\frac{l}{2} \right)^{12} + \dots \right] = 0$$

Khi dầm bị mất ổn định $C_1 \neq 0$, do đó ta có:

$$\left(1 - a + \frac{a^2}{10} - \frac{a^3}{270} + \dots \right) = 0 \quad (6-28)$$

Với $a = \frac{k^2 l^4}{64} = \frac{P_{th}^2 l^4}{256 GJ_z EJ_y} \quad (6-29)$

Bằng phương pháp gần đúng, ta tìm được nghiệm nhỏ nhất của (6-28) là $a = 1,126$. Từ (6-29) suy ra giá trị lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{16,97}{l^2} \sqrt{EJ_y GJ_z} \quad (6-30)$$

Chú thích:

1) Trường hợp lực P không đặt giữa nhịp, và đặt cách gối tựa một khoảng c , sau khi thực hiện các bước nghiên cứu tương tự trên, ta xác định lực tới hạn theo công thức:

$$P_{th} = \frac{k}{l^2} \sqrt{EJ_y GJ_z} \quad (6-31)$$

Hệ số k trong (6-31) phụ thuộc vị trí của lực P , tức phụ thuộc tỷ số $\frac{c}{l}$ xem

bảng 6-1.

Bảng 6-1

$\frac{c}{l}$	0,5	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05
k	16,96	17,15	17,82	19,04	21,01	24,10	29,11	37,88	56,01	116

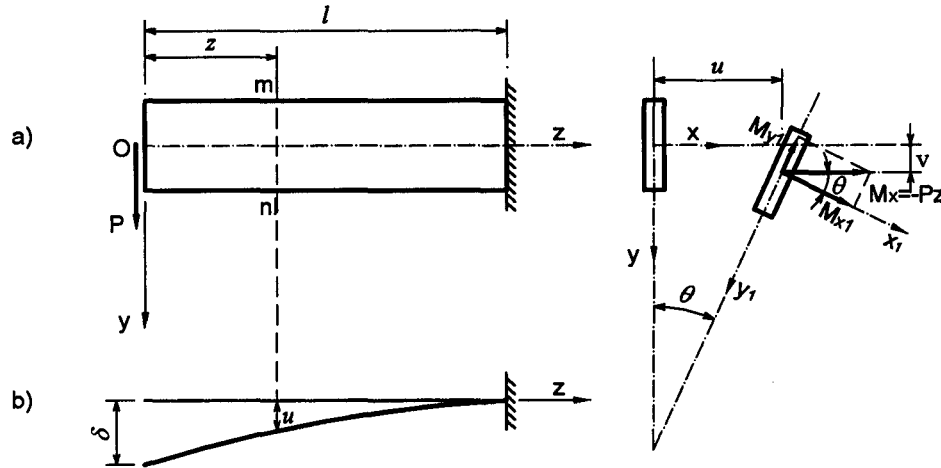
2) Trường hợp dầm đặt tự do trên hai gối tựa và chịu tải trọng phân bố đều với cường độ q trên toàn chiều dài nhịp, công thức xác định lực tới hạn có dạng:

$$(ql)_{th} = \frac{28,3}{l^2} \sqrt{EJ_y GJ_z} \quad (6-32)$$

II. Dầm có một đầu ngàm, một đầu tự do:

Xét dầm có một đầu ngàm, một đầu tự do, chịu lực tập trung P đặt tại trọng tâm mặt cắt ở đầu tự do.

Khi dầm bị mất ổn định, dầm bị lệch khỏi mặt phẳng uốn Oyz như trên hình 6-5.



Hình 6-5

a) Nội lực trên mặt cắt $m - n$.

Cũng sử dụng các ký hiệu và quy ước dấu như ở mục §1, trong trường hợp này, mômen uốn và mômen xoắn trên mặt cắt $m - n$ như sau:

$$M_{x1} = M_x \cos \theta \approx M_x = -Pz$$

$$M_{y1} = M_x \sin \theta \approx M_x \theta = -Pz\theta$$

$$M_{z1} = M_x \frac{du}{dz} - P(\delta - u) = -Pz \frac{du}{dz} - P(\delta - u)$$

b) Các phương trình vi phân khi uốn và xoắn:

Từ (6-2) suy ra:

$$EJ_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -M_{y1} = Pz\theta \quad (6-33)$$

Từ (6-3) suy ra:

$$GJ_z \frac{d\theta}{dz} = M_{z1} = -Pz \frac{du}{dz} - P(\delta - u) \quad (6-34)$$

Sau khi lấy đạo hàm (6-34):

$$GJ_z \frac{d^2 \theta}{dz^2} = -P \frac{du}{dz} - Pz \frac{d^2 u}{dz^2} + P \frac{du}{dz} = -Pz \frac{d^2 u}{dz^2}$$

Phối hợp với (6-33) để khử u , ta được phương trình vi phân theo θ .

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + k^2 z^2 \theta = 0 \quad (6-35)$$

$$\text{Với } k^2 = \frac{P_{th}^2}{GJ_z \cdot EJ_y} \quad (6-36)$$

c) Tìm nghiệm của (6-35):

Phương trình (6-36) có dạng như phương trình (6-23), nghiệm của (6-35) cũng có dạng tương tự như nghiệm của (6-27).

$$\begin{aligned} \theta = & C_0 \left(1 - \frac{k^2}{3.4} z^4 + \frac{k^4}{3.4.7.8} z^8 - \frac{k^6}{3.4.7.8.11.12} z^{12} + \dots \right) + \\ & + C_1 z \left(1 - \frac{k^2}{4.5} z^4 + \frac{k^4}{4.5.8.9} z^8 - \frac{k^6}{4.5.8.9.12.13} z^{12} + \dots \right) \end{aligned}$$

d) Các điều kiện biên:

$$1) \text{ Khi } z = 0; u = \delta; \text{ theo (6-34) ta có: } \frac{d\theta}{dz} = 0$$

Điều kiện này cho $C_1 = 0$

2) Khi $z = l; \theta = 0$, do đó ta có:

$$C_0 \left(1 - \frac{k^2}{3.4} l^4 + \frac{k^4}{3.4.7.8} l^8 - \frac{k^6}{3.4.7.8.11.12} l^{12} + \dots \right) = 0$$

e) Phương trình ổn định:

Điều kiện để cho hệ mất ổn định là $C_0 \neq 0$, nên biểu thức trong ngoặc phải bằng không.

$$\left(1 - a + \frac{3}{14} a^2 - \frac{3}{154} a^3 + \dots \right) = 0 \quad (6-37)$$

$$\text{Với } a = \frac{k^2 l^4}{12} = \frac{P_{th}^2 l^4}{12 GJ_z EJ_y} \quad (6-38)$$

f) Xác định P_{th} :

Nghiệm nhỏ nhất của (6-37) là $a = 1,342$.

Từ (6-38) suy ra lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{4,013}{l^2} \sqrt{EJ_y GJ_z} \quad (6-39)$$

Chú thích:

1) Trường hợp dầm chịu tải trọng phân bố trên toàn chiều dài, sau khi thực hiện các bước nghiên cứu tương tự trên, ta có:

a) Khi tải trọng phân bố đều với tải trọng q

$$(ql)_{th} = \frac{12,85}{l^2} \sqrt{EJ_y GJ_z} \quad (6-40)$$

b) Khi tải trọng phân bố theo quy luật tam giác $q = q_0 \frac{z}{l}$

$$q_{0th} = \frac{52,80}{l^3} \sqrt{EJ_y GJ_z} \quad (6-41)$$

2) Trường hợp dầm có hai đầu bị ngàm, chịu lực tập trung đặt ở trọng tâm mặt cắt giữa nhịp:

$$P_{th} = \frac{26,6}{l^2} \sqrt{EJ_y GJ_z} \quad (6-42)$$

§4. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM CÓ MẶT CẮT CHỮ I

1. Các khái niệm:

a) Xoắn tự do: Dầm chữ I không có liên kết, chịu mômen xoắn như trên hình 6-6a, là một trường hợp về xoắn tự do.

Khi xoắn tự do mặt cắt ngang của thanh có thể vênh tự do. Do đó, trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất tiếp mà không có ứng suất pháp.

b) Xoắn kìm chế: Dầm chữ I có liên kết ngàm, chịu mômen xoắn như trên hình 6-6b, là một ví dụ về xoắn kìm chế.

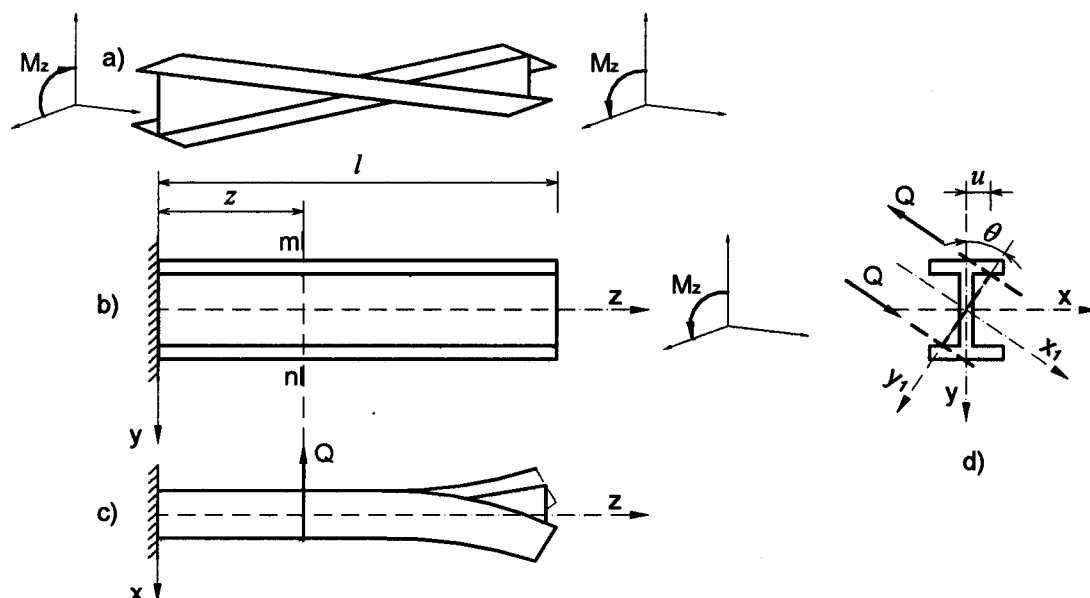
Khi xoắn kìm chế, các mặt cắt ngang không được phép vênh tự do, vì có các liên kết ngàm cản trở. Do đó, các bản đế cũng bị uốn.

Vậy khi xoắn kìm chế, biến dạng xoắn có gây ra biến dạng uốn phụ kèm theo.

2. Phương trình vi phân liên hệ giữa mômen xoắn ngoại lực với góc xoắn:

Trong trường hợp dầm chữ I bị xoắn kìm chế, mômen xoắn ngoại lực cân bằng với hai mômen:

$$M_{z1} = M_1 + M_2 \quad (6-43)$$



Hình 6-6

a) Mômen M_1 do các ứng suất tiếp phát sinh khi có biến dạng xoắn:

$$M_1 = GJ_z \frac{d\theta}{dz} \quad (6-44)$$

Trong đó:

θ - là góc xoắn của mặt cắt.

J_z - là mômen quán tính khi xoắn của mặt cắt.

Có thể xác định giá trị của J_z theo công thức tìm được trong lý thuyết thanh thành mỏng.

$$J_z = \frac{2}{3}bt^3 + \frac{1}{3}ht_1^3 \quad (6-45)$$

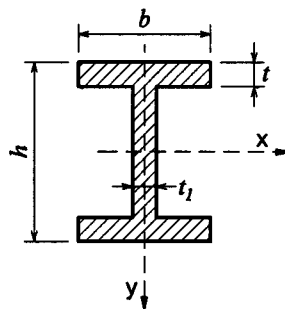
Trong đó:

b, t - bề rộng và bề dày của bản đế.

h, t_1 - chiều cao và bề dày của bản bụng.

b) Mômen M_2 do lực cắt trong các bản đế.

Lực cắt này phát sinh ra khi bản đế bị uốn.



Gọi u_1 - là chuyển vị theo phương x của bản đế phía trên (Hình 6-6b) tại mặt cắt bất kỳ m - n. Theo hình 6-6d, ta có:

$$u_1 = \theta \frac{h}{2} \quad (6-46)$$

Mặt khác, nếu J_y^* là mômen quán tính đối với trục y của một bản đế:

$$J_y^* = \frac{tb^3}{12} \approx \frac{J_y}{2}$$

Ở đây, J_y - mômen quán tính của toàn bộ mặt cắt chữ I đối với trục y.

Dựa vào sự liên hệ vi phân giữa mặt cắt và chuyển vị, ta có thể xác định được lực cắt trong bản đế phía trên tại mặt cắt bất kỳ m - n như sau:

$$Q = -EJ_y^* \frac{d^3 u_1}{dz^3} = -EJ_y^* \frac{h}{2} \frac{d^3 \theta}{dz^3}$$

Đối với bản đế phía dưới, ta cũng tìm được lực có giá trị như trên nhưng ngược dấu. Hai lực cắt này tạo ngẫu lực M_2 (như trên hình 6-6d) vẽ ngẫu lực M_2 theo chiều dương đã quy ước.

$$M_2 = Qh = -EJ_y^* \frac{h^2}{2} \frac{d^3\theta}{dz^3} \quad (6-47)$$

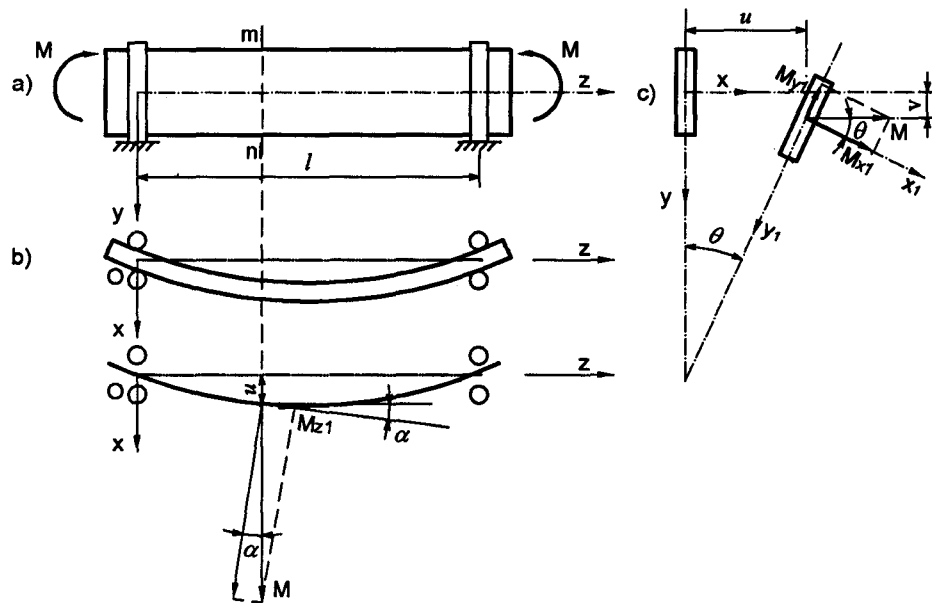
Thay (6-44) và (6-47) vào (6-43), ta được phương trình vi phân liên hệ giữa mômen xoắn ngoại lực với góc xoắn, áp dụng cho trường hợp xoắn kim chế (Phương trình này do S.P Ti mô xen không thiết lập)

$$M_{z1} = GJ_z \frac{d\theta}{dz} - EJ_y^* \frac{h^2}{2} \frac{d^3\theta}{dz^3} \quad (6-48)$$

Phương trình này thay thế cho phương trình (6-3)

Bây giờ, ta lần lượt xác định tải trọng tới hạn cho dầm chữ I có liên kết khác nhau và chịu các dạng tải trọng khác nhau.

I. Dầm chữ I chịu uốn thuần túy:



Hình 6-1

Cũng tương tự như mục §1.

Gọi x, y, z - hệ trục cố định, có chiều như trên hình 6-1.

x_1, y_1, z_1 - hệ trục gắn liền với mặt cắt bất kỳ $m - n$ sau khi biến dạng.

Trong đó, x_1, y_1 là các trục trùng với các trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt $m - n$, còn trục z_1 là trục hướng theo phương của tiếp tuyến tại mặt cắt $m - n$ với trục dầm sau khi biến dạng.

Gọi u, v - chuyển vị theo phương x và phương y của trọng tâm mặt cắt $m - n$.

θ - góc xoay của mặt cắt $m - n$ trong mặt phẳng Oxy.

α - góc nghiêng của trục dầm tại mặt cắt $m - n$ trong mặt phẳng Oxz.

Các mômen uốn và mômen xoắn ngoại lực trong dầm chịu uốn thuần túy, theo hình 6-1c, ta có:

$$M_{x1} = M \cos \theta \approx M$$

$$M_{y1} = M \sin \theta \approx M\theta$$

$$M_{z1} = Mtg\alpha \approx M \frac{du}{dz}$$

Từ (6-2), suy ra: $My_1 = M\theta = -EJ_y \frac{d^2 u}{dz^2}$ (6-49)

Từ (6-3), suy ra: $GJ_z \frac{d\theta}{dz} - EJ_y \frac{h^2}{2} \frac{d^3 \theta}{dz^3} = M \frac{du}{dz}$ (6-50)

Lấy đạo hàm (6-50) theo z rồi khử u trong hai phương trình trên, ta được phương trình vi phân cấp 4.

$$\frac{d^4 \theta}{dz^4} - \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \theta}{dz^2} - \frac{1}{t^4} \theta = 0$$
 (6-51)

Trong đó:

$$a^2 = \frac{EJ_y h^2}{2GJ_z}$$
 (6-52)

$$t^4 = \frac{EJ_y EJ_y h^2}{2M_{th}^2}$$
 (6-53)

Phương trình đặc trưng của (6-53) là:

$$r^4 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{1}{t^4} = 0$$

$$r_{1,2}^2 = \frac{1}{2a^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{t^4}}$$

Đặt $n^2 = r_1^2 = \frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{t^4}}$

$$m^2 = i^2 r_2^2 = -\frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{t^4}}$$

Nghiệm tổng quát của (6-51) là:

$$\theta = C_1 \sin mz + C_2 \cos mz + C_3 e^{nz} + C_4 e^{-nz}$$
 (6-54)

Trong đó:

$$m = \sqrt{-\frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{t^4}}}$$
 (6-55)

$$n = \sqrt{\frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{t^4}}}$$
 (6-56)

Nếu giả thiết, các đầu dầm được tự do xoay xung quanh các trục quán tính chính x, y nhưng không xoay quanh trục z như trên hình 6-1, thì ta có thể lập được 4 điều kiện biên để xác định 4 hằng số tích phân C_1, C_2, C_3, C_4 .

1. Khi $z = 0$, ta có: $\theta = 0$

2. Khi $z = 0$, mômen uốn trong bản đế bằng không, nên $u_1'' = 0$. Do

đó theo công thức (6-46), ta có:

$$u_1'' = \frac{h}{2}\theta'' = 0. \text{ Suy ra: } \frac{d^2\theta}{dz^2} = 0$$

3. Khi $z = l, \theta = 0$

4. Khi $z = l, \frac{d^2\theta}{dz^2} = 0$

Từ điều kiện 1:

$$C_2 + C_3 + C_4 = 0 \Rightarrow C_3 + C_4 = -C_2$$

$$\frac{d\theta}{dz} = mC_1 \cos mz - mC_2 \sin mz + nC_3 e^{nz} - nC_4 e^{-nz}$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = -m^2 C_1 \sin mz - m^2 C_2 \cos mz + n^2 C_3 e^{nz} + n^2 C_4 e^{-nz}$$

Từ điều kiện 2:

$$-m^2 C_2 + n^2 C_3 + n^2 C_4 = 0$$

Như vậy, từ hai điều kiện đầu, ta xác định được:

$$C_2 = 0, C_3 = -C_4$$

Do đó, nghiệm của (6-54) có thể viết dưới dạng:

$$\theta = C_1 \sin mz + 2C_3 \left(\frac{e^{nz} - e^{-nz}}{2} \right)$$

$$\theta = C_1 \sin mz + 2C_3 \sinh nz$$

Từ hai điều kiện cuối, ta lập được hệ phương trình đại số thuần nhất:

$$\begin{cases} C_1 \sin ml + 2C_3 \sinh nl = 0 \\ -C_1 m^2 \sin ml + 2C_3 n^2 \sinh nl = 0 \end{cases}$$

Từ điều kiện tồn tại trạng thái cân bằng lệch, tức $C_1 \neq 0, C_3 \neq 0$, ta được phương trình ổn định như sau:

$$D = \begin{vmatrix} \sin ml & 2 \sinh nl \\ -m^2 \sin ml & 2n^2 \sinh nl \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Hay } D = \sin ml (n^2 + m^2) \sinh nl = 0$$

Điều kiện này được thoả mãn khi:

$$\sin ml = 0$$

Nghiệm nhỏ nhất: $ml = \pi$

Từ (6-55), ta được:

$$\frac{\pi^2}{l^2} = -\frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{t^4}}$$

Biến đổi:

$$\left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{1}{2a^2}\right)^2 = \frac{1}{4a^4} + \frac{1}{l^4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{l^4} = -\frac{\pi^2}{l^2} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^4}$$

Thay (6-52) và (6-53) vào kết quả trên:

$$\frac{\pi^4}{l^4} = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{2GJ_z}{EJ_y^* h^2} + \frac{2M_{th}^2}{EJ_y^* EJ_y h^2} = \frac{-\pi^2 2GJ_z EJ_y + 2M_{th}^2 l^2}{l^2 EJ_y^* EJ_y h^2}$$

$$\frac{\pi^4}{l^2} EJ_y^* EJ_y h^2 + \pi^2 2GJ_z EJ_y = 2M_{th}^2 l^2$$

$$\pi^2 GJ_z EJ_y \left(1 + \frac{\pi^2 EJ_y^* h^2}{l^2 2GJ_z}\right) = M_{th}^2 l^2$$

Rút ra công thức xác định mômen uốn tới hạn:

$$M_{th} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EJ_y GJ_z} \cdot \sqrt{1 + \pi^2 \frac{a^2}{l^2}} \quad (6-57)$$

Đối chiếu kết quả (6-57) với kết quả (6-11) tìm được trong trường hợp dầm có mặt cắt chữ nhật hẹp. Ta thấy, hai công thức này chỉ khác nhau ở thừa số cuối. Thừa số này kể đến ảnh hưởng của hiện tượng uốn phụ trong các bản đế và luôn luôn lớn hơn đơn vị. Qua thừa số này, ta nhận thấy, ảnh hưởng của sự uốn trong các bản đế càng lớn khi tỷ số $\frac{a}{l}$ càng lớn, tức là khi chiều dài l của dầm càng ngắn và ngược lại.

Công thức (6-57) có thể viết dưới dạng:

$$M_{th} = \frac{k}{l} \sqrt{EJ_y GJ_z} \quad (6-58)$$

Trong đó: $k = \pi \sqrt{1 + \pi^2 \frac{a^2}{l^2}} \quad (6-59)$

Giá trị của k phụ thuộc vào tỷ số $\frac{l}{a}$ và tìm được theo bảng 6-2.

Bảng 6-2

$\frac{l^2}{a^2}$	0,1	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0
k	31,40	10,36	7,66	5,58	5,11	4,70	4,43	4,24

$\frac{l^2}{a^2}$	16	20	24	28	32	36	40	100
k	4,00	3,83	3,73	3,66	3,59	3,55	3,51	3,29

Ta nhận thấy, khi tỷ số $\frac{l^2}{a^2}$ càng tăng thì trị số của k càng giảm và tiệm cận dần trị số π là trị số tìm được theo (6-11) tương ứng với trường hợp dầm có mặt cắt hình chữ nhật hẹp.

II. Dầm chữ I chịu uốn ngang phẳng:

1. Dầm đặt tự do trên hai gối tựa, chịu lực tập trung ở giữa nhịp:

- Tương tự như ở §3 (Hình 6-4), trong trường hợp này, các mômen uốn và mômen xoắn tại mặt cắt bất kỳ $m - n$ có giá trị:

$$M_{x1} = M_x \cos \theta \approx M_x = \frac{P}{2} z$$

$$M_{y1} = M_x \sin \theta \approx M_x \theta = \frac{P}{2} z \theta$$

$$M_{z1} = M_x \frac{du}{dz} + \frac{P}{2} (\delta - u) = \frac{P}{2} z \frac{du}{dz} + \frac{P}{2} (\delta - u)$$

Thay các biểu thức này vào (6-2) và (6-48), ta được hai phương trình vi phân:

$$EJ_y \frac{d^2 u}{dz^2} = -\frac{P}{2} z \theta$$

$$GJ_z \frac{d\theta}{dz} - EJ_y \frac{h^2}{2} \frac{d^3 \theta}{dz^3} = \frac{P}{2} z \frac{du}{dz} + \frac{P}{2} (\delta - u)$$

Sau khi khử u khỏi 2 phương trình trên, ta sẽ được một phương trình vi phân cấp 4. Cũng tương tự như ở mục §3, viết nghiệm của phương trình vi phân dưới dạng chuỗi vô hạn và sử dụng các điều kiện biên, ta sẽ tìm được công thức xác định lực tới hạn như sau:

$$P_{th} = \frac{k}{l^2} \sqrt{EJ_y \cdot GJ_z} \quad (6-60)$$

Trị số của k phụ thuộc vào tỷ số $\frac{l}{a}$ và được xác định theo bảng 6-3. Giá trị

của a xác định theo công thức (6-52).

Bảng 6-3

$\frac{l^2}{a^2}$			4,0	8,0	16,0	24,0	32,0	48,0
k	Điểm đặt lực ở	Trọng tâm mặt cắt	31,9	25,6	21,8	20,3	19,6	18,5
		Bản đế trên	20,2	16,9	15,4	15,0	14,9	14,8
		Bản đế dưới	50,0	38,3	30,4	27,3	25,5	23,5

Khi điểm đặt của lực P thay đổi theo chiều cao của dầm, giá trị lực tới hạn cũng thay đổi. Trong bảng 6 - 3, cũng cho sẵn những giá trị của hệ số k tương ứng với hai vị trí đặt lực: lực đặt ở bản đế trên và lực đặt ở bản đế dưới.

2. Dầm đặt tự do trên hai gối tựa, chịu tải trọng phân bố đều trên toàn nhịp:

Cũng áp dụng phương pháp nghiên cứu tương tự như ở trên cho trường hợp này, ta được kết quả:

$$(ql)_{th} = \frac{k}{l^2} \sqrt{EJ_y GJ_z} \quad (6-61)$$

Giá trị của hệ số k phụ thuộc tỷ số $\frac{l}{a}$ và điểm đặt lực. Giá trị của a xác định theo công thức (6-52). Giá trị của k cho ở bảng 6-4.

Bảng 6-4

$\frac{l^2}{a^2}$			0,4	4,0	8,0	16,0	24,0	32,0	48,0
k	Tải trọng tác dụng tại	Trọng tâm mặt cắt	143,0	53,0	42,6	36,3	33,8	32,6	31,5
		Bản đế trên	92,2	36,3	30,4	27,5	26,6	26,1	26,0
		Bản đế dưới	222,5	77,4	59,6	48,1	43,6	40,5	37,9

PHỤ LỤC

Bảng 1: Bảng giá trị các hàm số:

$$\alpha(v) = \frac{3}{v^2} \left(1 - \frac{v}{\operatorname{tg} v}\right); \quad \beta(v) = \frac{6}{v^2} \left(\frac{v}{\sin v} - 1\right); \quad \theta_1(v) = \frac{3}{v^2} \left(\frac{\operatorname{tg} v}{v} - 1\right);$$

$$\theta_2(v) = \frac{3}{v^2} \left(1 + v \operatorname{tg} v - \frac{2}{\cos v} + \frac{v}{\operatorname{tg} v}\right); \quad \theta_3(v) = \frac{6}{v^2} \left(\frac{1}{\cos v} - \frac{\operatorname{tg} v}{v}\right); \quad \frac{v}{\operatorname{tg} v}; \quad \frac{v}{\sin v}; \quad v \operatorname{tg} v;$$

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$\theta_3(v)$	$\frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$\frac{v}{\sin v}$	$v \operatorname{tg} v$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0.10	1.0007	1.0012	1.0040	1.0015	1.0045	0.9967	1.0017	0.0100
0.20	1.0027	1.0047	1.0163	1.0061	1.0183	0.9866	1.0067	0.0405
0.30	1.0061	1.0106	1.0374	1.0140	1.0421	0.9698	1.0152	0.0928
0.40	1.0108	1.0190	1.0684	1.0255	1.0771	0.9461	1.0272	0.1691
0.50	1.0171	1.0300	1.1113	1.0412	1.1253	0.9152	1.0429	0.2732
0.60	1.0249	1.0437	1.1686	1.0621	1.1900	0.8770	1.0626	0.4105
0.70	1.0343	1.0603	1.2445	1.0895	1.2758	0.8311	1.0866	0.5896
0.80	1.0454	1.0801	1.3455	1.1255	1.3901	0.7770	1.1152	0.8237
0.90	1.0585	1.1033	1.4821	1.1736	1.5448	0.7142	1.1489	1.1341
1.00	1.0737	1.1304	1.6722	1.2396	1.7604	0.6421	1.1884	1.5574
1.10	1.0912	1.1617	1.9491	1.3343	2.0750	0.5599	1.2343	2.1612
1.20	1.1114	1.1979	2.3822	1.4805	2.5677	0.4665	1.2875	3.0866
1.30	1.1345	1.2396	3.1435	1.7342	3.4349	0.3609	1.3492	4.6827
1.40	1.1610	1.2878	4.8082	2.2828	5.3331	0.2415	1.4207	8.1170
1.50	1.1915	1.3434	11.2013	4.3725	12.6290	0.1064	1.5038	21.1521
$\pi/2$	1.2159	1.3880	∞	∞	∞	0.0000	1.5708	∞
1.60	1.2266	1.4078	-26.2445	-7.8201	-30.1214	-0.0467	1.6007	-54.7721
1.70	1.2673	1.4830	-5.7378	-1.1305	-6.7139	-0.2209	1.7143	-13.0842
1.80	1.3148	1.5710	-3.1308	-0.2720	-3.7409	-0.4199	1.8483	-7.7153
1.90	1.3704	1.6750	-2.1113	0.0701	-2.5805	-0.6491	2.0078	-5.5615
2.00	1.4365	1.7993	-1.5694	0.2575	-1.9657	-0.9153	2.1995	-4.3701
2.02	1.4512	1.8270	-1.4902	0.2856	-1.8762	-0.9738	2.2425	-4.1902
2.04	1.4664	1.8558	-1.4179	0.3115	-1.7944	-1.0342	2.2872	-4.0240
2.06	1.4822	1.8858	-1.3516	0.3355	-1.7195	-1.0967	2.3337	-3.8695
2.08	1.4987	1.9169	-1.2905	0.3579	-1.6507	-1.1613	2.3822	-3.7255
2.10	1.5158	1.9494	-1.2342	0.3787	-1.5872	-1.2282	2.4328	-3.5907
2.12	1.5335	1.9832	-1.1820	0.3982	-1.5285	-1.2975	2.4855	-3.4640
2.14	1.5521	2.0184	-1.1335	0.4166	-1.4741	-1.3693	2.5406	-3.3446
2.16	1.5713	2.0551	-1.0884	0.4339	-1.4235	-1.4438	2.5981	-3.2316
2.18	1.5914	2.0935	-1.0463	0.4503	-1.3763	-1.5211	2.6582	-3.1244
2.20	1.6124	2.1336	-1.0069	0.4659	-1.3324	-1.6014	2.7211	-3.0224

Bảng 1 (tiếp theo)

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$\theta_3(v)$	$\frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$\frac{v}{\sin v}$	$\operatorname{vtg} v$
2.22	1.6343	2.1755	-0.9700	0.4807	-1.2912	-1.6849	2.7870	-2.9251
2.24	1.6572	2.2194	-0.9354	0.4948	-1.2526	-1.7717	2.8560	-2.8320
2.26	1.6812	2.2653	-0.9028	0.5083	-1.2165	-1.8622	2.9284	-2.7427
2.28	1.7062	2.3135	-0.8721	0.5212	-1.1824	-1.9566	3.0044	-2.6569
2.30	1.7325	2.3641	-0.8431	0.5336	-1.1504	-2.0550	3.0843	-2.5742
2.32	1.7601	2.4172	-0.8157	0.5456	-1.1202	-2.1579	3.1684	-2.4943
2.34	1.7891	2.4731	-0.7897	0.5571	-1.0917	-2.2654	3.2569	-2.4170
2.36	1.8195	2.5319	-0.7651	0.5683	-1.0647	-2.3780	3.3503	-2.3421
2.38	1.8516	2.5940	-0.7418	0.5791	-1.0392	-2.4961	3.4489	-2.2693
2.40	1.8854	2.6595	-0.7196	0.5897	-1.0151	-2.6200	3.5531	-2.1984
2.42	1.9212	2.7287	-0.6985	0.5999	-0.9921	-2.7503	3.6634	-2.1293
2.44	1.9589	2.8021	-0.6784	0.6099	-0.9704	-2.8875	3.7804	-2.0618
2.46	1.9989	2.8798	-0.6592	0.6196	-0.9497	-3.0322	3.9046	-1.9958
2.48	2.0413	2.9624	-0.6409	0.6291	-0.9301	-3.1850	4.0366	-1.9311
2.50	2.0864	3.0502	-0.6234	0.6384	-0.9114	-3.3466	4.1773	-1.8676
2.52	2.1344	3.1438	-0.6067	0.6476	-0.8936	-3.5180	4.3274	-1.8051
2.54	2.1855	3.2438	-0.5907	0.6566	-0.8767	-3.7000	4.4880	-1.7437
2.56	2.2402	3.3508	-0.5753	0.6654	-0.8605	-3.8938	4.6600	-1.6831
2.58	2.2988	3.4656	-0.5606	0.6741	-0.8451	-4.1006	4.8448	-1.6233
2.60	2.3618	3.5890	-0.5465	0.6828	-0.8304	-4.3218	5.0436	-1.5642
2.62	2.4295	3.7221	-0.5329	0.6913	-0.8164	-4.5591	5.2583	-1.5057
2.64	2.5027	3.8659	-0.5199	0.6997	-0.8030	-4.8142	5.4906	-1.4477
2.66	2.5819	4.0218	-0.5073	0.7081	-0.7902	-5.0896	5.7428	-1.3902
2.68	2.6680	4.1914	-0.4952	0.7164	-0.7780	-5.3877	6.0174	-1.3331
2.70	2.7619	4.3766	-0.4836	0.7246	-0.7663	-5.7115	6.3176	-1.2764
2.72	2.8648	4.5795	-0.4724	0.7328	-0.7551	-6.0649	6.6469	-1.2199
2.74	2.9778	4.8029	-0.4615	0.7410	-0.7444	-6.4520	7.0097	-1.1636
2.76	3.1027	5.0499	-0.4511	0.7491	-0.7342	-6.8783	7.4114	-1.1075
2.78	3.2414	5.3245	-0.4410	0.7572	-0.7244	-7.3502	7.8583	-1.0515
2.80	3.3963	5.6315	-0.4312	0.7654	-0.7151	-7.8756	8.3585	-0.9955
2.82	3.5704	5.9769	-0.4218	0.7735	-0.7061	-8.4645	8.9218	-0.9395
2.84	3.7676	6.3685	-0.4127	0.7817	-0.6976	-9.1294	9.5610	-0.8835
2.86	3.9928	6.8160	-0.4039	0.7898	-0.6894	-9.8866	10.2920	-0.8273
2.88	4.2525	7.3322	-0.3953	0.7980	-0.6816	-10.7572	11.1361	-0.7711
2.90	4.5550	7.9343	-0.3870	0.8063	-0.6742	-11.7692	12.1212	-0.7146
2.92	4.9121	8.6455	-0.3790	0.8146	-0.6670	-12.9609	13.2858	-0.6579
2.94	5.3401	9.4982	-0.3712	0.8229	-0.6603	-14.3858	14.6831	-0.6008
2.96	5.8622	10.5393	-0.3636	0.8313	-0.6538	-16.1207	16.3902	-0.5435

Bảng 1 (tiếp theo)

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$\theta_3(v)$	$\frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$\frac{v}{\sin v}$	$\operatorname{vtg} v$
2.98	6.5134	11.8386	-0.3563	0.8398	-0.6476	-18.2806	18.5219	-0.4858
3.00	7.3486	13.5057	-0.3492	0.8484	-0.6417	-21.0458	21.2585	-0.4276
3.02	8.4583	15.7219	-0.3422	0.8570	-0.6361	-24.7145	24.8983	-0.3690
3.04	10.0049	18.8117	-0.3355	0.8657	-0.6308	-29.8204	29.9750	-0.3099
3.06	12.3094	23.4173	-0.3290	0.8746	-0.6258	-37.4201	37.5450	-0.2502
3.08	16.1102	31.0155	-0.3226	0.8835	-0.6210	-49.9427	50.0376	-0.1899
3.10	23.5659	45.9233	-0.3164	0.8926	-0.6165	-74.4894	74.5539	-0.1290
3.12	44.8321	88.4522	-0.3103	0.9018	-0.6122	-144.4711	144.5048	-0.0674
3.14	600.1919	1199.1683	-0.3044	0.9111	-0.6082	-1971.5507	1971.5532	-0.0050
π	∞	∞	-0.3040	0.9119	-0.6079	∞	∞	0.0000
3.16	-51.2692	-103.7576	-0.2987	0.9206	-0.6045	171.6512	-171.6803	0.0582
3.18	-24.2542	-49.7312	-0.2931	0.9303	-0.6009	82.7559	-82.8170	0.1222
3.20	-15.7398	-32.7063	-0.2876	0.9401	-0.5976	54.7253	-54.8188	0.1871
3.22	-11.5688	-24.3681	-0.2823	0.9501	-0.5946	40.9834	-41.1097	0.2530
3.24	-9.0929	-19.4202	-0.2771	0.9602	-0.5918	32.8180	-32.9776	0.3199
3.26	-7.4532	-16.1447	-0.2720	0.9706	-0.5892	27.4033	-27.5965	0.3878
3.28	-6.2872	-13.8166	-0.2670	0.9812	-0.5868	23.5466	-23.7740	0.4569
3.30	-5.4154	-12.0770	-0.2621	0.9920	-0.5846	20.6578	-20.9197	0.5272
3.32	-4.7389	-10.7281	-0.2574	1.0030	-0.5827	18.4112	-18.7082	0.5987
3.34	-4.1986	-9.6517	-0.2527	1.0143	-0.5810	16.6126	-16.9450	0.6715
3.36	-3.7571	-8.7729	-0.2482	1.0258	-0.5795	15.1387	-15.5071	0.7457
3.38	-3.3895	-8.0421	-0.2437	1.0377	-0.5782	13.9078	-14.3126	0.8214
3.40	-3.0787	-7.4248	-0.2393	1.0498	-0.5772	12.8633	-13.3051	0.8987
3.42	-2.8124	-6.8966	-0.2351	1.0622	-0.5764	11.9651	-12.4443	0.9775
3.44	-2.5817	-6.4397	-0.2308	1.0749	-0.5758	11.1836	-11.7007	1.0581
3.46	-2.3798	-6.0405	-0.2267	1.0880	-0.5755	10.4968	-11.0524	1.1405
3.48	-2.2017	-5.6889	-0.2227	1.1014	-0.5753	9.8879	-10.4824	1.2248
3.50	-2.0433	-5.3768	-0.2187	1.1152	-0.5755	9.3437	-9.9777	1.3110
3.52	-1.9016	-5.0981	-0.2148	1.1294	-0.5758	8.8538	-9.5279	1.3994
3.54	-1.7740	-4.8477	-0.2109	1.1440	-0.5764	8.4102	-9.1249	1.4900
3.56	-1.6584	-4.6215	-0.2071	1.1591	-0.5773	8.0061	-8.7619	1.5830
3.58	-1.5533	-4.4163	-0.2034	1.1747	-0.5784	7.6359	-8.4335	1.6784
3.60	-1.4573	-4.2293	-0.1998	1.1907	-0.5797	7.2953	-8.1352	1.7765
3.62	-1.3691	-4.0582	-0.1961	1.2073	-0.5814	6.9805	-7.8633	1.8773
3.64	-1.2879	-3.9011	-0.1926	1.2244	-0.5833	6.6883	-7.6146	1.9810
3.66	-1.2129	-3.7564	-0.1890	1.2421	-0.5855	6.4160	-7.3865	2.0878
3.68	-1.1434	-3.6227	-0.1856	1.2604	-0.5880	6.1614	-7.1767	2.1979
3.70	-1.0787	-3.4989	-0.1821	1.2795	-0.5908	5.9225	-6.9833	2.3115

Bảng 1 (tiếp theo)

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$\theta_3(v)$	$\frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$\frac{v}{\sin v}$	$v \operatorname{tg} v$
3.72	-1.0184	-3.3839	-0.1787	1.2992	-0.5939	5.6977	-6.8046	2.4288
3.74	-0.9620	-3.2768	-0.1754	1.3196	-0.5974	5.4855	-6.6391	2.5499
3.76	-0.9092	-3.1769	-0.1720	1.3409	-0.6012	5.2846	-6.4857	2.6753
3.78	-0.8595	-3.0835	-0.1687	1.3630	-0.6053	5.0939	-6.3432	2.8050
3.80	-0.8128	-2.9961	-0.1655	1.3861	-0.6099	4.9124	-6.2106	2.9395
3.82	-0.7687	-2.9140	-0.1622	1.4101	-0.6149	4.7393	-6.0871	3.0790
3.84	-0.7271	-2.8369	-0.1590	1.4351	-0.6203	4.5738	-5.9720	3.2239
3.86	-0.6876	-2.7643	-0.1557	1.4613	-0.6261	4.4152	-5.8646	3.3746
3.88	-0.6502	-2.6959	-0.1525	1.4887	-0.6324	4.2629	-5.7643	3.5315
3.90	-0.6147	-2.6314	-0.1493	1.5173	-0.6392	4.1164	-5.6705	3.6950
3.92	-0.5809	-2.5704	-0.1461	1.5474	-0.6466	3.9752	-5.5829	3.8656
3.94	-0.5486	-2.5127	-0.1429	1.5789	-0.6545	3.8388	-5.5009	4.0439
3.96	-0.5178	-2.4580	-0.1397	1.6121	-0.6631	3.7068	-5.4242	4.2305
3.98	-0.4884	-2.4062	-0.1365	1.6470	-0.6723	3.5789	-5.3525	4.4260
4.00	-0.4603	-2.3570	-0.1332	1.6838	-0.6823	3.4548	-5.2854	4.6313
4.02	-0.4333	-2.3103	-0.1300	1.7227	-0.6930	3.3340	-5.2227	4.8471
4.04	-0.4074	-2.2660	-0.1267	1.7639	-0.7045	3.2164	-5.1640	5.0744
4.06	-0.3825	-2.2238	-0.1233	1.8074	-0.7169	3.1018	-5.1093	5.3143
4.08	-0.3586	-2.1836	-0.1199	1.8537	-0.7304	2.9897	-5.0582	5.5678
4.10	-0.3355	-2.1453	-0.1165	1.9030	-0.7449	2.8802	-5.0105	5.8365
4.12	-0.3133	-2.1089	-0.1130	1.9555	-0.7606	2.7728	-4.9662	6.1216
4.14	-0.2919	-2.0741	-0.1094	2.0116	-0.7775	2.6676	-4.9250	6.4251
4.16	-0.2712	-2.0410	-0.1057	2.0717	-0.7960	2.5642	-4.8868	6.7489
4.18	-0.2511	-2.0094	-0.1020	2.1362	-0.8160	2.4626	-4.8515	7.0952
4.20	-0.2317	-1.9792	-0.0981	2.2057	-0.8378	2.3625	-4.8189	7.4667
4.22	-0.2129	-1.9504	-0.0940	2.2807	-0.8615	2.2639	-4.7889	7.8664
4.24	-0.1947	-1.9229	-0.0899	2.3621	-0.8875	2.1665	-4.7615	8.2979
4.26	-0.1769	-1.8966	-0.0855	2.4505	-0.9161	2.0704	-4.7365	8.7653
4.28	-0.1597	-1.8715	-0.0809	2.5471	-0.9475	1.9753	-4.7138	9.2738
4.30	-0.1430	-1.8475	-0.0760	2.6529	-0.9821	1.8811	-4.6935	9.8291
4.32	-0.1266	-1.8246	-0.0708	2.7694	-1.0206	1.7878	-4.6753	10.4386
4.34	-0.1107	-1.8028	-0.0653	2.8984	-1.0634	1.6953	-4.6593	11.1107
4.36	-0.0952	-1.7819	-0.0594	3.0418	-1.1114	1.6033	-4.6455	11.8563
4.38	-0.0801	-1.7619	-0.0530	3.2025	-1.1653	1.5120	-4.6336	12.6884
4.40	-0.0652	-1.7429	-0.0459	3.3835	-1.2265	1.4210	-4.6238	13.6238
4.42	-0.0508	-1.7248	-0.0381	3.5893	-1.2963	1.3305	-4.6159	14.6836
4.44	-0.0366	-1.7074	-0.0295	3.8251	-1.3767	1.2402	-4.6100	15.8951
4.46	-0.0226	-1.6909	-0.0197	4.0981	-1.4702	1.1502	-4.6059	17.2943

Bảng 1 (tiếp theo)

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$\theta_3(v)$	$\frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$\frac{v}{\sin v}$	$\operatorname{vtg} v$
4.48	-0.0090	-1.6752	-0.0085	4.4180	-1.5800	1.0603	-4.6038	18.9297
4.50	0.0044	-1.6603	0.0045	4.7980	-1.7109	0.9704	-4.6034	20.8680
4.52	0.0175	-1.6461	0.0199	5.2568	-1.8695	0.8805	-4.6050	23.2035
4.54	0.0305	-1.6326	0.0386	5.8218	-2.0653	0.7905	-4.6083	26.0744
4.56	0.0432	-1.6198	0.0617	6.5349	-2.3129	0.7003	-4.6135	29.6914
4.58	0.0558	-1.6076	0.0915	7.4632	-2.6359	0.6099	-4.6204	34.3927
4.60	0.0682	-1.5962	0.1313	8.7215	-3.0744	0.5192	-4.6292	40.7568
4.62	0.0804	-1.5854	0.1878	10.5243	-3.7036	0.4281	-4.6398	49.8636
4.64	0.0925	-1.5752	0.2748	13.3227	-4.6815	0.3365	-4.6522	63.9862
4.66	0.1044	-1.5656	0.4272	18.2571	-6.4071	0.2444	-4.6664	88.8686
4.68	0.1162	-1.5567	0.7663	29.2842	-10.2660	0.1516	-4.6825	144.4431
4.70	0.1279	-1.5483	2.1964	75.9114	-26.5890	0.0582	-4.7004	379.3500
$3\pi/2$	0.1351	-1.5434	∞	∞	∞	0.0000	-4.7124	∞
4.72	0.1395	-1.5405	-3.8830	-122.5075	42.8825	-0.0359	-4.7201	-620.1415
4.74	0.1510	-1.5334	-1.1535	-33.4762	11.7131	-0.1309	-4.7418	-171.6270
4.76	0.1624	-1.5267	-0.7162	-19.2430	6.7317	-0.2268	-4.7654	-99.9013
4.78	0.1738	-1.5207	-0.5370	-13.4299	4.6983	-0.3237	-4.7909	-70.5908
4.80	0.1851	-1.5152	-0.4390	-10.2704	3.5939	-0.4216	-4.8185	-54.6474
4.82	0.1964	-1.5103	-0.3771	-8.2850	2.9006	-0.5207	-4.8480	-44.6179
4.84	0.2076	-1.5060	-0.3343	-6.9216	2.4250	-0.6210	-4.8797	-37.7217
4.86	0.2188	-1.5022	-0.3028	-5.9273	2.0787	-0.7226	-4.9134	-32.6849
4.88	0.2300	-1.4989	-0.2785	-5.1702	1.8154	-0.8257	-4.9494	-28.8419
4.90	0.2412	-1.4963	-0.2593	-4.5742	1.6085	-0.9302	-4.9875	-25.8107
4.92	0.2524	-1.4941	-0.2435	-4.0929	1.4417	-1.0364	-5.0280	-23.3567
4.94	0.2636	-1.4926	-0.2304	-3.6959	1.3045	-1.1442	-5.0708	-21.3276
4.96	0.2748	-1.4916	-0.2192	-3.3630	1.1896	-1.2539	-5.1160	-19.6204
4.98	0.2861	-1.4912	-0.2096	-3.0796	1.0921	-1.3655	-5.1638	-18.1627
5.00	0.2975	-1.4914	-0.2011	-2.8355	1.0083	-1.4791	-5.2142	-16.9026
5.02	0.3089	-1.4922	-0.1937	-2.6230	0.9356	-1.5948	-5.2672	-15.8013
5.04	0.3204	-1.4936	-0.1871	-2.4363	0.8720	-1.7129	-5.3231	-14.8297
5.06	0.3320	-1.4955	-0.1811	-2.2710	0.8157	-1.8334	-5.3819	-13.9654
5.08	0.3437	-1.4982	-0.1757	-2.1235	0.7658	-1.9564	-5.4437	-13.1908
5.10	0.3555	-1.5014	-0.1707	-1.9912	0.7211	-2.0822	-5.5087	-12.4919
5.12	0.3674	-1.5053	-0.1662	-1.8717	0.6809	-2.2108	-5.5769	-11.8575
5.14	0.3795	-1.5099	-0.1620	-1.7633	0.6446	-2.3425	-5.6486	-11.2785
5.16	0.3918	-1.5152	-0.1582	-1.6644	0.6116	-2.4774	-5.7239	-10.7475
5.18	0.4043	-1.5212	-0.1545	-1.5739	0.5816	-2.6157	-5.8030	-10.2582
5.20	0.4169	-1.5280	-0.1512	-1.4908	0.5541	-2.7577	-5.8860	-9.8053

Bảng 1 (tiếp theo)

v	$\alpha(v)$	$\beta(v)$	$\theta_1(v)$	$\theta_2(v)$	$\theta_3(v)$	$\frac{v}{\operatorname{tg} v}$	$\frac{v}{\sin v}$	$v \operatorname{tg} v$
5.22	0.4298	-1.5355	-0.1480	-1.4141	0.5288	-2.9035	-5.9732	-9.3847
5.24	0.4429	-1.5438	-0.1450	-1.3431	0.5056	-3.0534	-6.0647	-8.9924
5.26	0.4562	-1.5529	-0.1422	-1.2772	0.4841	-3.2077	-6.1609	-8.6255
5.28	0.4699	-1.5629	-0.1396	-1.2158	0.4643	-3.3665	-6.2620	-8.2810
5.30	0.4838	-1.5738	-0.1371	-1.1585	0.4458	-3.5303	-6.3681	-7.9567
5.32	0.4981	-1.5857	-0.1347	-1.1049	0.4286	-3.6994	-6.4798	-7.6506
5.34	0.5128	-1.5985	-0.1324	-1.0547	0.4126	-3.8740	-6.5972	-7.3608
5.36	0.5278	-1.6124	-0.1302	-1.0074	0.3977	-4.0545	-6.7208	-7.0858
5.38	0.5433	-1.6274	-0.1281	-0.9629	0.3837	-4.2414	-6.8509	-6.8242
5.40	0.5592	-1.6436	-0.1261	-0.9209	0.3706	-4.4352	-6.9879	-6.5747
5.42	0.5756	-1.6610	-0.1242	-0.8812	0.3583	-4.6362	-7.1324	-6.3363
5.44	0.5925	-1.6797	-0.1223	-0.8436	0.3467	-4.8450	-7.2848	-6.1081
5.46	0.6101	-1.6998	-0.1205	-0.8079	0.3358	-5.0622	-7.4456	-5.8891
5.48	0.6282	-1.7214	-0.1188	-0.7740	0.3255	-5.2884	-7.6156	-5.6785
5.50	0.6470	-1.7446	-0.1171	-0.7417	0.3158	-5.5244	-7.7954	-5.4757
5.52	0.6666	-1.7694	-0.1155	-0.7110	0.3066	-5.7708	-7.9858	-5.2801
5.54	0.6870	-1.7961	-0.1140	-0.6816	0.2979	-6.0286	-8.1876	-5.0910
5.56	0.7083	-1.8248	-0.1125	-0.6535	0.2897	-6.2987	-8.4016	-4.9079
5.58	0.7305	-1.8555	-0.1110	-0.6267	0.2819	-6.5821	-8.6291	-4.7304
5.60	0.7538	-1.8886	-0.1096	-0.6010	0.2745	-6.8801	-8.8711	-4.5581
5.62	0.7783	-1.9242	-0.1082	-0.5763	0.2675	-7.1939	-9.1289	-4.3905
5.64	0.8040	-1.9624	-0.1068	-0.5526	0.2608	-7.5249	-9.4040	-4.2272
5.66	0.8311	-2.0036	-0.1055	-0.5298	0.2544	-7.8750	-9.6980	-4.0680
5.68	0.8598	-2.0481	-0.1043	-0.5079	0.2484	-8.2459	-10.0129	-3.9125
5.70	0.8901	-2.0962	-0.1030	-0.4868	0.2426	-8.6399	-10.3507	-3.7605
5.72	0.9224	-2.1481	-0.1018	-0.4665	0.2371	-9.0593	-10.7140	-3.6116
5.74	0.9567	-2.2045	-0.1006	-0.4468	0.2319	-9.5070	-11.1054	-3.4656
5.76	0.9934	-2.2657	-0.0995	-0.4278	0.2269	-9.9861	-11.5283	-3.3224
5.78	1.0327	-2.3323	-0.0983	-0.4095	0.2221	-10.5006	-11.9863	-3.1816
5.80	1.0750	-2.4050	-0.0972	-0.3917	0.2176	-11.0546	-12.4838	-3.0431
5.82	1.1207	-2.4845	-0.0962	-0.3745	0.2132	-11.6535	-13.0260	-2.9066
5.84	1.1702	-2.5718	-0.0951	-0.3578	0.2090	-12.3031	-13.6188	-2.7721
5.86	1.2240	-2.6680	-0.0941	-0.3416	0.2051	-13.0107	-14.2695	-2.6393
5.88	1.2829	-2.7743	-0.0931	-0.3258	0.2013	-13.7849	-14.9866	-2.5081
5.90	1.3476	-2.8924	-0.0921	-0.3105	0.1976	-14.6362	-15.7806	-2.3784
5.92	1.4190	-3.0241	-0.0911	-0.2956	0.1941	-15.5772	-16.6642	-2.2499
5.94	1.4984	-3.1719	-0.0901	-0.2811	0.1908	-16.6235	-17.6529	-2.1225
5.96	1.5873	-3.3388	-0.0892	-0.2670	0.1876	-17.7949	-18.7664	-1.9962

Bảng 1 (tiếp theo)

ν	$\alpha(\nu)$	$\beta(\nu)$	$\theta_1(\nu)$	$\theta_2(\nu)$	$\theta_3(\nu)$	$\frac{\nu}{\text{tgv}}$	$\frac{\nu}{\sin \nu}$	vtgv
5.98	1.6876	-3.5284	-0.0883	-0.2532	0.1846	-19.1158	-20.0294	-1.8707
6.00	1.8015	-3.7456	-0.0874	-0.2398	0.1817	-20.6181	-21.4734	-1.7460
6.02	1.9323	-3.9966	-0.0865	-0.2267	0.1789	-22.3430	-23.1398	-1.6220
6.04	2.0842	-4.2899	-0.0856	-0.2138	0.1762	-24.3455	-25.0835	-1.4985
6.06	2.2628	-4.6366	-0.0848	-0.2013	0.1737	-26.7000	-27.3791	-1.3754
6.08	2.4761	-5.0527	-0.0839	-0.1890	0.1712	-29.5105	-30.1303	-1.2527
6.10	2.7353	-5.5609	-0.0831	-0.1769	0.1689	-32.9263	-33.4866	-1.1301
6.12	3.0573	-6.1948	-0.0823	-0.1651	0.1667	-37.1699	-37.6703	-1.0077
6.14	3.4686	-7.0072	-0.0814	-0.1535	0.1645	-42.5880	-43.0284	-0.8852
6.16	4.0125	-8.0852	-0.0806	-0.1422	0.1625	-49.7528	-50.1327	-0.7627
6.18	4.7664	-9.5828	-0.0799	-0.1310	0.1606	-59.6795	-59.9987	-0.6400
6.20	5.8814	-11.8031	-0.0791	-0.1200	0.1587	-74.3604	-74.6184	-0.5169
6.22	7.7007	-15.4319	-0.0783	-0.1092	0.1570	-98.3096	-98.5061	-0.3935
6.24	11.2028	-22.4264	-0.0776	-0.0985	0.1553	-144.4038	-144.5385	-0.2696
6.26	20.7425	-41.4962	-0.0768	-0.0880	0.1537	-269.9502	-270.0228	-0.1452
6.28	150.0476	-300.0967	-0.0761	-0.0776	0.1522	-1971.5457	-1971.5557	-0.0200
2π	∞	∞	-0.0760	-0.0760	0.1520	∞	∞	0.0000

Bảng 2: Bảng giá trị các hàm số:

$$\varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}; \quad \varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v (\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2})}; \quad \varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v (\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2})};$$

$$\varphi_4(v) = \eta_3(v) = \varphi_1(\frac{v}{2}); \quad \eta_1(v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}; \quad \eta_2(v) = \eta_1(\frac{v}{2});$$

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v) = \eta_3(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.10	0.9993	0.9997	1.0002	0.9998	0.9960	0.9990
0.20	0.9973	0.9987	1.0007	0.9993	0.9840	0.9960
0.30	0.9940	0.9970	1.0015	0.9985	0.9640	0.9910
0.40	0.9893	0.9947	1.0027	0.9973	0.9360	0.9840
0.50	0.9832	0.9916	1.0042	0.9958	0.8999	0.9750
0.60	0.9757	0.9879	1.0061	0.9940	0.8557	0.9640
0.70	0.9669	0.9836	1.0083	0.9918	0.8035	0.9510
0.80	0.9565	0.9785	1.0109	0.9893	0.7432	0.9360
0.90	0.9447	0.9727	1.0138	0.9864	0.6747	0.9189
1.00	0.9313	0.9662	1.0172	0.9832	0.5980	0.8999
1.10	0.9164	0.9590	1.0209	0.9797	0.5131	0.8788
1.20	0.8998	0.9511	1.0251	0.9757	0.4198	0.8557
1.30	0.8814	0.9424	1.0297	0.9715	0.3181	0.8307
1.40	0.8613	0.9329	1.0348	0.9669	0.2080	0.8035
1.50	0.8393	0.9227	1.0403	0.9619	0.0893	0.7744
$\pi/2$	0.8225	0.9149	1.0445	0.9581	0.0000	0.7525
1.60	0.8152	0.9116	1.0463	0.9565	-0.0381	0.7432
1.70	0.7891	0.8998	1.0529	0.9508	-0.1743	0.7100
1.80	0.7606	0.8871	1.0600	0.9447	-0.3194	0.6747
1.90	0.7297	0.8735	1.0676	0.9382	-0.4736	0.6374
2.00	0.6961	0.8590	1.0760	0.9313	-0.6372	0.5980
2.02	0.6891	0.8560	1.0777	0.9299	-0.6710	0.5899
2.04	0.6819	0.8530	1.0795	0.9285	-0.7053	0.5817
2.06	0.6747	0.8499	1.0813	0.9270	-0.7399	0.5734
2.08	0.6673	0.8468	1.0831	0.9256	-0.7749	0.5650
2.10	0.6597	0.8436	1.0849	0.9241	-0.8103	0.5566
2.12	0.6521	0.8404	1.0868	0.9226	-0.8461	0.5480
2.14	0.6443	0.8372	1.0887	0.9210	-0.8822	0.5394
2.16	0.6364	0.8339	1.0907	0.9195	-0.9188	0.5307
2.18	0.6284	0.8306	1.0926	0.9180	-0.9558	0.5219
2.20	0.6202	0.8273	1.0946	0.9164	-0.9931	0.5131
2.22	0.6119	0.8239	1.0967	0.9148	-1.0309	0.5041

Bảng 2 (tiếp theo)

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu) = \eta_3(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2.24	0.6034	0.8204	1.0987	0.9132	-1.0691	0.4951
2.26	0.5948	0.8170	1.1008	0.9116	-1.1077	0.4859
2.28	0.5861	0.8134	1.1030	0.9099	-1.1467	0.4767
2.30	0.5772	0.8099	1.1051	0.9083	-1.1861	0.4675
2.32	0.5681	0.8063	1.1073	0.9066	-1.2260	0.4581
2.34	0.5589	0.8026	1.1095	0.9049	-1.2663	0.4486
2.36	0.5496	0.7990	1.1118	0.9032	-1.3069	0.4391
2.38	0.5401	0.7952	1.1141	0.9015	-1.3481	0.4295
2.40	0.5304	0.7915	1.1164	0.8998	-1.3896	0.4198
2.42	0.5205	0.7877	1.1188	0.8980	-1.4316	0.4100
2.44	0.5105	0.7838	1.1212	0.8963	-1.4740	0.4001
2.46	0.5003	0.7799	1.1236	0.8945	-1.5169	0.3902
2.48	0.4899	0.7760	1.1261	0.8927	-1.5603	0.3801
2.50	0.4793	0.7720	1.1286	0.8908	-1.6040	0.3700
2.52	0.4685	0.7679	1.1311	0.8890	-1.6483	0.3598
2.54	0.4576	0.7638	1.1337	0.8871	-1.6930	0.3495
2.56	0.4464	0.7597	1.1363	0.8853	-1.7381	0.3391
2.58	0.4350	0.7555	1.1390	0.8834	-1.7838	0.3287
2.60	0.4234	0.7513	1.1417	0.8814	-1.8299	0.3181
2.62	0.4116	0.7470	1.1445	0.8795	-1.8765	0.3075
2.64	0.3996	0.7427	1.1473	0.8776	-1.9236	0.2968
2.66	0.3873	0.7383	1.1501	0.8756	-1.9712	0.2860
2.68	0.3748	0.7339	1.1530	0.8736	-2.0193	0.2751
2.70	0.3621	0.7295	1.1559	0.8716	-2.0679	0.2641
2.72	0.3491	0.7249	1.1589	0.8696	-2.1171	0.2531
2.74	0.3358	0.7204	1.1619	0.8675	-2.1667	0.2419
2.76	0.3223	0.7158	1.1650	0.8655	-2.2169	0.2307
2.78	0.3085	0.7111	1.1681	0.8634	-2.2676	0.2194
2.80	0.2944	0.7064	1.1712	0.8613	-2.3189	0.2080
2.82	0.2801	0.7016	1.1744	0.8592	-2.3707	0.1965
2.84	0.2654	0.6967	1.1777	0.8571	-2.4231	0.1849
2.86	0.2504	0.6918	1.1810	0.8549	-2.4761	0.1733
2.88	0.2352	0.6869	1.1844	0.8527	-2.5296	0.1615
2.90	0.2195	0.6819	1.1878	0.8505	-2.5838	0.1497
2.92	0.2036	0.6769	1.1913	0.8483	-2.6386	0.1378
2.94	0.1873	0.6717	1.1948	0.8461	-2.6939	0.1258
2.96	0.1706	0.6666	1.1984	0.8438	-2.7499	0.1137
2.98	0.1535	0.6613	1.2020	0.8416	-2.8066	0.1015
3.00	0.1361	0.6560	1.2057	0.8393	-2.8639	0.0893

Bảng 2 (tiếp theo)

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu) = \eta_3(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3.02	0.1182	0.6507	1.2095	0.8370	-2.9219	0.0769
3.04	0.1000	0.6453	1.2133	0.8346	-2.9806	0.0645
3.06	0.0812	0.6398	1.2172	0.8323	-3.0400	0.0520
3.08	0.0621	0.6343	1.2211	0.8299	-3.1001	0.0394
3.10	0.0424	0.6287	1.2251	0.8275	-3.1609	0.0267
3.12	0.0223	0.6230	1.2292	0.8251	-3.2225	0.0139
3.14	0.0017	0.6173	1.2334	0.8227	-3.2849	0.0010
π	0.0000	0.6169	1.2337	0.8225	-3.2899	0.0000
3.16	-0.0195	0.6115	1.2376	0.8202	-3.3480	-0.0119
3.18	-0.0412	0.6057	1.2419	0.8177	-3.4120	-0.0250
3.20	-0.0635	0.5997	1.2462	0.8152	-3.4769	-0.0381
3.22	-0.0864	0.5937	1.2506	0.8127	-3.5426	-0.0513
3.24	-0.1100	0.5877	1.2551	0.8102	-3.6092	-0.0646
3.26	-0.1342	0.5816	1.2597	0.8076	-3.6767	-0.0780
3.28	-0.1591	0.5753	1.2644	0.8050	-3.7452	-0.0915
3.30	-0.1847	0.5691	1.2691	0.8024	-3.8147	-0.1051
3.32	-0.2110	0.5627	1.2739	0.7998	-3.8852	-0.1187
3.34	-0.2382	0.5563	1.2788	0.7971	-3.9567	-0.1325
3.36	-0.2662	0.5498	1.2838	0.7945	-4.0294	-0.1463
3.38	-0.2950	0.5432	1.2889	0.7918	-4.1032	-0.1603
3.40	-0.3248	0.5366	1.2940	0.7891	-4.1781	-0.1743
3.42	-0.3556	0.5298	1.2993	0.7863	-4.2544	-0.1884
3.44	-0.3873	0.5230	1.3046	0.7835	-4.3319	-0.2026
3.46	-0.4202	0.5161	1.3100	0.7808	-4.4107	-0.2169
3.48	-0.4542	0.5091	1.3156	0.7779	-4.4910	-0.2313
3.50	-0.4894	0.5021	1.3212	0.7751	-4.5727	-0.2457
3.52	-0.5259	0.4949	1.3269	0.7723	-4.6560	-0.2603
3.54	-0.5637	0.4877	1.3327	0.7694	-4.7409	-0.2749
3.56	-0.6030	0.4804	1.3387	0.7665	-4.8275	-0.2897
3.58	-0.6438	0.4730	1.3447	0.7635	-4.9159	-0.3045
3.60	-0.6862	0.4655	1.3509	0.7606	-5.0062	-0.3194
3.62	-0.7304	0.4579	1.3571	0.7576	-5.0985	-0.3344
3.64	-0.7764	0.4502	1.3635	0.7546	-5.1930	-0.3495
3.66	-0.8244	0.4424	1.3700	0.7516	-5.2896	-0.3647
3.68	-0.8746	0.4345	1.3766	0.7485	-5.3887	-0.3800
3.70	-0.9270	0.4265	1.3834	0.7455	-5.4904	-0.3954
3.72	-0.9819	0.4184	1.3902	0.7424	-5.5947	-0.4108
3.74	-1.0395	0.4102	1.3973	0.7392	-5.7020	-0.4264
3.76	-1.0999	0.4019	1.4044	0.7361	-5.8124	-0.4421

Bảng 2 (tiếp theo)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v) = \eta_3(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
3.78	-1.1634	0.3935	1.4117	0.7329	-5.9262	-0.4578
3.80	-1.2303	0.3850	1.4191	0.7297	-6.0436	-0.4736
3.82	-1.3008	0.3764	1.4266	0.7265	-6.1650	-0.4896
3.84	-1.3754	0.3676	1.4344	0.7232	-6.2906	-0.5056
3.86	-1.4542	0.3588	1.4422	0.7199	-6.4208	-0.5217
3.88	-1.5379	0.3498	1.4502	0.7166	-6.5561	-0.5379
3.90	-1.6269	0.3407	1.4584	0.7133	-6.6969	-0.5542
3.92	-1.7216	0.3315	1.4668	0.7099	-6.8437	-0.5706
3.94	-1.8228	0.3221	1.4753	0.7065	-6.9973	-0.5871
3.96	-1.9311	0.3126	1.4840	0.7031	-7.1583	-0.6037
3.98	-2.0474	0.3030	1.4928	0.6996	-7.3275	-0.6204
4.00	-2.1726	0.2933	1.5019	0.6961	-7.5060	-0.6372
4.02	-2.3079	0.2834	1.5111	0.6926	-7.6947	-0.6541
4.04	-2.4546	0.2734	1.5205	0.6891	-7.8952	-0.6710
4.06	-2.6143	0.2632	1.5302	0.6855	-8.1088	-0.6881
4.08	-2.7887	0.2529	1.5400	0.6819	-8.3375	-0.7053
4.10	-2.9802	0.2424	1.5501	0.6783	-8.5836	-0.7225
4.12	-3.1916	0.2318	1.5603	0.6747	-8.8497	-0.7399
4.14	-3.4260	0.2211	1.5708	0.6710	-9.1392	-0.7573
4.16	-3.6878	0.2101	1.5815	0.6673	-9.4564	-0.7749
4.18	-3.9821	0.1990	1.5925	0.6635	-9.8063	-0.7925
4.20	-4.3156	0.1878	1.6037	0.6597	-10.1956	-0.8103
4.22	-4.6968	0.1763	1.6151	0.6559	-10.6329	-0.8281
4.24	-5.1370	0.1647	1.6269	0.6521	-11.1296	-0.8461
4.26	-5.6514	0.1529	1.6388	0.6482	-11.7006	-0.8641
4.28	-6.2609	0.1409	1.6511	0.6443	-12.3670	-0.8822
4.30	-6.9947	0.1287	1.6636	0.6404	-13.1581	-0.9005
4.32	-7.8961	0.1164	1.6765	0.6364	-14.1169	-0.9188
4.34	-9.0304	0.1038	1.6896	0.6324	-15.3089	-0.9372
4.36	-10.5025	0.0910	1.7031	0.6284	-16.8390	-0.9558
4.38	-12.4908	0.0780	1.7168	0.6243	-18.8856	-0.9744
4.40	-15.3271	0.0648	1.7310	0.6202	-21.7805	-0.9931
4.42	-19.7043	0.0514	1.7454	0.6160	-26.2165	-1.0120
4.44	-27.3534	0.0377	1.7602	0.6119	-33.9246	-1.0309
4.46	-44.1501	0.0238	1.7754	0.6077	-50.7807	-1.0500
4.48	-111.0248	0.0096	1.7910	0.6034	-117.7150	-1.0691
4.50	227.9292	-0.0048	1.8070	0.5991	221.1792	-1.0884
4.52		-0.0194	1.8234	0.5948		-1.1077
4.54		-0.0344	1.8402	0.5905		-1.1272

Bảng 2 (tiếp theo)

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu) = \eta_3(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4.56		-0.0496	1.8574	0.5861		-1.1467
4.58		-0.0651	1.8751	0.5817		-1.1664
4.60		-0.0809	1.8933	0.5772		-1.1861
4.62		-0.0969	1.9120	0.5727		-1.2060
4.64		-0.1134	1.9312	0.5681		-1.2260
4.66		-0.1301	1.9509	0.5636		-1.2461
4.68		-0.1471	1.9711	0.5589		-1.2663
4.70		-0.1645	1.9920	0.5543		-1.2865
$3\pi/2$		-0.1755	2.0052	0.5514		-1.2992
4.72		-0.1823	2.0134	0.5496		-1.3069
4.74		-0.2005	2.0355	0.5449		-1.3274
4.76		-0.2190	2.0582	0.5401		-1.3481
4.78		-0.2379	2.0815	0.5352		-1.3688
4.80		-0.2572	2.1056	0.5304		-1.3896
4.82		-0.2770	2.1304	0.5255		-1.4106
4.84		-0.2972	2.1560	0.5205		-1.4316
4.86		-0.3179	2.1823	0.5155		-1.4528
4.88		-0.3390	2.2095	0.5105		-1.4740
4.90		-0.3607	2.2375	0.5054		-1.4954
4.92		-0.3828	2.2665	0.5003		-1.5169
4.94		-0.4056	2.2964	0.4951		-1.5385
4.96		-0.4288	2.3273	0.4899		-1.5603
4.98		-0.4527	2.3592	0.4846		-1.5821
5.00		-0.4772	2.3923	0.4793		-1.6040
5.02		-0.5023	2.4264	0.4739		-1.6261
5.04		-0.5281	2.4618	0.4685		-1.6483
5.06		-0.5546	2.4984	0.4631		-1.6706
5.08		-0.5818	2.5364	0.4576		-1.6930
5.10		-0.6099	2.5757	0.4520		-1.7155
5.12		-0.6387	2.6165	0.4464		-1.7381
5.14		-0.6683	2.6588	0.4407		-1.7609
5.16		-0.6989	2.7028	0.4350		-1.7838
5.18		-0.7304	2.7485	0.4292		-1.8068
5.20		-0.7629	2.7960	0.4234		-1.8299
5.22		-0.7964	2.8455	0.4175		-1.8532
5.24		-0.8311	2.8969	0.4116		-1.8765
5.26		-0.8669	2.9506	0.4056		-1.9000
5.28		-0.9039	3.0065	0.3996		-1.9236
5.30		-0.9422	3.0648	0.3935		-1.9474

Bảng 2 (tiếp theo)

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v) = \eta_3(v)$	$\eta_1(v)$	$\eta_2(v)$
5.32		-0.9819	3.1257	0.3873		-1.9712
5.34		-1.0231	3.1894	0.3811		-1.9952
5.36		-1.0658	3.2560	0.3748		-2.0193
5.38		-1.1102	3.3258	0.3685		-2.0436
5.40		-1.1563	3.3989	0.3621		-2.0679
5.42		-1.2044	3.4755	0.3556		-2.0924
5.44		-1.2544	3.5560	0.3491		-2.1171
5.46		-1.3066	3.6407	0.3425		-2.1418
5.48		-1.3611	3.7297	0.3358		-2.1667
5.50		-1.4182	3.8236	0.3291		-2.1917
5.52		-1.4779	3.9226	0.3223		-2.2169
5.54		-1.5404	4.0272	0.3154		-2.2422
5.56		-1.6062	4.1379	0.3085		-2.2676
5.58		-1.6753	4.2551	0.3015		-2.2932
5.60		-1.7481	4.3794	0.2944		-2.3189
5.62		-1.8249	4.5116	0.2873		-2.3447
5.64		-1.9061	4.6523	0.2801		-2.3707
5.66		-1.9920	4.8024	0.2728		-2.3968
5.68		-2.0833	4.9628	0.2654		-2.4231
5.70		-2.1803	5.1346	0.2580		-2.4495
5.72		-2.2838	5.3190	0.2504		-2.4761
5.74		-2.3944	5.5174	0.2428		-2.5028
5.76		-2.5129	5.7313	0.2352		-2.5296
5.78		-2.6403	5.9628	0.2274		-2.5566
5.80		-2.7777	6.2139	0.2195		-2.5838
5.82		-2.9262	6.4873	0.2116		-2.6111
5.84		-3.0876	6.7858	0.2036		-2.6386
5.86		-3.2634	7.1132	0.1955		-2.6662
5.88		-3.4560	7.4738	0.1873		-2.6939
5.90		-3.6679	7.8727	0.1790		-2.7219
5.92		-3.9022	8.3162	0.1706		-2.7499
5.94		-4.1630	8.8123	0.1621		-2.7782
5.96		-4.4550	9.3706	0.1535		-2.8066
5.98		-4.7845	10.0036	0.1449		-2.8352
6.00		-5.1594	10.7270	0.1361		-2.8639
6.02		-5.5900	11.5615	0.1272		-2.8928
6.04		-6.0900	12.5346	0.1182		-2.9219
6.06		-6.6780	13.6835	0.1091		-2.9512
6.08		-7.3801	15.0601	0.1000		-2.9806

Bảng 2 (tiếp theo)

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu) = \eta_3(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
6.10		-8.2336	16.7392	0.0907		-3.0102
6.12		-9.2941	18.8319	0.0812		-3.0400
6.14		-10.6483	21.5117	0.0717		-3.0699
6.16		-12.4391	25.0645	0.0621		-3.1001
6.18		-14.9205	29.9980	0.0523		-3.1304
6.20		-18.5905	37.3084	0.0424		-3.1609
6.22		-24.5776	49.2526	0.0324		-3.1916
6.24		-36.1011	72.2690	0.0223		-3.2225
6.26		-67.4876	135.0113	0.0121		-3.2536
6.28		-492.8864	985.7779	0.0017		-3.2849
2π		$-\infty$	$+\infty$	0.0000		-3.2899

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- 1) Phạm Khắc Hùng- Đào Trọng Long- Lê Văn Quý- Lều Thọ Trình;
Ổn định và Động lực học công trình
Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp Hà nội 1974
- 2) Lều Thọ Trình- Đỗ Vương Bình;
Ổn định công trình
Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà nội 2005
- 3) Lều Thọ Trình- Đỗ Vương Bình;
Cơ học kết cấu (tập &2)
Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2001
- 4) Болотин. В.В.
Динамическая Устойчивость Упругих Систем, Мосва 1956