

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

secundaria



TOMO 10

En el fondo del océano un buzo descubre restos del naufragio de un barco. Por desgracia, el nombre del barco es ilegible. Tiene 7 letras, pero el buzo distingue sólo las tres últimas: N I C.

Las letras que aparecen en el nombre de la embarcación son A, C, I, N y T, y las consonantes se alternan con las vocales. Una de las vocales y una de las consonantes se repite, cada una, dos veces.



De nuevo en la superficie, el buzo enumera todos los nombres posibles. ¿Cuántos hay?

SOLUCIÓN

El nombre será xxxNIC, y en los cuatro huecos que faltan debe haber consonante-vocal-consonante-vocal, al alternarse vocales y consonantes.

Casos:

- las dos primeras letras son distintas a las tres últimas: TAxNIC → habrá 3 posibles consonantes en el tercer puesto y 2 posibles vocales en el cuarto: total, $3 \times 2 = 6$ nombres distintos
- la primera letra es distinta a las tres últimas y la segunda letra (vocal) coincide: TlxxNIC → habrá 3 posibles consonantes en el tercer puesto y 1 vocal (la A) en el cuarto: total, $3 \times 1 = 3$ nombres distintos
- la primera letra es igual a una de las tres últimas y la segunda letra (vocal) distinta: NlxxNIC y CxNIC → para cada caso habrá 1 consonante posible (la T) en el tercer puesto y 2 posibles vocales en el cuarto: total, $2 \times 1 \times 2 = 4$ nombres distintos
- la primera letra es igual a una de las tres últimas y la segunda letra (vocal) coincide también: NlxxNIC y ClxxNIC → para cada caso habrá 1 consonante posible (la T) en el tercer puesto y 1 vocal posible (la A) en el cuarto: total, $2 \times 1 \times 1 = 2$ nombres distintos

Por lo tanto, los nombres posibles son $6 + 3 + 4 + 2 =$

El Rey Pulpo cuenta con varios lacayos de seis, siete u ocho patas.

Los sirvientes con siete patas siempre mienten pero los sirvientes con seis u ocho patas dicen siempre la verdad.

Un día hablan cuatro criados suyos:

- El azul dice, "en conjunto, tenemos 28 patas".
- El verde comenta, "en conjunto, tenemos 27 patas".
- Añade el amarillo, "en conjunto, tenemos 26 patas".
- El rojo apostilla, "en conjunto, tenemos 25 patas".

¿Cuál es el color del sirviente que dice la verdad?



SOLUCIÓN

Como ninguno está de acuerdo tres mienten, por lo que son de siete patas, y uno dice la verdad, que es de seis u ocho patas.

Los tres que mienten completan, entre todos, $3 \times 7 = 21$ patas, por lo que el total de los cuatro tienen $3 \times 7 + 6 = 21 + 6 = 27$ patas o $3 \times 7 + 8 = 21 + 8 = 29$ patas.

Ninguno de ellos habla de 29 patas pero sí de 27 patas, que son las que realmente tienen en conjunto.

Por lo tanto, el que dice la verdad tiene 6 patas y es el de color

verde

Lucía se está acicalando para salir con sus amigas.

De repente ve su reloj, de agujas y sin numeración, en el espejo y advierte, con horror, que es exactamente la hora a la que había quedado con las amigas, ¡y aún no está lista!

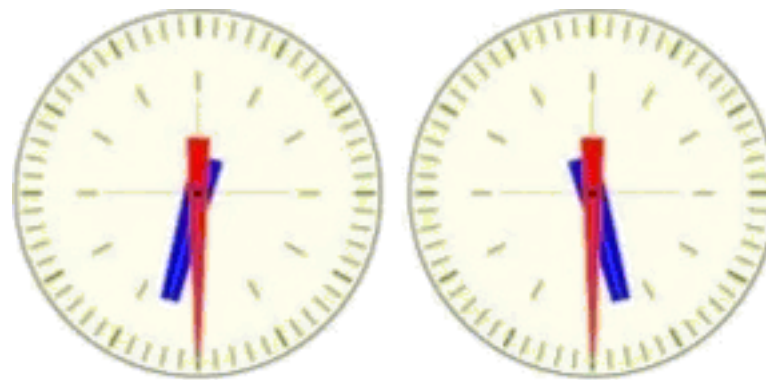
A continuación, mira por la ventana y observa, en el reloj de la iglesia (también de agujas), que todavía tiene una hora para llegar a la cita.

Si ambos relojes marcan, en todo momento, la hora correcta, ¿a qué hora tiene la cita?



SOLUCIÓN

El único secreto de este problema es considerar la posición de las agujas en una determinada hora y su simétrica respecto al espejo, teniendo en cuenta que la diferencia entre ambas horas sea de una hora exactamente. Eso sucede a las 6 : 30 y a las 5 : 30 horas.



Por lo tanto, la cita es

a las 6:30 horas

Con las 12 : 30 y 11 : 30 horas sucede lo mismo, por lo que también pudo producirse la cita a las 12 : 30 horas.

Marga se encuentra por la calle a su vieja amiga Inma, a la que no ve desde hace bastante tiempo

- Hola Inma, ¿cómo estás? ¡Cuanto tiempo sin verte!
- Pues sí, es verdad. Hace muchos años. En todo este tiempo me he casado y ya tengo 4 hijas.
- ¿Ah, sí? ¿Y qué edades tienen?
- A ver si lo adivinas: el producto de las edades de mis hijas es 48 y, curiosamente, la suma de esas edades es el número del autobús de línea que está parado ahí enfrente.



Marga piensa unos segundos y mira al autobús. Vuelve a pensar otros segundos y le dice a Inma:

- Con esas dos pistas no me basta. Necesito que me des algún dato más.
- Te diré que la pequeña tiene los ojos verdes, como su padre.

¿Cuáles son las edades de las 4 hijas de Inma?

SOLUCIÓN

Como en un problema similar bastante conocido, descomponemos el número 48 en factores primos:

$48 = 2^4 \times 3$ y vemos todas las posibilidades de edades:

- $1, 1, 1, 2^4 \times 3$: las edades son 1, 1, 1, 48 y $\begin{cases} 1 \times 1 \times 1 \times 48 = 48 \\ 1 + 1 + 1 + 48 = 51 \end{cases}$ (y estos valores son anormales)
- $1, 1, 2, 2^3 \times 3$: las edades son 1, 1, 2, 24 y $\begin{cases} 1 \times 1 \times 2 \times 24 = 48 \\ 1 + 1 + 2 + 24 = 28 \end{cases}$
- $1, 1, 3, 2^4$: las edades son 1, 1, 3, 16 y $\begin{cases} 1 \times 1 \times 3 \times 16 = 48 \\ 1 + 1 + 3 + 16 = 21 \end{cases}$
- $1, 1, 2^2, 2^2 \times 3$: las edades son 1, 1, 4, 12 y $\begin{cases} 1 \times 1 \times 4 \times 12 = 48 \\ 1 + 1 + 4 + 12 = 18 \end{cases}$
- $1, 1, 2 \times 3, 2^3$: las edades son 1, 1, 6, 8 y $\begin{cases} 1 \times 1 \times 6 \times 8 = 48 \\ 1 + 1 + 6 + 8 = 16 \end{cases}$
- $1, 2, 2, 2^2 \times 3$: las edades son 1, 2, 2, 12 y $\begin{cases} 1 \times 2 \times 2 \times 12 = 48 \\ 1 + 2 + 2 + 12 = 17 \end{cases}$
- $1, 2, 3, 2^3$: las edades son 1, 2, 3, 8 y $\begin{cases} 1 \times 2 \times 3 \times 8 = 48 \\ 1 + 2 + 3 + 8 = 14 \end{cases}$
- $1, 2, 2^2, 2 \times 3$: las edades son 1, 2, 4, 6 y $\begin{cases} 1 \times 2 \times 4 \times 6 = 48 \\ 1 + 2 + 4 + 6 = 13 \end{cases}$
- $1, 3, 2^2, 2^2$: las edades son 1, 3, 4, 4 y $\begin{cases} 1 \times 3 \times 4 \times 4 = 48 \\ 1 + 3 + 4 + 4 = 12 \end{cases}$
- $2, 2, 2, 2 \times 3$: las edades son 2, 2, 2, 6 y $\begin{cases} 2 \times 2 \times 2 \times 6 = 48 \\ 2 + 2 + 2 + 6 = 12 \end{cases}$

- $2, 2, 3, 2^2$: las edades son 2, 2, 3, 4 y $\begin{cases} 2 \times 2 \times 3 \times 4 = 48 \\ 2 + 2 + 3 + 4 = 11 \end{cases}$

Observando todos los casos se ve que una de las sumas (número del autobús) se repite: 12, de ahí la indeterminación de las edades. Las hijas pueden tener 1, 3, 4 y 4 años o 2, 2, 2 y 6 años.

Al indicar que sólo hay una pequeña (de ojos verdes), las edades de las cuatro hijas son

1, 3, 4 y 4 años

El profesor de Miguel y de Guille les ha dado, a cada uno, sendas láminas de cartón rectangulares y de las mismas dimensiones.

Les pide a ambos que enrollen cada lámina alrededor de una de sus aristas formando un cilindro y calculen el volumen resultante.

Miguel y Guille comparan sus resultados y ven que son diferentes, siendo el volumen del cilindro de Miguel ocho veces el volumen del cilindro de Guille.

Si el perímetro de cada lámina de cartón es de 72 cm, ¿cuál es la longitud del lado más largo de las láminas?



SOLUCIÓN

Sean a (largo) y b (ancho) las dimensiones, en centímetros, de las láminas.

Está claro que los dos desarrollos posibles de cilindro con esas láminas son los indicados al margen.

Sea R el radio de la base del cilindro del primer desarrollo:

$$2\pi R = a \Rightarrow R = \frac{a}{2\pi} \text{ y el volumen del cilindro es } V_1 = \pi \times \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \times b$$

Sea r el radio de la base del cilindro del segundo desarrollo:

$$2\pi r = b \Rightarrow r = \frac{b}{2\pi} \text{ y el volumen del cilindro es } V_2 = \pi \times \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \times a$$

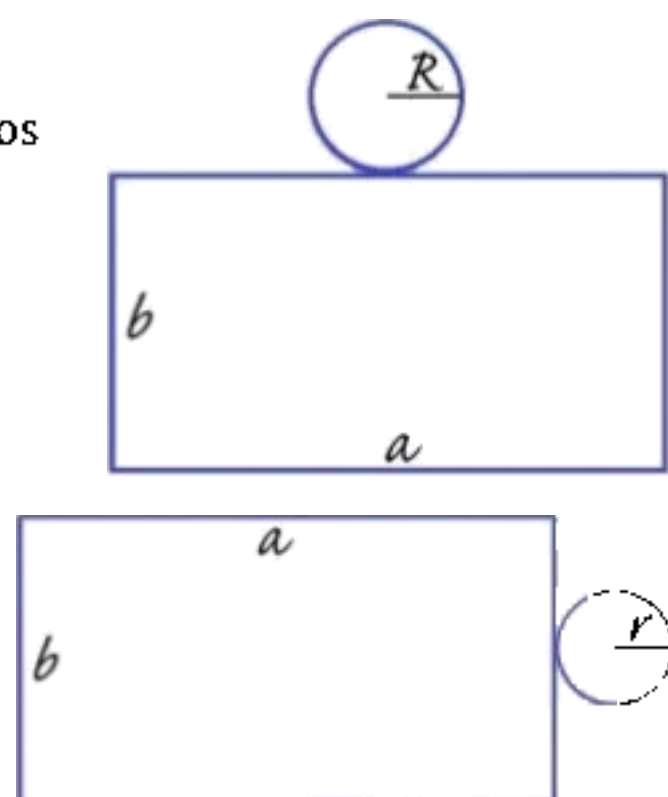
Como uno de los volúmenes es ocho veces el otro, se cumple que

$$V_1 = 8 \times V_2 \Rightarrow \pi \times \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 \times b = 8 \times \pi \times \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \times a \Rightarrow a^2 b = 8b^2 a \stackrel{a \neq 0}{\Rightarrow} a = 8b$$

Si el perímetro de la lámina es de 72 cm, $2a + 2b = 72 \Rightarrow 16b + 2b = 72 \Rightarrow 18b = 72 \Rightarrow b = \frac{72}{18} = 4$ cm, por

lo que $a = 8b = 8 \times 4 =$

32 cm



A un lujoso apartamento de la costa española han llegado cuatro políticos corruptos, Mariano, Nacho, Paco y Quique, que acaban de recibir un grueso sobre lleno de billetes, fruto de su última pillería.



Todavía exhaustos tras una pantagruélica comida, con que han celebrado la operación, se echan a dormir una siesta. Al poco, Mariano, desconfiado (los políticos corruptos lo suelen ser), temiendo que los otros se despierten y se guarden algún billete, se levanta, hace cuatro partes iguales del total de billetes, se guarda su parte y deja el resto amontonado, echando además un billete que le había sobrado en una hucha que tenían para gastos varios. Al cabo de una hora, Nacho se despierta y tiene la misma idea: hace cuatro partes iguales del total de billetes que encuentra, se guarda una parte, vuelve a amontonar el resto y echa otro billete que le había sobrado en la hucha. Al cabo de otra hora Paco hace exactamente la misma operación que el segundo y finalmente, Quique efectúa la misma operación una hora más tarde, aunque en este caso no le sobra ningún billete para meter en la hucha.

Horas después, al levantarse de la siesta, deciden repartir los billetes (los que finalmente habían quedado en el sobre) entre los cuatro, cada uno de ellos pensando que ninguno de los otros tres se había dado cuenta de lo que él había hecho anteriormente.

Sabiendo que en este último reparto no ha sobrado ningún billete y que los políticos ya sabían que el sobre no contenía más de 1000 billetes, ¿cuál es el número total de billetes que había en el sobre?, ¿con cuántos billetes se ha quedado cada político?

SOLUCIÓN

Sea $x < 1000$ la cantidad de billetes que contiene, inicialmente, el sobre.

- Si $x = 4m + 1$, Mariano se despierta y se queda m billetes, mete uno en la hucha y deja $3m$ billetes en el sobre.
- Si $3m = 4n + 1$, Nacho se despierta y se queda n billetes, mete uno en la hucha y deja $3n$ billetes en el sobre.
- Si $3n = 4p + 1$, Paco se despierta y se queda p billetes, mete uno en la hucha y deja $3p$ billetes en el sobre.
- Si $3p = 4q$, Quique se despierta y se queda q billetes y deja $3q$ billetes en el sobre.
- Si $3q = 4z$, los cuatro políticos se reparten, finalmente, z billetes cada uno.

Mediante estas relaciones mencionadas, vamos a escribir la cantidad inicial en función de la cantidad que se reparten:

$$3q = 4z \Rightarrow q = \frac{4z}{3} \Rightarrow 3p = 4 \times \frac{4z}{3} = \frac{16z}{3} \Rightarrow p = \frac{16z}{9} \Rightarrow 3n = 4p + 1 = 4 \times \frac{16z}{9} + 1 = \frac{64z + 9}{9} \Rightarrow n = \frac{64z + 9}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3m = 4n + 1 = 4 \times \frac{64z + 9}{27} + 1 = \frac{256z + 63}{27} \Rightarrow m = \frac{256z + 63}{81} \Rightarrow x = 4m + 1 = 4 \times \frac{256z + 63}{81} + 1 = \frac{1024z + 333}{81}$$

Por lo tanto,

$$\bullet \quad x = \frac{1024z + 333}{81} = 12z + 4 + \frac{52z + 9}{81}; \quad 1 = \frac{52z + 9}{81} \Rightarrow 52z = 81 - 9$$

$$\bullet \quad z = \frac{81 - 9}{52} = 1 + \frac{29 - 9}{52}; \quad 1 = \frac{29 - 9}{52} \Rightarrow 29 - 52 = 9$$

- $t = \frac{52u+9}{29} = u + \frac{23u+9}{29}; v = \frac{23u+9}{29} \Rightarrow 23u = 29v - 9$
- $u = \frac{29v-9}{23} = v + \frac{6v-9}{23}; w = \frac{6v-9}{23} \Rightarrow 6v = 23w + 9$
- $v = \frac{23w+9}{6} = 3w + 1 + \frac{5w+3}{6}; y = \frac{5w+3}{6} \Rightarrow 5w = 6y - 3$
- $w = \frac{6y-3}{5} = y + \frac{y-3}{5}; k = \frac{y-3}{5} \Rightarrow y = 5k + 3$

A partir de aquí, estudiamos los sucesivos valores:

- Si $k = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow w = 3 \Rightarrow v = 13 \Rightarrow u = 16 \Rightarrow t = 29 \Rightarrow z = 45 \Rightarrow x = 573$ billetes
- Si $k = 1 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow w = 9 \Rightarrow v = 36 \Rightarrow u = 45 \Rightarrow t = 81 \Rightarrow z = 126 \Rightarrow x = 1597$, que rebasa la cantidad de billetes por lo que esta solución no es válida ni tampoco, lógicamente, cualquier otra que se deduzca para valores de $k \geq 2$

$$\text{Como } z = 45 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{256z+63}{81} = 143 \\ n = \frac{64z+9}{27} = 107 \\ p = \frac{16z}{9} = 80 \\ q = \frac{4z}{3} = 60 \end{cases}$$

Entonces,

Mariano se ha llevado $m + z = 188$ billetes,
Nacho se ha llevado $n + z = 152$ billetes,
Paco se ha llevado $p + z = 125$ billetes,
Quique se ha llevado $q + z = 105$ billetes,
y había $188 + 152 + 125 + 105 + 1 + 1 + 1 = 573$ billetes,
inicialmente, en el sobre

En el teatro Buenavista todos los precios son valores enteros de euros y una butaca de palco cuesta más de un butaca de patio.

Miguel compra dos butacas, una de patio y otra de palco, y observa que, para escribir los dos precios (ambos de dos dígitos) se utilizan cuatro cifras distintas.

Cuando va a pagar, la taquillera le pide una cantidad de 359 euros superior al precio que había calculado mentalmente. Tras una pequeña discusión, la taquillera se disculpa pues ha multiplicado los precios en vez de sumarlos.

¿Cuál es el precio de la butaca de palco?



SOLUCIÓN

Llamamos b y c a los precios respectivos en euros, cantidades enteras, de las butacas de patio y de palco.

Según el enunciado, $c > b$ y, además, $bc = b + c + 359 \Rightarrow bc - c = b + 359 \Rightarrow c \times (b - 1) = b + 359 \Rightarrow$

$$c = \frac{b + 359}{b - 1} = \frac{b - 1 + 360}{b - 1} \Rightarrow c = 1 + \frac{360}{b - 1}$$

Tenemos en cuenta que $c > b$ son valores enteros y que $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Como b y c se escriben con cuatro cifras distintas, filtramos las posibilidades potencialmente válidas:

- $b - 1 = 2^2 \times 3 > \begin{cases} b - 13 \\ c - 31 \end{cases}$. No cumple las condiciones del enunciado
- $b - 1 = 3 \times 5 > \begin{cases} b - 16 \\ c - 25 \end{cases}$
- $b - 1 = 2 \times 3^2 > \begin{cases} b - 19 \\ c - 21 \end{cases}$. No cumple las condiciones del enunciado

Por lo tanto, la butaca de palco cuesta

25 euros

Si $0 \leq x < \pi/2$, simplifica todo lo posible la expresión

$$\arctan(\sqrt{2 \cdot \tan x} - 1) - \arctan(\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1) + \frac{\pi}{2}$$

SOLUCIÓN

Hacemos $\beta = \arctan(\sqrt{2 \cdot \tan x} - 1)$ y $\gamma = \arctan(\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1)$; y sea

$$\alpha = \arctan(\sqrt{2 \cdot \tan x} - 1) - \arctan(\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1) + \frac{\pi}{2} = \beta - \gamma + \frac{\pi}{2} \quad \text{y } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ por construcción al ser}$$

$$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Entonces, } \tan \alpha = \tan\left(\beta - \gamma + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left[\beta + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\right] = \frac{\tan \beta + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}{1 - \tan \beta \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)} = \frac{\tan \beta + \cot \gamma}{1 - \tan \beta \cdot \cot \gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{2 \cdot \tan x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1}}{1 - (\sqrt{2 \cdot \tan x} - 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1}} = \frac{\frac{(\sqrt{2 \cdot \tan x} - 1) \cdot (\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1) + 1}{\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1}}{\frac{(\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1) - (\sqrt{2 \cdot \tan x} - 1)}{\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{(\sqrt{2 \cdot \tan x} - 1) \cdot (\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1) + 1}{(\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1) - (\sqrt{2 \cdot \tan x} - 1)} = \frac{(\sqrt{2 \cdot \tan x})^2 - 1^2 + 1}{\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1 - \sqrt{2 \cdot \tan x} + 1} = \frac{2 \cdot \tan x}{2} = \tan x \Rightarrow$$

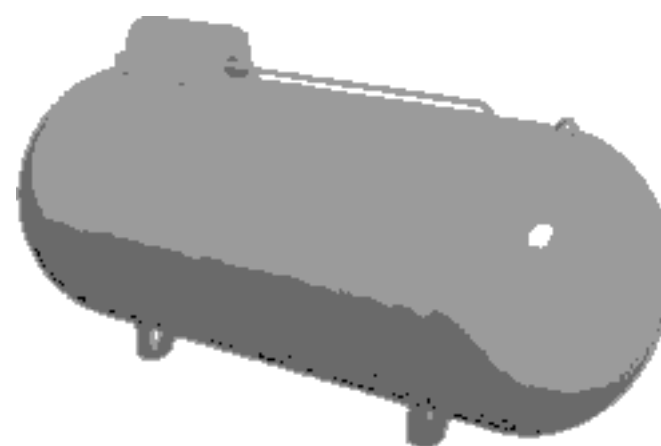
$$\Rightarrow \alpha = \arctan(\sqrt{2 \cdot \tan x} - 1) - \arctan(\sqrt{2 \cdot \tan x} + 1) + \frac{\pi}{2} =$$

X

Rosendo ha instalado un tanque de gas en su chalet. El tanque es un cilindro rematado en ambas bases por sendas semiesferas, como se ve en la figura adjunta, y sus dos dimensiones (longitud total y diámetro) son valores enteros de decímetros.

Rosendo calcula el área y el volumen del tanque, obteniendo $6,48\pi \text{ m}^2$ de superficie y $1,8\pi \text{ m}^3$ de volumen.

¿Cuál es, en decímetros, el diámetro del tanque?



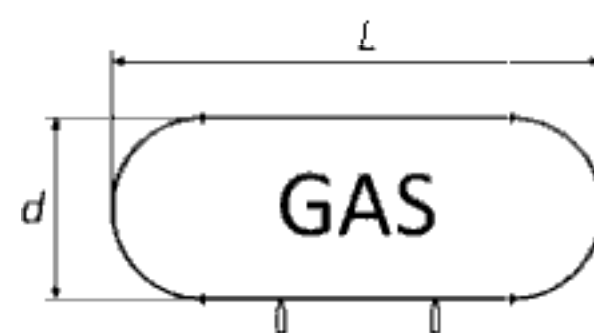
SOLUCIÓN

Llamamos L y d a longitud total y al diámetro de tanque en decímetros.

El radio de las semiesferas es $\frac{d}{2}$ y en conjunto ocupan una esfera. Además,

ese valor es el radio de las bases del cilindro y $L - \frac{d}{2} - \frac{d}{2} = L - d$ es el

valor, en metros, de la generatriz del cilindro. Entonces, el volumen del tanque es $V = \text{vol. cilindro} + \text{vol. esfera}$



$$\Rightarrow V = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot (L - d) + \frac{4\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3}{3} = 1,8\pi \text{ m}^3 = 1800\pi \text{ dm}^3$$

$$\text{y su área es } S = \text{sup. lateral cilindro} + \text{sup. esfera} \Rightarrow S = 2\pi \cdot \frac{d}{2} \cdot (L - d) + 4\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 6,48\pi \text{ m}^2 = 648\pi \text{ dm}^2$$

De lo anterior,

$$\left. \begin{aligned} \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot (L - d) + \frac{4\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3}{3} &= 1800\pi \\ 2\pi \cdot \frac{d}{2} \cdot (L - d) + 4\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 &= 648\pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{d^2}{4} \cdot (L - d) + \frac{d^3}{6} &= 1800 \\ d \cdot (L - d) + d^2 &= 648 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} d^2 \cdot (L - d) + \frac{2d^3}{3} &= 7200 \\ d^2 \cdot (L - d) + d^2 &= 648d \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^3 - \frac{2d^3}{3} - 648d + 7200 = 0 \Rightarrow d^3 - 1944d + 21600 = 0$$

Como d es un valor entero, calculamos por Ruffini usando un divisor de 21600 :

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1944 & 21600 \\ 12 & & 12 & 144 & -21600 \\ \hline & 1 & 12 & -1800 & 0 \end{array}$$

(el valor puede elegirse, para probar, entre los que su cuadrado termina en 44, dada la estructura de la operación)

$$\text{Por lo tanto, } d^3 - 1944d + 21600 = (d - 12) \times (d^2 + 12d - 1800)$$

$$\text{De lo anterior, } d^2 + 12d - 1800 = 0 \Rightarrow d = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 + 4 \times 1800}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{7344}}{2}, \text{ que no da valores enteros.}$$

En resumen, el único valor posible del diámetro es $d =$

12 decímetros

Obtén una solución de la ecuación

$$x^{\sqrt{3}} = (\sqrt{3})^x$$

distinta de $x = \sqrt{3}$

SOLUCIÓN

Dada la ecuación $x^{\sqrt{3}} = (\sqrt{3})^x$ hacemos $x = \sqrt{3} \cdot a \Rightarrow (\sqrt{3} \cdot a)^{\sqrt{3}} = (\sqrt{3})^{\sqrt{3} \cdot a} \Rightarrow (\sqrt{3} \cdot a)^{\sqrt{3}} = ((\sqrt{3})^a)^{\sqrt{3}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sqrt{3} \cdot a = (\sqrt{3})^a \Rightarrow a = (\sqrt{3})^{a-1} \Rightarrow \sqrt{3} = a^{\frac{1}{a-1}} \Rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{a-1}}$

De la expresión anterior se desprende inmediatamente que un valor admisible es $a = 3 \Rightarrow$

$$\mathbf{x = 3 \cdot \sqrt{3}}$$

Anselmo y Catalina se casaron y tanto uno como otro aportaron niños al matrimonio. Después de unos años también tuvieron hijos en común.

Un día celebraron el aniversario de boda con todos sus diez hijos, de los que seis eran de Anselmo y siete de Catalina.

¿Cuántos hijos tuvieron en común?



SOLUCIÓN

Si sumamos los hijos de Anselmo y Catalina $6 + 7 = 13$, en esta suma los hijos de ambos están contados dos veces por lo que, en común, han tenido $13 - 10 =$

3 hijos

y $6 - 3 = 3$ son de Anselmo pero no de Catalina y $7 - 3 = 4$ son de Catalina pero no de Anselmo.

Halla el término general de la sucesión

4, 7, 15, 35, 83, 195, ...

SOLUCIÓN

Intentamos descubrir un número que, sumado a otros con una cantidad significativa de divisores, permita obtener los términos sucesivos de la sucesión.

Probando llegamos a que

$$a_1 = 4 = 1 + 3$$

$$a_2 = 7 = 4 + 3 = 2^2 + 3$$

$$a_3 = 15 = 12 + 3 = 3 \times 2^2 + 3$$

$$a_4 = 35 = 32 + 3 = 2^5 + 3$$

$$a_5 = 83 = 80 + 3 = 5 \times 2^4 + 3$$

$$a_6 = 195 = 192 + 3 = 3 \times 2^6 + 3$$

y una sencilla inspección, intentando situar el valor del subíndice del término en el desarrollo de la respectiva operación, nos lleva a

$$a_1 = 4 = 1 + 3 = 1 \times 2^0 + 3$$

$$a_2 = 7 = 4 + 3 = 2^2 + 3 = 2 \times 2^1 + 3$$

$$a_3 = 15 = 12 + 3 = 3 \times 2^2 + 3$$

$$a_4 = 35 = 32 + 3 = 2^5 + 3 = 4 \times 2^3 + 3$$

$$a_5 = 83 = 80 + 3 = 5 \times 2^4 + 3$$

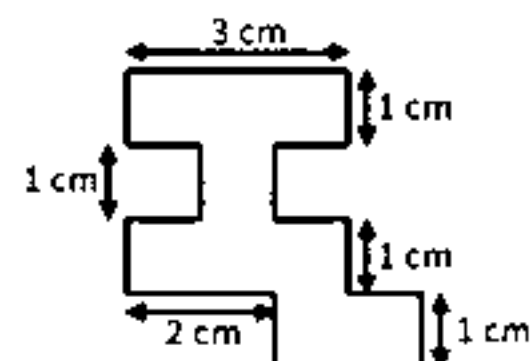
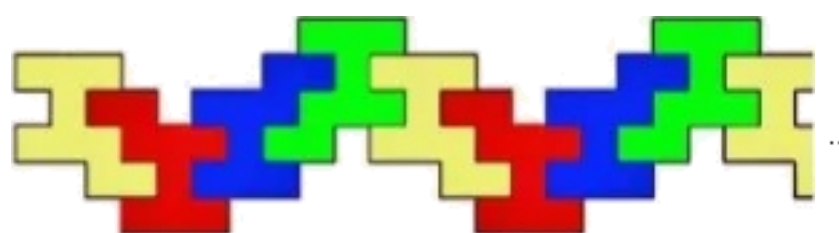
$$a_6 = 195 = 192 + 3 = 3 \times 2^6 + 3 = 6 \times 2^5 + 3$$

luego

$$\mathbf{a_n = n \times 2^{n-1} + 3}$$

Aurelio ha recortado cuarenta piezas de cartón idénticas a la figura adjunta.

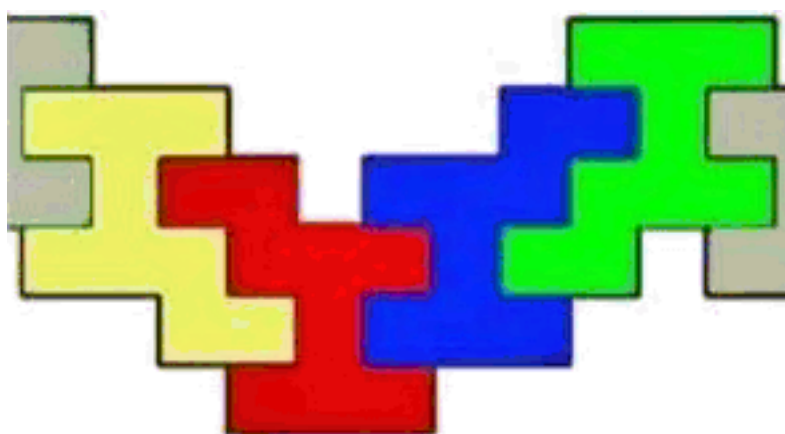
Más tarde las ha ido pintando y uniendo, formando una cenefa regular como se ve a continuación, en donde se muestra el inicio de la cenefa:



Cuando añada la última pieza, ¿cuál será la longitud del perímetro de la cenefa?

SOLUCIÓN

La cenefa está formada por diez elementos básicos que se repiten, formados por cuatro piezas, una de cada color, encajadas:



Observamos que los ocho interiores tiene de perímetro en su parte superior

$$2(am) + 1(am) + 1(rj) + 1(rj) + 1(rj) + 1(az) + 2(az) + 1(az) + 1(vd) + 3(vd) + 1(vd) = 15 \text{ cm}$$

Y, en su parte inferior,

$$1(am) + 2(am) + 1(am) + 1(am) + 1(rj) + 3(rj) + 1(rj) + 2(az) + 1(az) + 1(vd) + 1(vd) + 1(vd) = 16 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el perímetro de cada uno los ocho interiores tiene un total de $15 + 16 = 31 \text{ cm}$

El primer elemento tiene la primera pieza descubierta, por lo que al perímetro indicado deberíamos añadirle esa parte. Su perímetro es, entonces,

$$31 + 1(am) + 1(am) + 1(am) + 1(am) + 1(am) + 1(am) + 2(am) + 1(am) + 1(am) = 41 \text{ cm}$$

De igual manera, el primer elemento tiene la última pieza descubierta, por lo que al perímetro indicado deberíamos añadirle esa parte. Su perímetro es, entonces,

$$31 + 1(vd) + 1(vd) + 1(vd) + 1(vd) + 1(vd) = 36 \text{ cm}$$

Concluyendo, el perímetro total de la cenefa es $41 + 31 \times 8 + 36 =$

325 centímetros

Halla las raíces reales de la ecuación

$$6x^4 - 31x^3 + 60x^2 - 51x + 14 = 0$$

sabiendo que el producto de dos de ellas es 1

SOLUCIÓN

$$6x^4 - 31x^3 + 60x^2 - 51x + 14 = 0 \Leftrightarrow x^4 - \frac{31}{6}x^3 + 10x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{7}{3} = 0$$

Como tiene dos soluciones cuyo producto es la unidad, uno de los factores en los que se descomponga el polinomio puede ser $x^2 + ax + 1 = 0$ (el producto de ambas raíces es igual al término independiente) y otro

$$x^2 + bx + c = 0 \text{ luego } x^4 - \frac{31}{6}x^3 + 10x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{7}{3} = (x^2 + ax + 1) \times (x^2 + bx + c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - \frac{31}{6}x^3 + 10x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{7}{3} = x^4 + (a+b)x^3 + (ab+c+1)x^2 + (ac+b)x + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = -\frac{31}{6} \\ ab+c+1 = 10 \\ ac+b = -\frac{17}{2} \\ c = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -\frac{31}{6} \\ ab + \frac{7}{3} + 1 = 10 \\ \frac{7}{3}a + b = -\frac{17}{2} \\ c = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -\frac{31}{6} \\ ab = \frac{20}{3} \\ \frac{7}{3}a + b = -\frac{17}{2} \\ c = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -\frac{31}{6} \\ b = \frac{20}{3a} \\ a = -\frac{5}{2} \\ c = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{5}{2} - \frac{8}{3} = -\frac{31}{6} \\ b = -\frac{8}{3} \\ a = -\frac{5}{2} \\ c = \frac{7}{3} \end{cases}$$

por lo que la descomposición es $x^4 - \frac{31}{6}x^3 + 10x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{7}{3} = \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) \times \left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}\right)$

$$\text{Calculamos las raíces: } \begin{cases} x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \\ x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ 3x^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times 2}}{4} \\ x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 3 \times 7}}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm 3}{4} \\ x = \frac{8 \pm \sqrt{-20}}{6} \end{cases}$$

De lo anterior, $x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0$ tiene de raíces $x = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow x = 2; x = \frac{1}{2}$ y $x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3} = 0$ no posee raíces reales.

Las raíces reales de la ecuación original son

$$\mathbf{x = 2; x = 1/2}$$

Hoy celebramos el cumpleaños de Marta: 12 años. También es el aniversario de su madre, que tiene menos de 50 años, y el de su abuela.

Para la ocasión su padre ha comprado un juego de diez velas que representan los diez dígitos del 0 al 9.

En el pastel de Marta se han puesto dos velas con los dígitos 1 y 2 para formar el número 12.

En el pastel de su madre también se han colocado dos velas con propósito similar e, igualmente, en el de la abuela.

La abuela, muy observadora, dice: el próximo año y el siguiente aún puede aprovecharse el mismo juego de velas y todas ellas se habrán usado, al menos, una vez, pero dentro de tres años será necesario comprar un segundo juego de velas.

¿Cuál es la edad actual de la abuela?



SOLUCIÓN

Este año las edades de Marta, madre y abuela serán $12, \overline{ab}, \overline{cd}$ con a, b, c, d cifras distintas entre sí y distintas, a su vez, de 1 y 2. Y las seis cifras deben ser distintas en los dos años siguientes.

Según el enunciado, como $\overline{ab} < 50 \Rightarrow a = 3 \text{ o } a = 4$

Como el año siguiente Marta tendrá 13, la única posibilidad de $a = 3$ es que la edad actual de la madre sea de 39 años pero, así, dentro de dos años Marta tendría 14 años y su madre tendría 41 años y deberían comprar un segundo juego de velas al haber dos cifras 1 y dos cifras 4

En conclusión debe ser $a = 4$ y en ningún caso podrán estar, entre los dígitos de las edades de madre y abuela, los dígitos 1 y 2. El dígito 0, por tanto, sólo puede aparecer en una edad del último año con el mismo juego de velas.

Este la madre debe tener 48 años. Menos años supondrían que cuando Marta tuviera 14 años su madre estaría aún en la cuarentena, y si tuviera ahora 49 años, al cabo de dos años tendría 51 y se necesitarían dos dígitos 1

De esta manera,

- ahora Marta tiene 12 años y su madre 48 años.
- el año que viene Marta tendrá 13 años y su madre 49 años.
- dentro de dos años Marta tendrá 14 años y su madre 50 años.

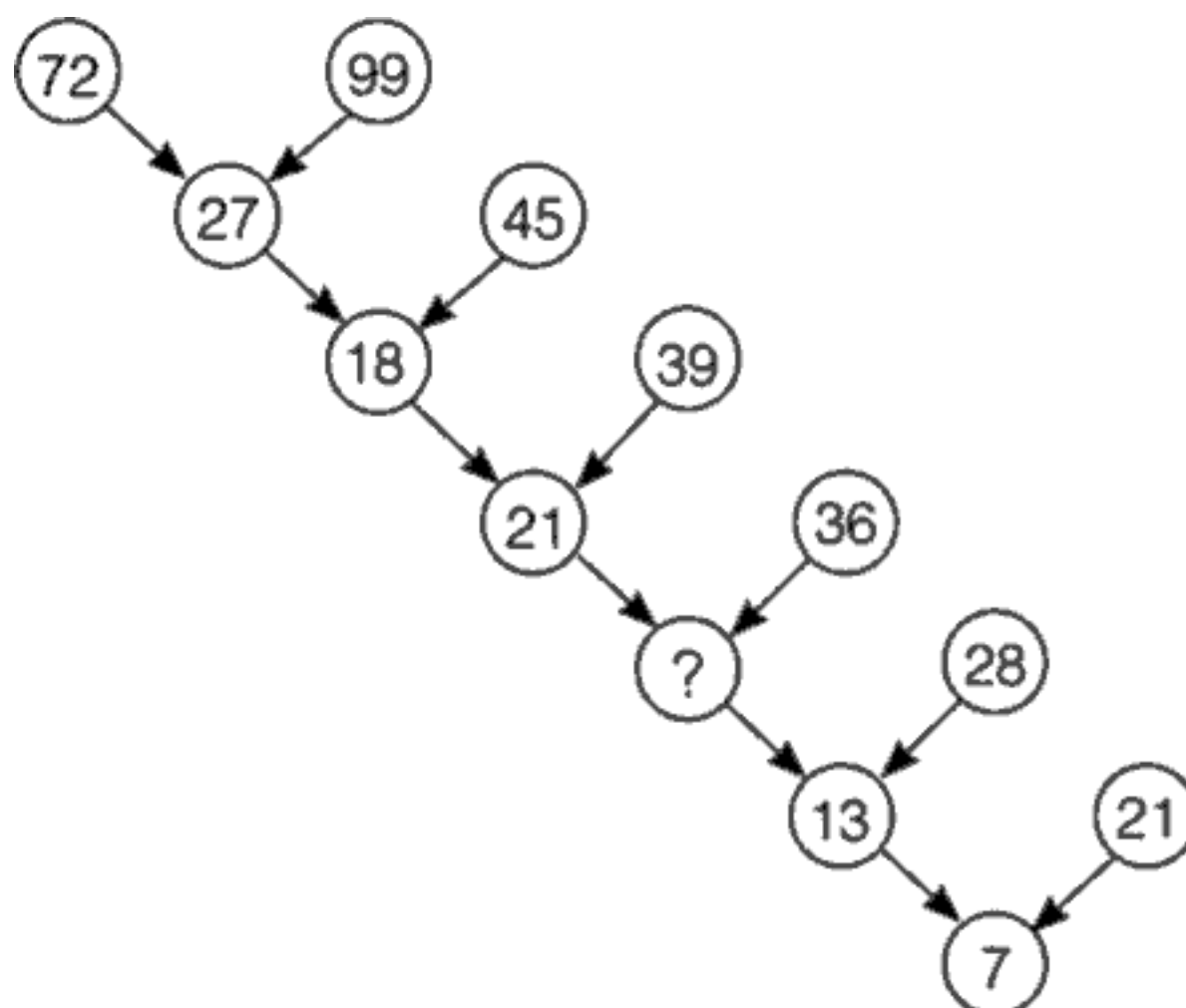
Con las cifras que quedan libres cada año, y sabiendo que hasta el tercer año no repiten cifras, las edades de la abuela no pueden ser ni ochenta y tantos ni noventa y tantos vistos los dígitos que se usan. Y setenta y tantos tampoco porque llegaría que debería tener 77 en dos años, en el mejor de los casos.

La única posibilidad es que las edades de la abuela fuesen 67, 68, 69 años para, en el tercer año, tener cada una las edades respectivas 15, 51 y 70 y tener, lógicamente, que comprar un segundo juego de velas.

Por tanto, la abuela tiene

67 años

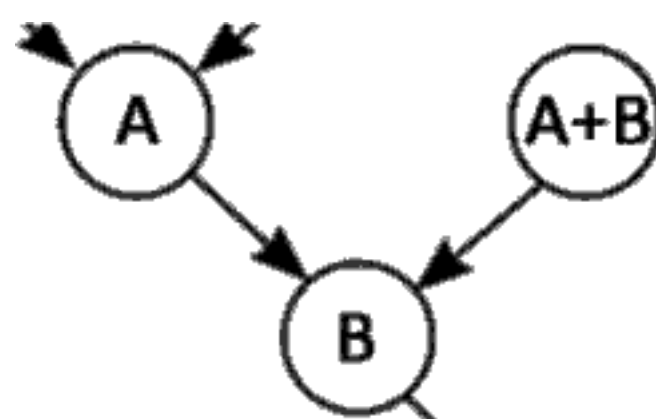
Los números, dispuestos en la estructura que sigue a continuación, se organizan según un determinado patrón.



Calcula el número que falta.

SOLUCIÓN

Toda la estructura sigue el patrón



excepto el último trío, para el que el valor debería ser $B = 8$ en vez de 7 , pues $13 + 8 = 21$

Pero también hay otro patrón que cumplen esas ternas: la suma de los cuatro dígitos de los números de los círculos alineados es igual al valor del número del círculo inmediato central inferior.

$$7 + 2 + 9 + 9 = 27$$

$$2 + 7 + 4 + 5 = 18$$

$$1 + 8 + 3 + 9 = 21$$

$$2 + 1 + 3 + 6 = ? \Rightarrow ? = 12$$

$$1 + 2 + 2 + 8 = 13$$

$$1 + 3 + 2 + 1 = 7$$

Por lo tanto, el número que falta es el

12

Dos números naturales consecutivos son tales que la suma de las cifras de ambos son múltiplos de 7. ¿Cuál es la menor cantidad de cifras que posee el más pequeño de los dos?

1234560
3260541
5041632

SOLUCIÓN

Si fueran números del tipo $\overbrace{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}^{n \text{ cifras}}, \overbrace{a_1 a_2 \dots a_{n-1} (a_n + 1)}^{n+1 \text{ cifras}}$ deberían verificar que $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \dot{7}$ y $a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n + 1 = \dot{7} \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n + 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) = 1 = \dot{7}$, lo cual es falso. Lo mismo ocurre si el incremento se produce en cualquier cifra intermedia, por lo que el análisis debe hacerse para los números $\overbrace{a 999 \dots 9}^{n \text{ cifras}} \text{ y } \overbrace{(a+1) 000 \dots 0}^{n+1 \text{ cifras}}$, ambos de $n+1$ cifras.

En el primer número $a + 9n = \dot{7}$, y en el segundo $a + 1 = \dot{7} \Rightarrow a = 6$, por lo que estamos hablando de los números $\overbrace{6 999 \dots 9}^{n \text{ cifras}} \text{ y } \overbrace{7 000 \dots 0}^{n+1 \text{ cifras}}$,

De lo anterior, $6 + 9n = \dot{7} = 7k \Rightarrow k = \frac{9n+6}{7}$ valor natural y n también natural.

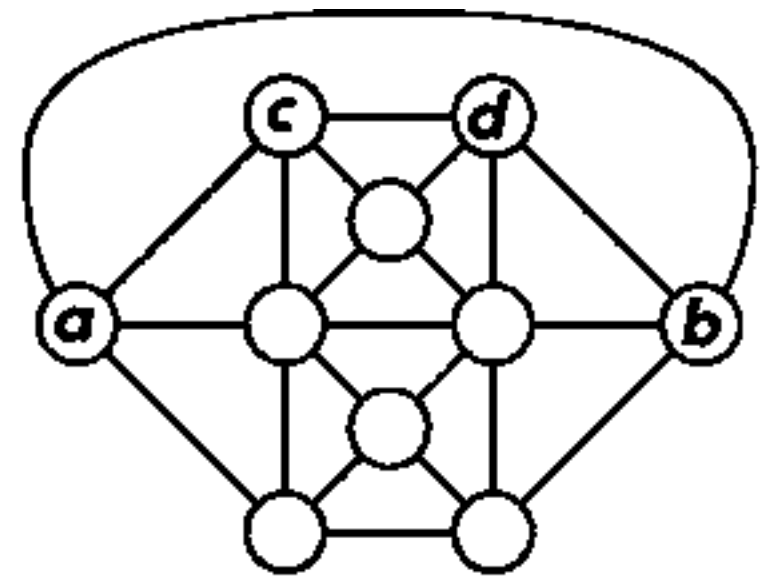
El valor mínimo de n para el que se cumple la igualdad es para $n = 4 \Rightarrow k = \frac{9 \times 4 + 6}{7} = 6$ por lo que los números más pequeños de los que cumplen las condiciones del problema son 69999 y 70000.

Ambos, y el más pequeño en particular, tienen

5 cifras

Rellena los círculos de esta cesta con los números de 0 a 9 teniendo en cuenta que

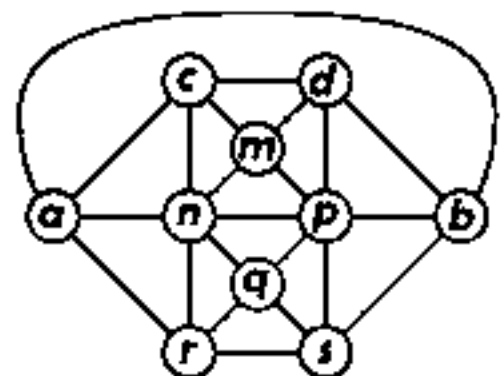
- $a > b$
- $c + d = 10$
- dos círculos unidos directamente por una línea deben contener sendos números cuya diferencia sea, al menos, igual a 3.



SOLUCIÓN

Nombramos los números restantes con las letras indicadas en la imagen adjunta.

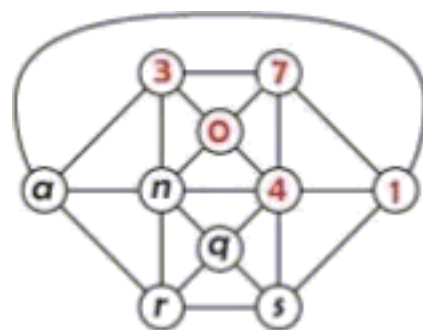
Si $c + d = 10$ y los números son distintos, c, d son distintos de 4, 6 porque $|c - d| \geq 3$



a) Suponemos que c, d son 3, 7

Deberá ser $m = 0$ para que $|c - m| \geq 3$ y $|d - m| \geq 3$. De

ahí, n, p serían mayores de 3 y no queda más remedio de que uno de ellos sea 4: el unido a 7 mediante una línea; y uno de a, b será 1: precisamente el unido, mediante sendas líneas, a 4 y a 7



Como $a > b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow d = 7, c = 3$ y $p = 4$. Por los dos últimos valores necesariamente $r = 2$ o $r = 5$, y es la única posición posible para ambos por lo que la posibilidad original es falsa.

b) Suponemos que c, d son 2, 8

Deberá ser $m = 5$ para que $|c - m| \geq 3$ y $|d - m| \geq 3$. De ahí, uno de n, p deberá ser 9: el unido a 2, y el otro deberá ser 0 o 1: el unido a 8

El tercer vértice del triángulo lateral con 2 y 9 debe ser 6, por lo que $a = 6$

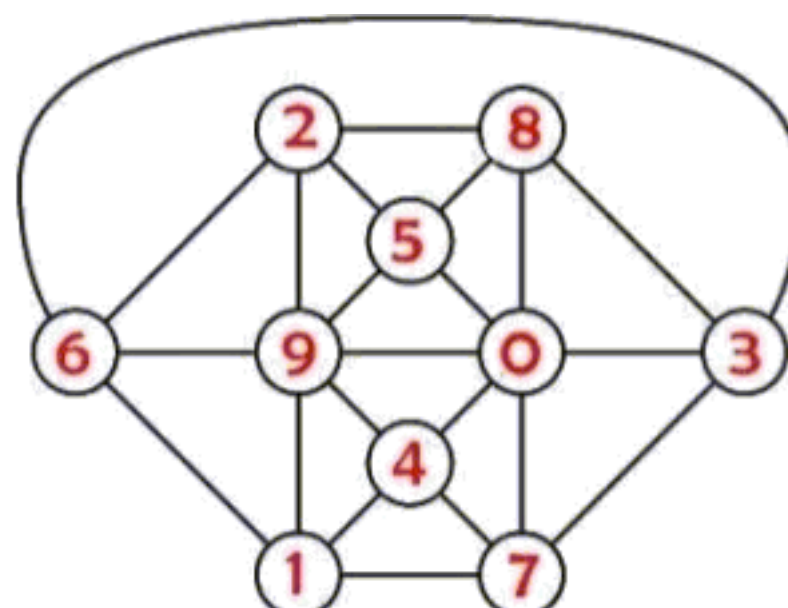
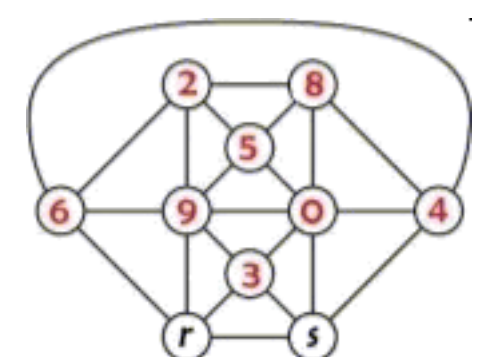
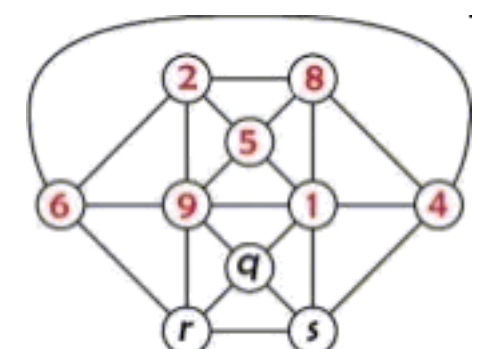
porque es imposible que b sea 7 al estar unido a 8 y $a > b$. Por lo tanto, $c = 2, d = 8, n = 9$

Si $p = 1 \Rightarrow b = 4$ y q no puede tomar ningún valor admisible

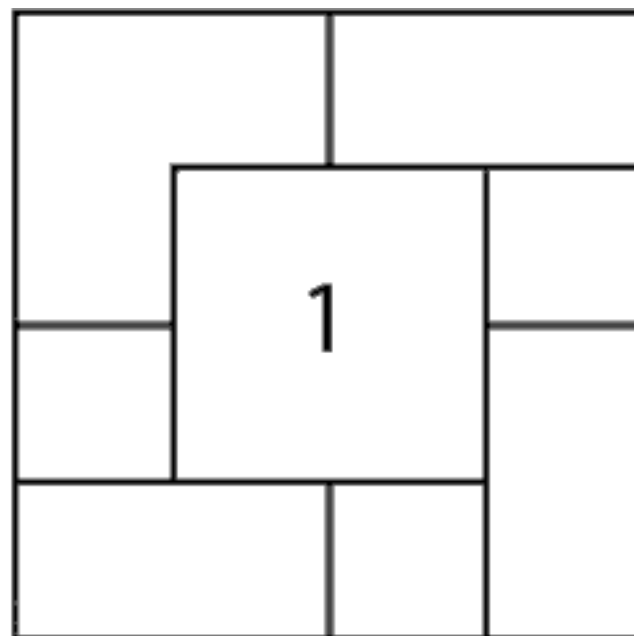
Si $p = 0 \Rightarrow b = 3$ o $b = 4$. Si fuera $b = 4$ debería ser $q = 3$ y el valor 1 no podría colocarse.

Si $p = 0$ y $b = 3 \Rightarrow q = 4$ y, por fin, $r = 1$ y $s = 7$, resolviendo el problema.

Una solución es



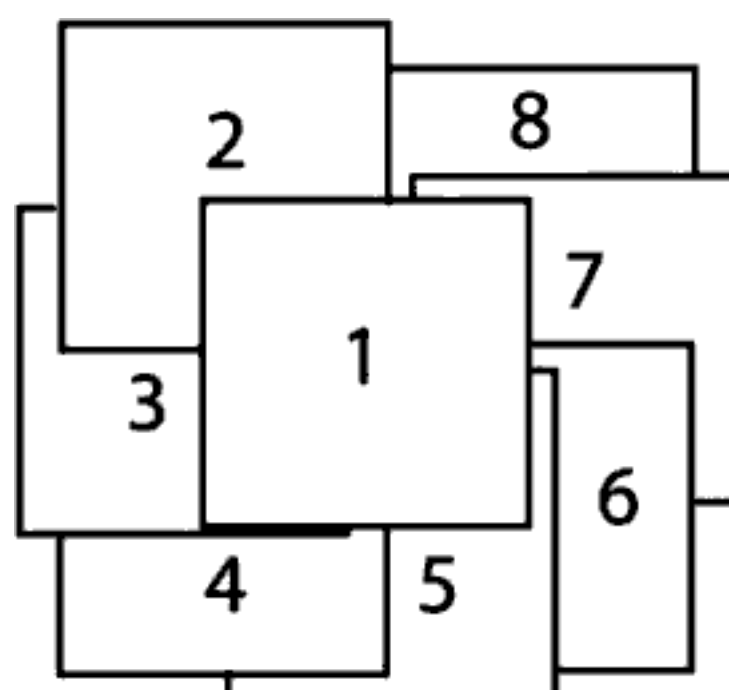
Ocho hojas de papel de las mismas dimensiones se colocan de una mesa. Sus bordes forman el siguiente esquema, con la única hoja totalmente visible marcada con el número 1.



Numera las hojas de arriba hacia abajo donde la 1 es la hoja superior, 2 la segunda capa, 3 es la tercera capa y, así, sucesivamente.

SOLUCIÓN

Abriendo un poco las hojas, para mayor claridad, el orden es este:



Halla una solución de la ecuación

$$p^3 - q^3 = pq^3 - 1$$

siendo p y q números primos.

SOLUCIÓN

$p^3 - q^3 = pq^3 - 1 \Rightarrow p^3 + 1 = pq^3 + q^3 \Rightarrow (p+1) \times (p^2 - p + 1) = q^3 \times (p+1) \stackrel{p+1 \neq 0}{\Rightarrow} p^2 - p + 1 = q^3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow p^2 - p = q^3 - 1 \Rightarrow p \times (p-1) = (q-1) \times (q^2 + q + 1)$ y, evidentemente, $q < p$ según la cuarta igualdad de la secuencia anterior.

Como p es primo, deberá dividir a uno de los dos factores y se sabe que $q < p \Rightarrow p \nmid q^2 + q + 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ni q^2 + q + 1 = kp$

Por consiguiente, $p-1 = k \times (q-1) \Rightarrow p = kq - k + 1$ y $k > 1$

De las dos últimas expresiones se sigue que $q^2 + q + 1 = k \times (kq - k + 1) \Rightarrow q^2 + q + 1 = k^2q - k^2 + k \Rightarrow$
 $\Rightarrow q^2 + (1 - k^2) \times q + k^2 - k + 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{k^2 - 1 \pm \sqrt{(1 - k^2)^2 - 4 \times (k^2 - k + 1)}}{2}$ y, como q es un número

natural, el discriminante $(1 - k^2)^2 - 4 \times (k^2 - k + 1) = k^4 - 6k^2 + 4k - 3$ debe ser un cuadrado perfecto.

- Para $k = 2$, $q = \frac{k^2 - 1 \pm \sqrt{k^4 - 6k^2 + 4k - 3}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{N}$
- Para $k = 3$, $q = \frac{k^2 - 1 \pm \sqrt{k^4 - 6k^2 + 4k - 3}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \Rightarrow q = 7$, primo (desechando el otro valor)

Entonces, $p = kq - k + 1 = 3 \times 7 - 3 + 1 \Rightarrow p = 19$, primo

La solución encontrada es

$$\mathbf{p = 19, q = 7}$$

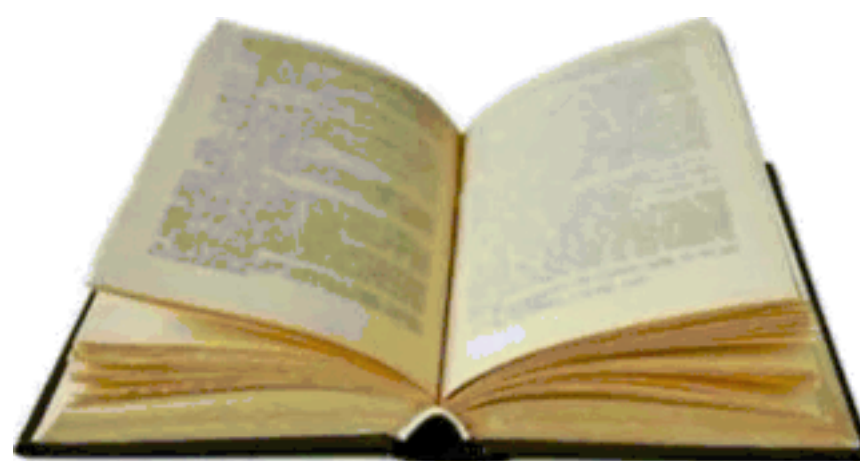
y se puede demostrar que la solución es única porque para $\forall k > 3$ se cumple que

$$(k^2 - 3)^2 < k^4 - 6k^2 + 4k - 3 < (k^2 - 2)^2$$

Carmen y Aitana han abierto sus libros de lectura al azar y cada una de ellas multiplica los dos números de página de su libro, que tiene a la vista.

Restando los valores obtenidos por cada una el resultado es, exactamente, 2000.

¿Cuál es el mayor número de página de entre los cuatro vistos en los dos libros abiertos?



SOLUCIÓN

Tengamos siempre en cuenta que las páginas situadas a la izquierda siempre tienen numeración par, y las situadas a la izquierda, numeración impar.

Llamamos a y $a+1$ a los números de página del libro abierto de Carmen y b y $b+1$ a los respectivos correspondientes a Aitana, siendo a, b números pares y suponiendo que $a > b$

Según el enunciado, $a \times (a+1) - b \times (b+1) = 2000 \Rightarrow a^2 + a - b^2 - b = 2000 \Rightarrow a^2 - b^2 + a - b = 2000 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (a-b) \times (a+b) + a - b = 2000 \Rightarrow (a-b) \times (a+b+1) = 2000 = 2^4 \times 5^3$

Como a, b son números pares, $a-b$ es un divisor par y $a+b+1$ un divisor impar. Además, es evidente que

$$a+b+1 > a-b \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+b+1 = 5^3 = 125 \\ a-b = 2^4 = 16 \end{array} \right\} \xrightarrow{1^\circ \rightarrow 1^\circ - 2^\circ} \left. \begin{array}{l} 2b+1 = 109 \\ a-b = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 54 \\ a = 70 \end{array} \right\}$$

En resumen, las páginas de Carmen son 70 y 71 y las de Aitana, 54 y 55

El número de página a la vista más alto es

71

Si

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

calcula $x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20}$

SOLUCIÓN

$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x \Rightarrow x^3 + x = x^2$. Sustituyendo esta expresión en la anterior tenemos que $x^3 + x + 1 = x$ por lo que $x^3 + x + 1 = x \Rightarrow x^3 = -1$. La expresión no tiene solución real, aunque sí compleja.

Se pide la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $x \neq 1$ cuyo primer término es x^{10} y el

último x^{20} : $x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} = \frac{x^{20} \times x - x^{10}}{x - 1} = \frac{x^{21} - x^{10}}{x - 1}$

Como $x^3 = (x^3)^3 = (-1)^3 = -1 \Rightarrow x^{10} = x^9 \times x = (-1) \times x = -x$ y, además, $x^{21} = (x^3)^7 = (-1)^7 = -1$ se sigue que

$$x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} = \frac{x^{20} \times x - x^{10}}{x - 1} = \frac{x^{21} - x^{10}}{x - 1} = \frac{-1 - (-x)}{1 - x} = \frac{x - 1}{x - 1} =$$

1

Andrés ha recibido una herencia de su tío extremeño, fallecido recientemente.

Se trata de una parcela cuadrangular cuyos de lados, en metros, tienen una longitud de 150, 74, 175 y 51, y el notario le indica que los lados más largos son paralelos.



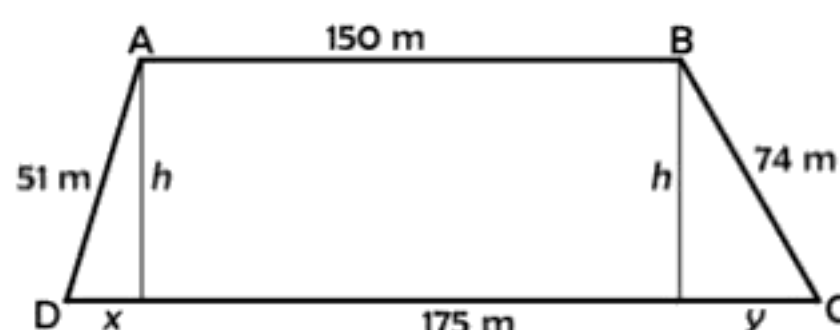
Si el precio actual de metro cuadrado de terreno, en esa zona, es de 5 euros, ¿qué valor tiene la parcela?

SOLUCIÓN

El terreno es un trapecio. Lo dibujamos y marcamos los datos y valores a calcular que con necesarios para obtener su superficie.

Aplicamos el teorema de Pitágoras a los dos triángulos y tenemos

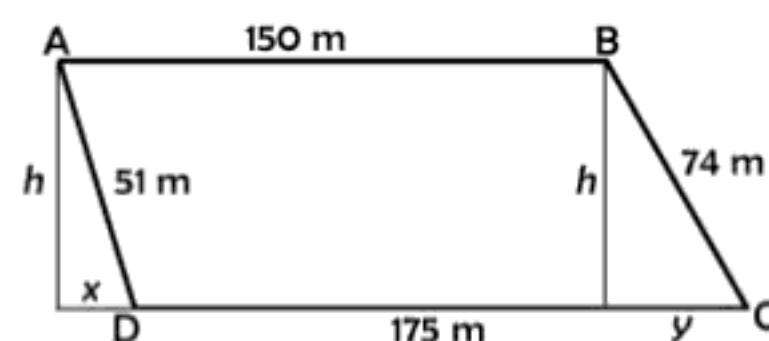
$$\text{que } \begin{cases} h^2 + y^2 = 74^2 \\ h^2 + x^2 = 51^2 \end{cases} \xrightarrow{1^\circ - 2^\circ} y^2 - x^2 = 74^2 - 51^2 = 2875$$



$$\text{Como } y + x = 175 - 150 = 25 \Rightarrow y^2 - x^2 = (y + x) \times (y - x) = 25 \times (y - x) = 2875 \Rightarrow y - x = \frac{2875}{25} = 115$$

$$\begin{cases} y + x = 25 \\ y - x = 115 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -45 \\ y = 70 \end{cases} \text{ lo que indica que el terreno es, realmente,}$$

como se ve en la imagen adjunta y, por supuesto, $x = 45$ aunque en la dirección contraria a la prevista inicialmente,



Hallamos la altura del trapecio:

$$h^2 + x^2 = 51^2 \Rightarrow h^2 = 51^2 - 45^2 = 576 \Rightarrow h = \sqrt{576} = 24 \text{ m}$$

$$\text{A partir de aquí, la superficie del terreno es igual a la superficie del trapecio: } \frac{(175 + 150) \times h}{2} =$$

$$= \frac{(175 + 150) \times 24}{2} = \frac{325 \times 24}{2} = 3900 \text{ m}^2$$

$$\text{A } 5 \text{ €/m}^2, \text{ el valor de la parcela es } 3900 \times 5 =$$

19500 €

Halla

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x-1)^{x-1} \times (x+1)^{x+1}}{x^{2x}} \right]^x$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} \left[\frac{(x-1)^{x-1} \times (x+1)^{x+1}}{x^{2x}} \right]^x &= \left[\frac{(x-1)^x \times (x+1)^x}{x^{2x}} \times \frac{x+1}{x-1} \right]^x = \left[\frac{(x^2-1)^x}{x^{2x}} \right]^x \times \left(\frac{x-1+2}{x-1} \right)^x = \\ &= \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)^{x^2} \times \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x = \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} \times \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right)^{\frac{x-1}{2} \times 2+1} = \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} \times \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]^2 \times \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right), \end{aligned}$$

siendo $x > 1$

$$\begin{aligned} \text{Entonces, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x-1)^{x-1} \times (x+1)^{x+1}}{x^{2x}} \right]^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} \times \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]^2 \times \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]^2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-1}{2}} \right) = e^{-1} \times e^2 \times 1 = \end{aligned}$$

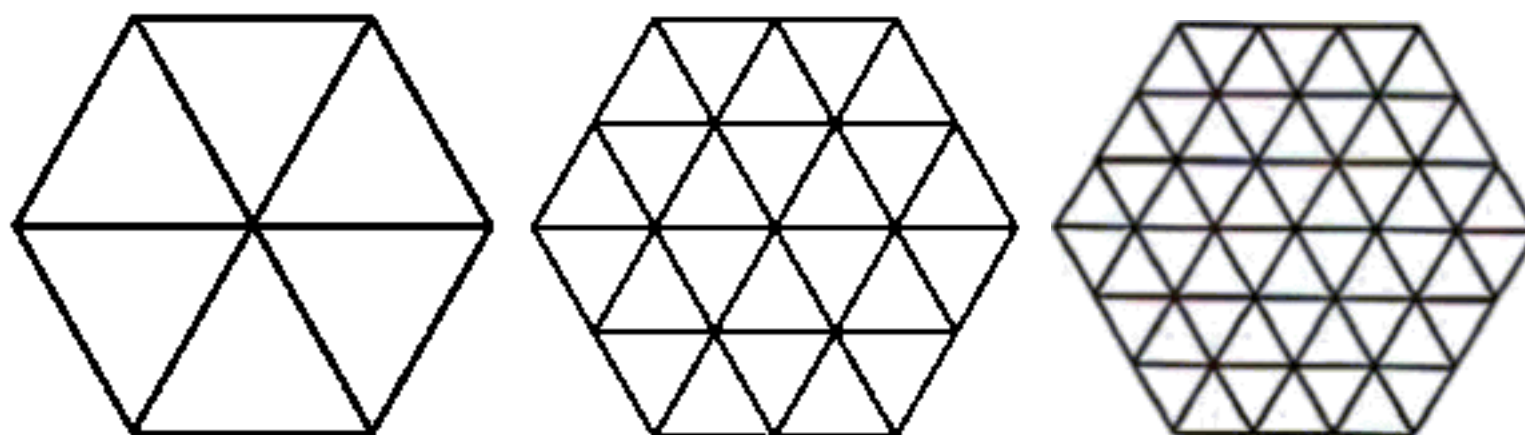
e

El alcalde ha ordenado pavimentar la plaza del Ayuntamiento, que tiene forma de hexágono regular, con baldosas en forma de triángulos equiláteros de 0,5 m de lado y de distintos colores.

Si para ello se han utilizado entre 1900 y 1992 baldosas, ¿cuál es el perímetro de la plaza?



SOLUCIÓN



Observando la imagen vemos que, hablando siempre de polígonos regulares,

- Hexágono con un triángulo de lado posee 2×3 triángulos
- Hexágono con dos triángulos de lado posee $2 \times (5 + 7)$ triángulos
- Hexágono con tres triángulos de lado posee $2 \times (7 + 9 + 11)$ triángulos

Generalizando, un hexágono con n triángulos de lado deberá poseer $2 \times (2n + 1 + 2n + 3 + \dots + 2n + 2n - 1)$ triángulos. Es decir $2 \times (2n + 1 + 2n + 3 + \dots + 2n + 2n - 1) = 2 \times \frac{(2n + 1 + 2n + 2n - 1) \times n}{2} = 6n^2$ triángulos equiláteros, usando la fórmula de la suma de los términos de una progresión aritmética.

Hacemos $6n^2 \leq 1992 \Rightarrow n^2 \leq \frac{1992}{6} \Rightarrow n^2 \leq 332 \Rightarrow n \leq 18$ y $6n^2 \geq 1900 \Rightarrow n^2 \geq \frac{1900}{6} \Rightarrow n^2 \geq 316,67 \Rightarrow n > 17$ por lo que debe ser $n = 18$

La plaza hexagonal tiene 18 triángulos de lado midiendo, cada lado de los triángulos, 0,5 metros.

El perímetro de la plaza es $6 \times 18 \times 0,5 =$

54 metros

Un ciclista sabe que si va a 10 Km/h llega a casa a las 13 horas, pero si va a 15 km/h llegará a las 11 horas.

¿A qué velocidad tendrá que ir para llegar a casa a las 12 horas?



SOLUCIÓN

Llamamos x a los kilómetros que debe recorrer y t al tiempo en horas que tardará si viaja a 15 km/h

$$\text{Según esa nomenclatura y el enunciado, } \left. \begin{array}{l} \frac{x}{t} = 15 \\ \frac{x}{t+2} = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 15t \\ x = 10t + 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 15t \\ 15t = 10t + 20 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 15t \\ 5t = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 15 \times 4 = 60 \\ t = \frac{20}{5} = 4 \end{array} \right\}$$

Es decir, a 15 km/h hace 60 km en 4 horas.

Para tardar una hora más debe ir a $\frac{60}{4+1} = \frac{60}{5} =$

12 km/h

Encuentra dos cifras x e y , diferentes entre sí, tales que el número $yxyxyx$ sea múltiplo de xxx , de yyy y de xy . Además, yx no es múltiplo de y .



SOLUCIÓN

Según el enunciado, $\begin{cases} \overline{yxyxyx} = m \times \overline{xxx} \\ \overline{yxyxyx} = n \times \overline{yyy} \\ \overline{yxyxyx} = p \times \overline{xy} \end{cases}$, siendo m, n, p valores naturales.

De lo anterior, usando la segunda igualdad, $\overline{yxyxyx} = n \times \overline{yyy} \Rightarrow 10101 \times \overline{yx} = n \times 111 \overline{y} \Rightarrow 91 \times \overline{yx} = n \overline{y}$

Como y no divide a $\overline{yx} \Rightarrow y$ divide a $91 = 7 \times 13 \Rightarrow y = 7$, por ser una cifra.

Además, con la primera igualdad, $\overline{yxyxyx} = m \times \overline{xxx} \Rightarrow 101010 \overline{y} + 10101 \overline{x} = 111 m \overline{x} \Rightarrow 6370 + 91 \overline{x} = m \overline{x} \Rightarrow$,

$\Rightarrow m = \frac{6370}{x} + 91$, número natural

En conclusión, x divide a $6370 = 2 \times 5 \times 7^2 \times 13$. Como es una cifra y distinta de 7, caben dos posibilidades:

- $x = 2$; por la tercera igualdad inicial debe ser 727272 múltiplo de 27 : $727272 = 26936 \times 27$
- $x = 5$; por la tercera igualdad inicial debe ser 757575 múltiplo de 57 : no lo es

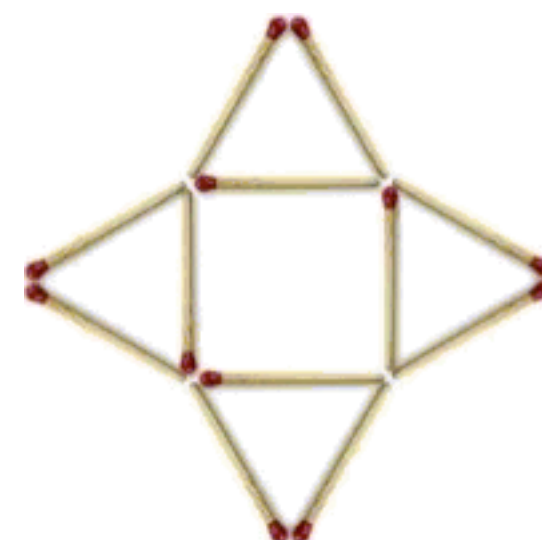
Resumiendo, las cifras son

$$\mathbf{x = 2; y = 7}$$

A un cuadrado se le añaden, adosados a cada lado, triángulos equiláteros de lado igual al del cuadrado formando una estrella de cuatro puntas.

Posteriormente se unen los cuatro vértices de la estrella formando otro cuadrado.

¿Cuál es la proporción entre las áreas de la estrella y de este último cuadrado?



SOLUCIÓN

Llamamos a al lado del cuadrado original, también lado de cada uno de los triángulos equiláteros; h es la altura de cada triángulo y b es el lado del cuadrado grande.

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que se obtiene dividiendo un triángulo equilátero en dos, tenemos que $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

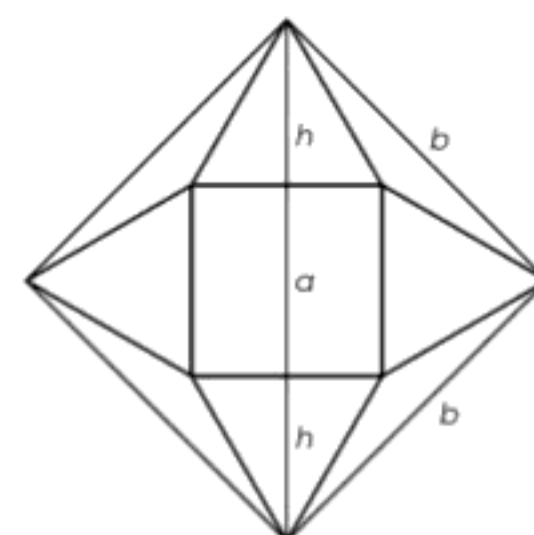
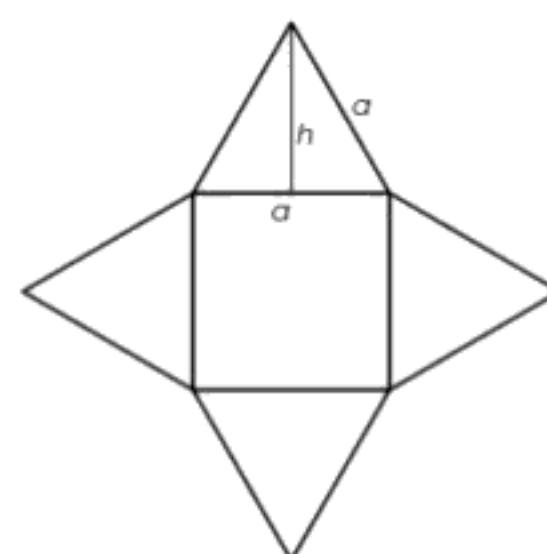
Por tanto, la superficie de la estrella de cuatro puntas es $a^2 + 4 \times \frac{ah}{2} = a^2 + 2ah = a^2 + 2a \frac{\sqrt{3}a}{2} = a^2 + \sqrt{3}a^2$

La diagonal del cuadrado grande es $a + 2h = a + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} a = a + \sqrt{3}a$

Considerando el cuadrado como un rombo, su área es $\frac{(a + \sqrt{3}a) \times (a + \sqrt{3}a)}{2} =$

$$= \frac{(a + \sqrt{3}a)^2}{2} = \frac{a^2 + 2\sqrt{3}a^2 + 3a^2}{2} = \frac{4a^2 + 2\sqrt{3}a^2}{2} = 2a^2 + \sqrt{3}a^2$$

La proporción entre las dos superficies es $\frac{a^2 + \sqrt{3}a^2}{2a^2 + \sqrt{3}a^2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3}) \times (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3}) \times (2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3}{4 - 3} =$
 $= \sqrt{3} - 1$

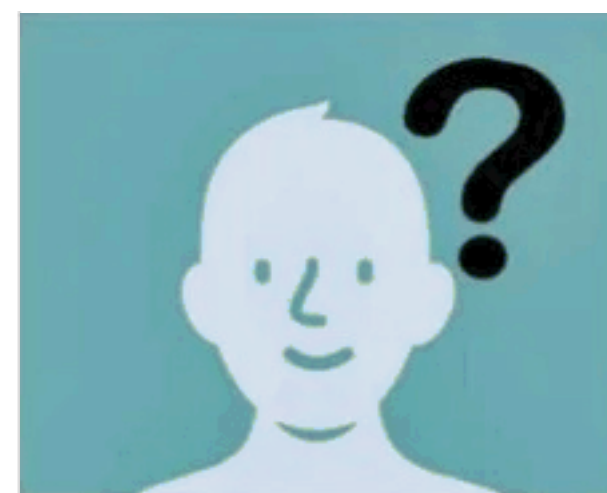


$$\sqrt{3}-1 = 0,732$$

Un número natural se escribe, en base diez, con tres cifras no nulas diferentes entre sí.

La suma de los tres números obtenidos, suprimiendo sucesivamente del número inicial la cifra de las centenas, la de las decenas y la de las unidades, es igual a la mitad del número citado.

Halla dicho número.



SOLUCIÓN

Si el número buscado es \overline{abc} se tiene que $\overline{bc} + \overline{ac} + \overline{ab} = \frac{\overline{abc}}{2} \Rightarrow 10b + c + 10a + c + 10a + b = \frac{100a + 10b + c}{2}$

De lo anterior se sigue que $20a + 11b + 2c = \frac{100a + 10b + c}{2} \Rightarrow 40a + 22b + 4c = 100a + 10b + c \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3c + 12b - 60a = 0 \Rightarrow c + 4b - 20a = 0 \Rightarrow c = 20a - 4b$$

Como son cifras

- $a = 1$ y $c = 20 - 4b$
 - Si $b = 3 \Rightarrow c = 20 - 4 \times 3 = 8$: $\overline{abc} = 138$
 - Si $b = 4 \Rightarrow c = 20 - 4 \times 4 = 4$, y las cifras deben ser diferentes entre sí.
 - Si $b = 5 \Rightarrow c = 20 - 4 \times 5 = 0$, y las cifras deben ser distintas de cero.
- $a = 2$ y $c = 40 - 4b$
 - Si $b = 8 \Rightarrow c = 40 - 4 \times 8 = 8$, y las cifras deben ser diferentes entre sí.
 - Si $b = 9 \Rightarrow c = 40 - 4 \times 9 = 4$: $\overline{abc} = 294$

por lo que el número es

138 o 294

Obtén el término general de la sucesión

20, 57, 90, 119, 144, 165, 182, ...

SOLUCIÓN

Restando término a término de la sucesión, y escribiendo debajo de ella las diferencias, tenemos

$$\begin{array}{ccccccccc} 20, & 57, & 90, & 119, & 144, & 165, & 182, & \dots \\ & 37 & 33 & 29 & 25 & 21 & 7 & \\ & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & & \end{array}$$

La segunda línea de las diferencias corresponde a una progresión aritmética de diferencia -4 . Si nombramos como b_n a sus términos, es evidente que $b_n = 37 - (n-1) \times 4 \Rightarrow b_n = 41 - 4n$

Entonces, con la sucesión original a_n , podemos plantear las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} a_1 &= 20 \\ a_2 &= a_1 + b_1 \\ a_3 &= a_2 + b_2 \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + b_{n-2} \\ a_n &= a_{n-1} + b_{n-1} \end{aligned}$$

Sumando todo, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = 20 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_{n-2} + b_{n-2} + a_{n-1} + b_{n-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n = 20 + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-2} + b_{n-1} = 20 + (41 - 4 \times 1) + (41 - 4 \times 2) + \dots + (41 - 4 \times (n-1)) \Rightarrow$$

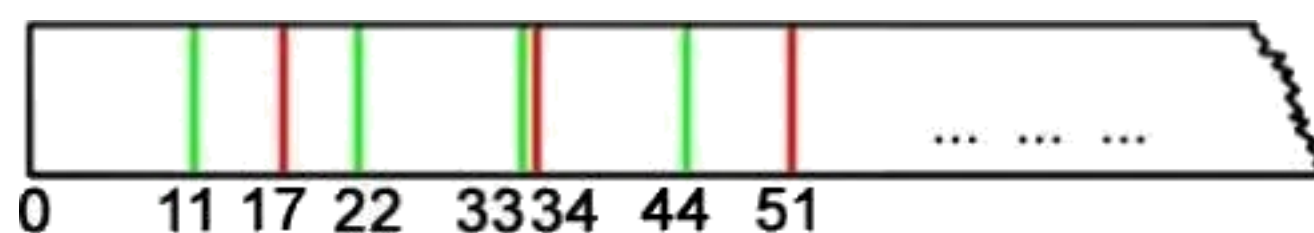
$$\Rightarrow a_n = 20 + \frac{(41 - 4 \times 1 + 41 - 4 \times (n-1)) \times (n-1)}{2} = 20 + \frac{(82 - 4n) \times (n-1)}{2} = 20 + (41 - 2n) \times (n-1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_n = 20 + 41n - 41 - 2n^2 + 2n = 43n - 21 - 2n^2$, habiendo usado la fórmula que da la suma de términos consecutivos de una progresión aritmética.

El término general es

$$\mathbf{43n - 21 - 2n^2}$$

En una cinta de 2 metros de largo se imprimen líneas verdes cada 11 mm y líneas rojas cada 17 mm comenzando desde el mismo extremo de la cinta.



¿Cuántas líneas rojas están situadas a una distancia de 1 mm de una línea verde?

SOLUCIÓN

El número máximo de líneas verdes que pueden trazarse es la parte entera del cociente $\frac{2000}{11} = 181,8...$ que

es 181, y el máximo de líneas rojas que pueden trazarse es la parte entera de $\frac{2000}{17} = 117,6...$ que es 117

Entonces vamos a determinar que líneas verdes están un milímetro antes que una línea roja: cumplirán que $17a - 11b = 1$, siendo $a \leq 117$, $b \leq 181$

$$17a - 11b = 1 \Rightarrow 11b = 17a - 1 \Rightarrow b = \frac{17a - 1}{11} = a + \frac{6a - 1}{11}; t = \frac{6a - 1}{11} \Rightarrow 6a - 1 = 11t \Rightarrow 6a = 11t + 1 \Rightarrow$$

$$a = \frac{11t + 1}{6} = t + \frac{5t + 1}{6} \Rightarrow t = 1, 7, 13, \dots : t = 6n - 5 \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{De lo anterior, } a = \frac{11t + 1}{6} = \frac{11 \times (6n - 5) + 1}{6} = \frac{66n - 54}{6} \Rightarrow a = 11n - 9 \text{ y } b = \frac{17a - 1}{11} = \frac{17 \times (11n - 9) - 1}{11} =$$

$$= \frac{187n - 154}{11} \Rightarrow b = 17n - 14$$

$$\text{Debe verificarse que } \left. \begin{array}{l} a = 11n - 9 \leq 117 \\ b = 17n - 14 \leq 181 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 11n \leq 126 \\ 17n \leq 195 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n \leq \frac{126}{11} = 11,45... \\ n \leq \frac{195}{17} = 11,47... \end{array} \right\} \Rightarrow n \leq 11$$

En conclusión, hay 11 líneas verdes que están un milímetro antes que una línea roja.

También vamos a determinar que líneas rojas están un milímetro antes que una línea verde: cumplirán que $11b - 17a = 1$, siendo $a \leq 117$, $b \leq 181$

$$11b - 17a = 1 \Rightarrow 11b = 17a + 1 \Rightarrow b = \frac{17a + 1}{11} = a + \frac{6a + 1}{11}; t = \frac{6a + 1}{11} \Rightarrow 6a + 1 = 11t \Rightarrow 6a = 11t - 1 \Rightarrow$$

$$a = \frac{11t - 1}{6} = t + \frac{5t - 1}{6} \Rightarrow t = 5, 11, 17, \dots : t = 6n - 1 \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{De lo anterior, } a = \frac{11t - 1}{6} = \frac{11 \times (6n - 1) - 1}{6} = \frac{66n - 12}{6} \Rightarrow a = 11n - 2 \text{ y } b = \frac{17a + 1}{11} = \frac{17 \times (11n - 2) + 1}{11} =$$

$$= \frac{187n - 33}{11} \Rightarrow b = 17n - 3$$

$$\text{Debe verificarse que } \left. \begin{array}{l} a = 11n - 2 \leq 117 \\ b = 17n - 3 \leq 181 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 11n \leq 119 \\ 17n \leq 184 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} n \leq \frac{119}{11} = 10,81... \\ n \leq \frac{184}{17} = 10,82... \end{array} \right\} \Rightarrow n \leq 10$$

En conclusión, hay 10 líneas rojas que están un milímetro antes que una línea verde.

En total hay $11 + 10 =$

21 líneas rojas a 1 milímetro de una línea verde

Simplifica todo lo posible la expresión

$$\frac{1}{a+b} + \frac{2a}{a^2+b^2} + \frac{4a^3}{a^4+b^4} - \frac{8a^7}{a^8-b^8}$$

SOLUCIÓN

Como $a^8 - b^8 = (a^4 - b^4) \times (a^4 + b^4)$,

$$\frac{4a^3}{a^4+b^4} - \frac{8a^7}{a^8-b^8} = \frac{4a^3 \times (a^4 - b^4) - 8a^7}{a^8 - b^8} = \frac{4a^7 - 4a^3b^4 - 8a^7}{a^8 - b^8} = \frac{-4a^7 - 4a^3b^4}{a^8 - b^8} = \frac{-4a^3 \times (a^4 + b^4)}{a^8 - b^8} = \frac{-4a^3}{a^4 - b^4}$$

Como $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2) \times (a^2 + b^2)$,

$$\begin{aligned} \frac{2a}{a^2+b^2} + \frac{4a^3}{a^4+b^4} - \frac{8a^7}{a^8-b^8} &= \frac{2a}{a^2+b^2} - \frac{4a^3}{a^4-b^4} = \frac{2a \times (a^2 - b^2) - 4a^3}{a^4 - b^4} = \frac{2a^3 - 2ab^2 - 4a^3}{a^4 - b^4} = \frac{-2a^3 - 2ab^2}{a^4 - b^4} = \\ &= \frac{-2a \times (a^2 + b^2)}{a^4 - b^4} = \frac{-2a}{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

Por fin, como $a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b)$,

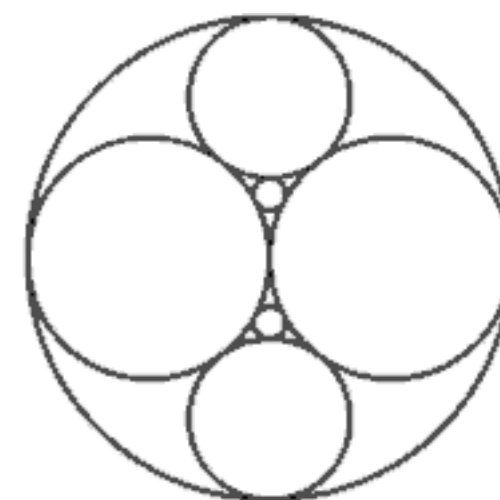
$$\frac{1}{a+b} + \frac{2a}{a^2+b^2} + \frac{4a^3}{a^4+b^4} - \frac{8a^7}{a^8-b^8} = \frac{1}{a+b} - \frac{2a}{a^2-b^2} = \frac{(a-b) - 2a}{a^2-b^2} = \frac{a-b-2a}{a^2-b^2} = \frac{-a-b}{a^2-b^2} = \frac{-(a+b)}{a^2-b^2} = -\frac{1}{a-b} =$$

$$\frac{1}{b-a}$$

Por el interior de un tubo de sección circular de 24 cm de diámetro pasan seis cables, también de sección circular.

En primer lugar hay dos cables del mismo radio y del máximo posible. Después hay colocados otros dos, también de igual y mayor radio posible, y, por último, dos pequeños, del mismo radio y también del máximo posible, en los espacios situados entre los cuatro cables anteriores.

¿Cuál es el diámetro de cada uno de los dos cables más pequeños?



SOLUCIÓN

Señalamos datos y nombramos elementos, como se ve en la imagen adjunta. Es evidente que el radio de los cables grandes es de 6 cm al ser el tubo de 24 cm de diámetro.

Llamamos r al radio del cable mediano y h a la mitad de la distancia entre los dos cables medianos.

Según todo lo anterior, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo MPN obtenemos que $MP^2 + NP^2 = NM^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6^2 + (r + h)^2 = (r + 6)^2 \Rightarrow 36 + r^2 + 2rh + h^2 = r^2 + 12r + 36 \Rightarrow 2rh + h^2 = 12r$$

Además $4r + 2h = 24 \Rightarrow 2r + h = 12 \Rightarrow h = 12 - 2r$ y, sustituyendo en la expresión anterior,

$$2rh + h^2 = 12r \Rightarrow 2r \times (12 - 2r) + (12 - 2r)^2 = 12r \Rightarrow 24r - 4r^2 + 144 - 48r + 4r^2 = 12r \Rightarrow 36r = 144 \Rightarrow r = 4 \text{ cm}$$

Por lo tanto, $\Rightarrow h = 12 - 2r = 12 - 8 \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$

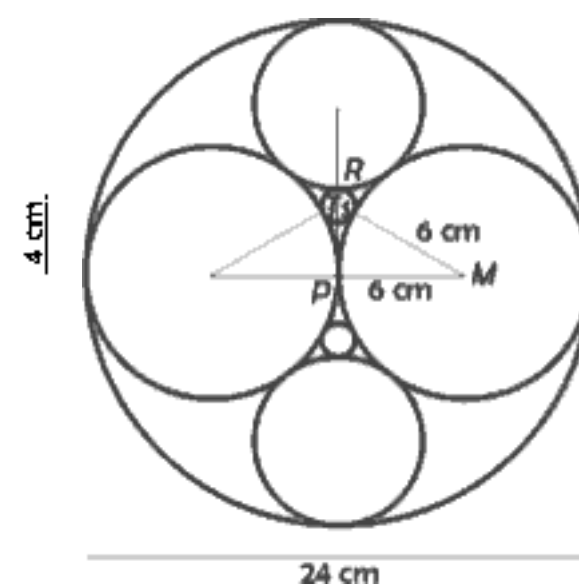
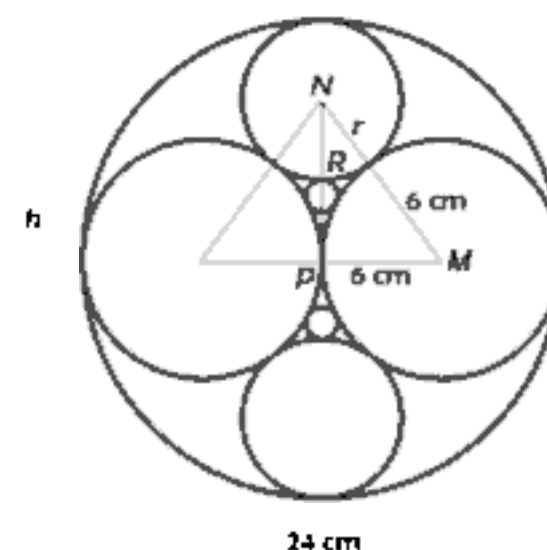
Llamamos ahora s al radio del cable pequeño y aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo MPT : $MP^2 + TP^2 = TM^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6^2 + (4 - s)^2 = (s + 6)^2 \Rightarrow 36 + 16 - 8s + s^2 = s^2 + 12s + 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20s = 16 \Rightarrow s = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0,8 \text{ cm}$$

El diámetro de cada uno de los cables más pequeños es $2 \times 0,8 =$

1,6 cm



Se quiere expresar una suma de trece números naturales, todos distintos entre sí y en orden creciente de valor, de manera que el resultado sea 94.

¿De cuántas maneras puede hacerse?

94

SOLUCIÓN

La suma de los trece primeros números naturales es

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = \frac{(1+13) \times 13}{2} = \frac{14 \times 13}{2} = 91$$

al formar una progresión aritmética de diferencia unidad.

Como faltan 3 unidades para llegar a 94 deberán añadirse, a tres números de la secuencia dada, los valores 0,0,3 ; 0,1,2 o 1,1,1 ; y deberá ser a los tres últimos números por la obligatoriedad de ser todos distintos, quedando las expresiones:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 16 = 94$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 13 + 15 = 94$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 12 + 13 + 14 = 94$$

Se puede hacer, por consiguiente,

de 3 maneras

Ángel tiene cuatro hijos: una niña y tres trillizos más pequeños.

A la niña le han regalado siempre, en cada cumpleaños, 14 muñecas, y las colecciona. Sin embargo, los trillizos deben conformarse con 4 osos de peluche cada uno por su cumpleaños.

Ángel se da cuenta que sumando el cuadrado de su edad con los cuadrados de las edades de cada hijo el resultado es 1997.

Por otro lado, añadiendo al cuadrado de su edad el número de muñecas y de osos de peluche de sus hijos le falta una unidad para obtener el producto de la edad de su mujer, de 29 años, por la edad de su suegra, de 71 años.

¿Cuál es la edad de Ángel?



SOLUCIÓN

Llamamos x a la edad de Ángel, y a la edad de la niña y z a la edad de cada uno de los trillizos.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Según el enunciado, } x^2 + y^2 + 3z^2 = 1997 \\ x^2 + 14y + 4 \times 3z + 1 = 29 \times 71 \Rightarrow x^2 + 14y + 12z = 2058 \end{array} \right\}$$

Restando las dos ecuaciones obtenemos que $14y - y^2 + 12z - 3z^2 = 61 \Rightarrow y^2 - 14y + 3z^2 - 12z + 61 = 0$, ecuación de segundo grado en y cuya solución es: $y = 7 \pm \sqrt{7^2 - (3z^2 - 12z + 61)} \Rightarrow y = 7 \pm \sqrt{12z - 3z^2 - 12}$

Como y debe ser entero positivo, $12z - 3z^2 - 12$ debe ser un cuadrado perfecto. Estudiamos posibilidades:

- $z = 1 \Rightarrow 12z - 3z^2 - 12 = 12 - 3 - 12 = -3$. No
- $z = 2 \Rightarrow 12z - 3z^2 - 12 = 24 - 12 - 12 = 0 \Rightarrow y = 7 \pm \sqrt{12z - 3z^2 - 12} = 7$. Entonces $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1997 \Rightarrow x^2 + 49 + 12 = 1997 \Rightarrow x^2 = 1936 \Rightarrow x = \sqrt{1936} = 44$
- $z \geq 3 \Rightarrow 12z - 3z^2 - 12 = 12 - 3 - 12 < 0$. No

Por lo tanto, la niña tiene 7 años, los trillizos tienen 2 años y Ángel tiene

44 años

Un cuadrado perfecto tiene cuatro dígitos.

Si cada dígito se incrementa una unidad se forma otro cuadrado perfecto.

¿Cuáles son los dos cuadrados perfectos?

a^2

SOLUCIÓN

Llamamos $\overline{abcd} = x^2$ al primer cuadrado perfecto. Al segundo, $\overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = y^2$

Entonces, $y^2 = \overline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = 1000 \times (a+1) + 100 \times (b+1) + 10 \times (c+1) + (d+1) =$
 $= 1000a + 1000 + 100b + 100 + 10c + 10 + d + 1 = 1000a + 100b + 10c + d + 1111 = \overline{abcd} + 1111 = x^2 + 1111$

O sea, $y^2 = x^2 + 1111 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1111 \Rightarrow (y-x) \times (y+x) = 1111 = 11 \times 101 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y-x=11 \\ y+x=101 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\left. \begin{array}{l} y-x=2x+90 \\ y-x=2y-112 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=45 \\ y=56 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2=45^2=2025 \\ y^2=56^2=3136 \end{array} \right\}$

No se tiene en cuenta la posibilidad de que $\left. \begin{array}{l} y-x=1 \\ y+x=1111 \end{array} \right\}$ porque no se cumplirían las condiciones del

problema: los dos cuadrados perfectos deben tener cuatro dígitos.

Los cuadrados perfectos son

2025 y 3136

María dijo: "tengo dos hermanas más que hermanos", y Carlos, su hermano menor, dijo también: "tengo dos veces más hermanas que hermanos"

¿Cuántos son los chicos y las chicas de la familia?



SOLUCIÓN

Sea x el número de hermanos e y el número de hermanas.

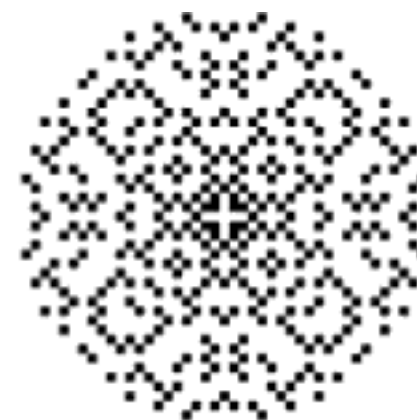
Según quién dice la frase se cumple que $\left\{ \begin{array}{l} y - 1 - x + 2 \\ y - 2 \times (x - 1) \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} y - x + 3 \\ y - 2x - 2 \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} y - x + 3 \\ 2x - 2 - x + 3 \end{array} \right\} > \left\{ \begin{array}{l} y - 8 \\ x - 5 \end{array} \right\}$

Hay, en la familia,

5 chicos y 8 chicas

Los números AA , BAB , $BACD$ y $AAAC$ son primos, teniendo en cuenta que cada letra distinta representa una cifra distinta

Halla el número primo $ABCD$.



SOLUCIÓN

En primer lugar, $AA = 11$, pues todos los demás de esas características serían compuestos múltiplos de 11. Por lo tanto, $A = 1$

Un número primo, salvo el 2, es impar, por lo que B , C y D son cifras impares distintas de 1, que es A , y de 5, que haría al número correspondiente divisible por 5.

No puede ser $AAAC = 1113$ ni $AAAC = 1119$, porque la suma de sus cifras, en ambos casos, es múltiplo de 3 y, en consecuencia, el número es divisible por 3. De ahí se deduce que $AAAC = 1117 \Rightarrow C = 7$

B y D deben ser 3 y 9, no necesariamente en ese orden; 3179 es divisible por 11 pues $(3 + 7) - (1 + 9) = 0$, por lo que $BACD = 9173 \Rightarrow B = 9$ y $D = 3$

Se confirma que $BAB = 919$, $BACD = 9173$ y $AAAC = 1117$ son primos, por lo que el número pedido es

$$\mathbf{ABCD = 1973} \text{ (primo)}$$

Un número N de cuatro cifras es *redundante* si

$$N = AB \times A \times B$$

siendo A y B números de una cifra y AB el número de dos cifras formado por las anteriores.

Si el número 1992 es *redundante*, porque $1992 = 83 \times 8 \times 3$, ¿cuál es el siguiente número *redundante*?

SOLUCIÓN

Es cuestión de calcular acotando:

- $92 * 9 * 2 = 1656$ y $93 * 9 * 3 = 2511$
- $83 * 8 * 3 = 1992$ y $84 * 8 * 4 = 2688$
- $73 * 7 * 3 = 1533$ y $74 * 7 * 4 = 2072$
- $65 * 6 * 5 = 1950$ y $66 * 6 * 6 = 2376$
- $56 * 5 * 6 = 1680$ y $57 * 5 * 7 = 1995$
- $49 * 4 * 9 = 1764$

De lo anterior, el siguiente número *redundante* es

1995

En una clase de Matemáticas se formaron grupos de cuatro y quedaron 2 estudiantes libres. Luego se formaron grupos de 5 y quedó libre 1 estudiante.

Si 15 de los estudiantes eran chicas y había más chicas que chicos, ¿cuántos chicos había en la clase?



SOLUCIÓN

El número total de alumnos y alumnas del aula es N . Entonces, $N = 4m + 2 = 5n + 1$, siendo m, n dos números naturales.

$$\text{Como } 4m + 2 = 5n + 1 \Rightarrow m = \frac{5n - 1}{4} \Rightarrow m = n + \frac{n - 1}{4}$$

Valores admisibles:

- $n = 1 \Rightarrow m = 1 + \frac{1 - 1}{4} = 1 \Rightarrow N = 6$ alumnos en total, imposible porque hay 15 chicas
- $n = 5 \Rightarrow m = 5 + \frac{5 - 1}{4} = 6 \Rightarrow N = 26$ alumnos en total y, como hay 15 chicas, entonces hay $26 - 15 = 11$ chicos
- $n = 9 \Rightarrow m = 9 + \frac{9 - 1}{4} = 11 \Rightarrow N = 46$ alumnos en total y, como hay 15 chicas, entonces hay $46 - 15 = 31$ chicos, imposible porque el número de chicas debe ser mayor que el de chicos
- En sucesivos valores pasará lo mismo que en el punto anterior

Por tanto, el número de chicos es

Reconstruye, sustituyendo las X por las cifras adecuadas, la división

$$\begin{array}{r} X59X \overline{)8X} \\ 49X \\ \hline X0 \end{array}$$

SOLUCIÓN

Sustituimos los valores desconocidos por letras identificativas.

El producto $e \times c$ debe terminar en 0 para que al restar a 9 la unidad quede también 9. Además, se verifica que $a59 = e \times 8c + 49$

Vemos las posibilidades:

- Si $c = 0$, $e \times 8$ debe acabar en 1 para que, sumado a 4, dé 5: imposible $\Rightarrow c \neq 0$
- Si $c = 5$, e debe ser par. La segunda cifra del producto $e \times 85$ debe ser 1 $\Rightarrow e = 6$ y se cumple que $6 \times 85 + 49 = 559$

Queda entonces la división que se ve al margen y, de ahí, se sigue que debe ser $f = 5 \Rightarrow b = d = 5 \Rightarrow g = 7$

$$\begin{array}{r} a59b \overline{)8c} \\ 49d \\ \hline g0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 559b \overline{)85} \\ 49d \\ \hline g0 \end{array}$$

La división reconstruida es

$$\begin{array}{r} 5595 \overline{)85} \\ 495 \\ \hline 70 \end{array}$$

- Si $e = 5$, c debe ser par.
 - Si $c = 2$, $5 \times 82 + 49 = 459$, como se ve en la imagen adjunta. De ahí,
 - $f = 5 \Rightarrow d = b = 0 \Rightarrow g = 8$ y resulta ser $82 \times 55 + 80 = 4590$
 - $f = 6 \Rightarrow d = b = 2 \Rightarrow g = 0$ y resulta ser una división exacta: $82 \times 56 = 4592$

$$\begin{array}{r} 459b \overline{)82} \\ 49d \\ \hline g0 \end{array}$$

- Para los demás valores pares de c se puede observar de manera evidente que no se verifican las condiciones: $5 \times 80 + 49 = 449$; $5 \times 84 + 49 = 469$; $5 \times 86 + 49 = 479$; $5 \times 88 + 49 = 489$

En conclusión, otras divisiones admisibles reconstruidas son

$$\begin{array}{r} 4590 \overline{)82} \\ 490 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4592 \overline{)82} \\ 492 \\ \hline 00 \end{array}$$

Añadiendo un 1 al principio y al final de un número, este aumenta en 14789.

¿Cuál era la suma de las cifras del número original?



SOLUCIÓN

Sea el número $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$. Según el enunciado, $\overline{1a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 1} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} + 14789$

Se cumplirá, si la cifra de las unidades del nuevo número es 1, que $a_0 + 9 = 11 \Rightarrow a_0 = 2$ y la igualdad es

$$\overline{1a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 21} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 2} + 14789$$

Si la cifra de las decenas del nuevo número es 2, y se arrastra 1, en la suma se cumplirá que

$$a_1 + 8 + 1 = 12 \Rightarrow a_1 = 3 \text{ y la igualdad es } \overline{1a_n a_{n-1} \dots a_2 321} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 32} + 14789$$

Si la cifra de las centenas del nuevo número es 3, y se arrastra 1 en la suma, se cumplirá que

$$a_2 + 7 + 1 = 13 \Rightarrow a_2 = 5 \text{ y la igualdad es } \overline{1a_n a_{n-1} \dots 5321} = \overline{a_n a_{n-1} \dots 532} + 14789$$

Si la cifra de las unidades de millar del nuevo número es 5, y se arrastra 1 en la suma, se acaba definitivamente el proceso al ser también la centena de millar del nuevo número igual a la centena de millar del incremento, quedando $\overline{15321} = \overline{532} + 14789$: $15321 = 532 + 14789$

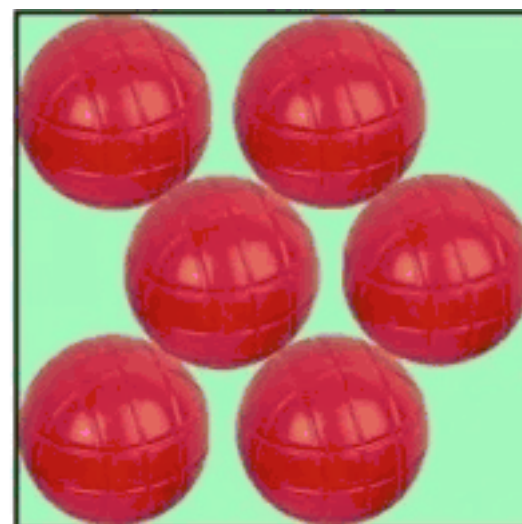
El número es 532 y la suma de sus cifras es $5 + 3 + 2 =$

10

Paco ha comprado un juego de seis bolas idénticas de petanca de 9 cm de diámetro.

Van perfectamente encajadas e inmóviles en una caja de base rectangular, como se ve en la figura.

Calcula la superficie del fondo de la caja.



SOLUCIÓN

Llamamos $r = \frac{9}{2}$ cm al radio de las bolas, a es la mitad de un lado del fondo cuadrado de la caja y d es la diagonal del cuadrado, de lado r , $PBCD$

Esa diagonal vale, aplicando el teorema de Pitágoras, $d^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow d^2 = 2r^2 = 2 \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 \Rightarrow d = \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$$

Los triángulos rectángulos OAC y PBC son rectángulos y semejantes, por lo

que puede establecerse la proporción $\frac{OA}{PB} = \frac{OC}{PC} \Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{2r+d}{d} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{(2r+d) \times r}{d} = \frac{\left(9 + \frac{9\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{9}{2}}{\frac{9\sqrt{2}}{2}} = \frac{18 + 9\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{18 + 9\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{(18 + 9\sqrt{2}) \times \sqrt{2}}{2 \times (\sqrt{2})^2} = \frac{18\sqrt{2} + 18}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{9 \times (\sqrt{2} + 1)}{2} \Rightarrow 2a = 9 \times (\sqrt{2} + 1) \text{ cm, lado de la caja.}$$

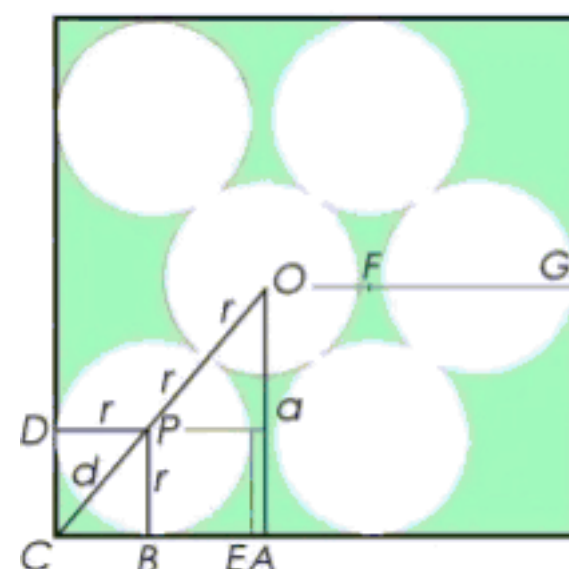
Observemos que, por la misma semejanza aplicada, $CA = a \Rightarrow FG = a$

Calculamos el otro lado: será la longitud $l = CA + OG = CA + OF + FG = a + r + EA + a$

$$\text{Como } EA = a - 2r \Rightarrow l = a + r + EA + a = a + r + a - 2r + a = 3a - r = 3 \times \frac{9 \times (\sqrt{2} + 1)}{2} - \frac{9}{2} = \frac{9 \times (3\sqrt{2} + 2)}{2} \text{ cm}$$

$$\text{Por lo tanto, la superficie es } 2a \times l = 9 \times (\sqrt{2} + 1) \times \frac{9 \times (3\sqrt{2} + 2)}{2} = \frac{81 \times (5\sqrt{2} + 8)}{2} =$$

$$\mathbf{610,38 \text{ cm}^2}$$



¿Cuántos años de este siglo verificarán la propiedad de que dividiendo el número del año por 2, 3, 5 y 7 se obtenga siempre de resto 1?

siglo21

SOLUCIÓN

El número del año es del tipo $\overline{20ab} = 2000 + 10a + b$

Si al dividirlo por 2,3,5,7 de siempre resto 1 se cumplirá que $\overline{20ab} = 2000 + 10a + b = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times n + 1$, siendo n un número natural.

Entonces, $\overline{20ab} = 2000 + 10a + b = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times n + 1 = 210n + 1 \Rightarrow 1999 + 10a + b = 210n \Rightarrow b = 1$, única cifra que puede cumplir la condición.

Por tanto, $1999 + 10a + 1 = 210n \Rightarrow 2000 + 10a = 210n \Rightarrow 200 + a = 21n \Rightarrow a = 21n - 200$, lo cual es imposible si a es una cifra, pues $n = 9 \Rightarrow a = 21 \times 9 - 200 = -11$ y $n = 10 \Rightarrow a = 21 \times 10 - 200 = 10$ y es evidente que valores distintos de n tampoco determinan cifra.

En resumen,

ningún año del siglo XXI cumple la propiedad indicada

En un Campeonato Mundial de Matemáticas, cuatro estudiantes obtienen puntuaciones todas ellas diferentes.

La suma de las puntuaciones totales de los europeos es igual a la suma de las puntuaciones de los asiáticos.

La puntuación del participante de Dinamarca es mayor que la suma de las puntuaciones de los participantes de Bélgica y de China.

La suma de las puntuaciones de los participantes de Armenia y Bélgica es superior a la suma de las puntuaciones de los otros dos.

¿Cuál es la clasificación de los cuatro competidores?



SOLUCIÓN

Sean a, b, c, d las puntuaciones respectivas de los participantes de Armenia, Bélgica, China y Dinamarca.

Según el enunciado, se verifica que
$$\begin{cases} b + d = a + c & [1] \\ d > b + c & [2] \\ a + b > c + d & [3] \end{cases}$$

Entonces, por [2], $d > b$ y $d > c$. Además, por [1], $b + d = a + c \Rightarrow a = b + d - c$ y como [3], $a + b > c + d \Rightarrow$
 $\Rightarrow b + d - c + b > c + d \Rightarrow 2b > c + d - d + c \Rightarrow 2b > 2c \Rightarrow b > c$

Con todo y por ahora, $d > b > c$

También, [1], $b + d = a + c \Rightarrow b = a + c - d$ y [3], $a + b > c + d \Rightarrow a + a + c - d > c + d \Rightarrow 2a > c + d - c + d \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2a > 2d \Rightarrow a > d$

En resumen, $a > d > b > c$ y la clasificación es

1°. Armenia

2°. Dinamarca

3°. Bélgica

4°. China

En un festival benéfico navideño los adultos pagaron 75 € y los niños 25 €

El festival se celebró en un auditorio para 600 personas, que no se llenó, y se recaudaron 33000 €

¿Cuántos adultos, como mínimo, asistieron al festival?



SOLUCIÓN

Sean x, y las cantidades respectivas de adultos y niños que asistieron al festival. Como no se llenó el auditorio,
 $x + y < 600$

Por otro lado, $75x + 25y = 33000 \Rightarrow 3x + y = 1320 \Rightarrow y = 1320 - 3x$

Por lo tanto, $x + y < 600 \Rightarrow x + 1320 - 3x < 600 \Rightarrow 1320 - 600 < 3x - x \Rightarrow 720 < 2x \Rightarrow 360 < x$

En resumen, la menor cantidad de adultos que asistió al festival fue

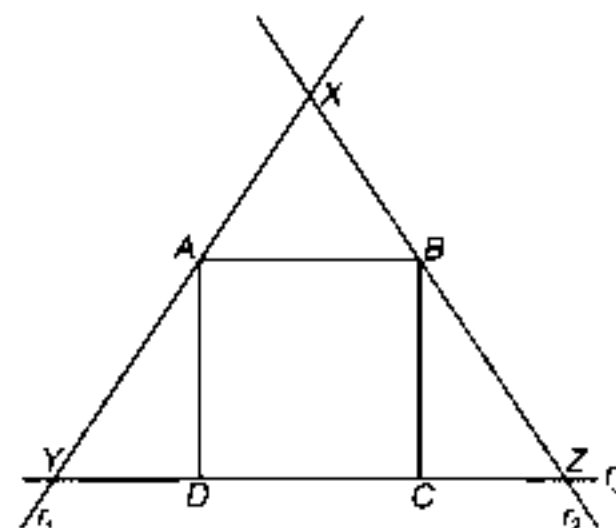
361

El parque Diversión es un triángulo XYZ limitado por tres caminos rectos:

r_1, r_2 y r_3

El zoológico es un cuadrado $ABCD$ cuyo lado CD está situado sobre el camino r_3 , la esquina A está en el camino r_1 y la esquina B en el camino r_2

Si el zoológico ocupa $7/32$ de la superficie de todo el parque Diversión, ¿cuál es la proporción entre las longitudes XA y XY ?



SOLUCIÓN

Sea a la longitud del lado del cuadrado y h la longitud de la altura del triángulo XAB . Se trata de calcular $R = \frac{XA}{XY}$

Los triángulos XAE y XYF son semejantes, por lo que $\frac{XA}{XY} = \frac{h}{h+a} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{h}{h+a}. \text{ También, } \Rightarrow \frac{h+a}{h} = \frac{1}{R} \Rightarrow 1 + \frac{a}{h} = \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{a}{h} = \frac{1-R}{R}$$

Los triángulos XYZ y $YXAB$ son semejantes, por lo que $\frac{YZ}{a} = \frac{h+a}{h} \Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{a}{YZ}$$

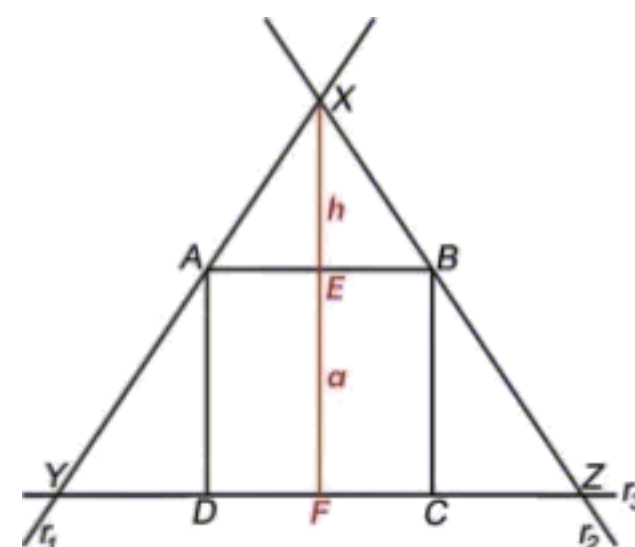
Comparando las superficies, $a^2 = \frac{7}{32} \times \frac{YZ \times (h+a)}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{YZ \times (h+a)} = \frac{7}{64} \Rightarrow \frac{a}{YZ} \times \frac{a}{h+a} = \frac{7}{64} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{a}{YZ} \times \frac{\frac{a}{h}}{\frac{h+a}{h}} = \frac{7}{64} \Rightarrow R \times \frac{\frac{1-R}{1/R}}{\frac{1}{R}} = \frac{7}{64} \Rightarrow R \times (1-R) = \frac{7}{64} \Rightarrow 64R^2 - 64R + 7 = 0$$

$$\text{Resolvemos: } R = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 64 \times 7}}{64} = \frac{32 \pm \sqrt{576}}{64} = \frac{32 \pm 24}{64} \Rightarrow R = \frac{8}{64} = \frac{1}{8} \text{ o } R = \frac{56}{64} = \frac{7}{8}$$

Pueden ser dos valores para la proporción solicitada:

1/8 o 7/8



Si cuatro números naturales diferentes a, b, c y d satisfacen la ecuación

$$(7-a) \times (7-b) \times (7-c) \times (7-d) = 4$$

¿cuánto vale la suma $a + b + c + d$?

SOLUCIÓN

Si $(7-a) \times (7-b) \times (7-c) \times (7-d) = 4$ y a, b, c, d son naturales y distintos, este producto debe estar formado por cuatro enteros diferentes $\Rightarrow 1 \times (-1) \times 2 \times (-2) = 4$, por lo que

$$7-a=1 \Rightarrow a=7-1=6$$

$$7-b=-1 \Rightarrow b=7+1=8$$

$$7-c=2 \Rightarrow c=7-2=5$$

$$7-d=-2 \Rightarrow d=7+2=9$$

De lo anterior (y teniendo en cuenta que la asociación de cada paréntesis a cada factor de manera diferente conducirá al mismo resultado) se deduce que $a + b + c + d = 6 + 8 + 5 + 9 =$

Raquel y María comparten un montón de bombones de la siguiente manera: Raquel toma uno y María, codiciosa, toma dos; a continuación, Raquel toma tres y María, seguidamente, toma 4... y así sucesivamente cada una va tomando un bombón más de los que había tomado la anterior

María es la última en tomar los bombones llevándose todos los que queda. Si se ha llevado, en total, 10 bombones más que Raquel, ¿cuántos bombones había en el montón inicial?



SOLUCIÓN

Raquel toma sucesivamente $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$ bombones, y María toma $2, 4, 6, \dots, 2n$ bombones, siendo n , en ambos casos, las veces que se llevan bombones.

Como son dos progresiones aritméticas, el total de bombones que consigue Raquel es $R = \frac{(1+2n-1) \times n}{2} = n^2$

y el total de María es $M = \frac{(2+2n) \times n}{2} = n^2 + n$

Por tanto, como $M - R = 10 \Rightarrow n^2 + n - n^2 = 10 \Rightarrow n = 10$ y la cantidad de bombones que había inicialmente es $M + R = n^2 + n + n^2 = 10^2 + 10 + 10^2 =$

210

En una circunferencia de radio 6 cm se inscribe el triángulo isósceles PQR en el que $PQ = PR$. Una segunda circunferencia es tangente a la primera y tangente a la base QR del triángulo en su punto medio, como se muestra en la figura.

Si la longitud de PQ es $4\sqrt{5}$ cm, ¿cuál es el radio de la circunferencia pequeña?



SOLUCIÓN

Nombramos todos los puntos y segmentos que vamos a utilizar y, aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos PSQ y OSQ , obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} (6+h)^2 + a^2 &= (4\sqrt{5})^2 \\ h^2 + a^2 &= 6^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} h^2 + 12h + 36 + a^2 &= 80 \\ h^2 + a^2 &= 36 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{2^a - 1^a} \Rightarrow 12h + 36 = 44 \Rightarrow 12h = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \text{ cm}$$



Observamos que el radio de la circunferencia grande es $h + 2r = 6 \Rightarrow 2r = 6 - h = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \Rightarrow r =$

$\frac{8}{3}$ cm

Poco antes de la Segunda Guerra Mundial un arquitecto de nombre Smith aterrizó en Australia y construyó la primera torre de la ciudad de Thiscityhasaveryshortname.

Al año siguiente construyó una segunda torre con un piso más que la primera. Cada año volvía y construía una nueva torre con una planta adicional.

El Sr. Smith indicó que, a finales de 1989, sus torres poseían un total de 1989 plantas.

¿Cuál es el número de pisos en la mayor de las torres en ese año?



SOLUCIÓN

Sea a el número de pisos de la primera torre y $a + n$ el número de pisos de la última torre. El número de torres construidas es $n + 1$ y, como las cantidades de pisos de las torres forman una progresión aritmética, la cantidad total de pisos, en 1989, son $\frac{(a + a + n) \times (n + 1)}{2} = 1989 \Rightarrow (a + a + n) \times (n + 1) = 3978 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2a + n) \times (n + 1) = 3978$$

Si tenemos en cuenta que

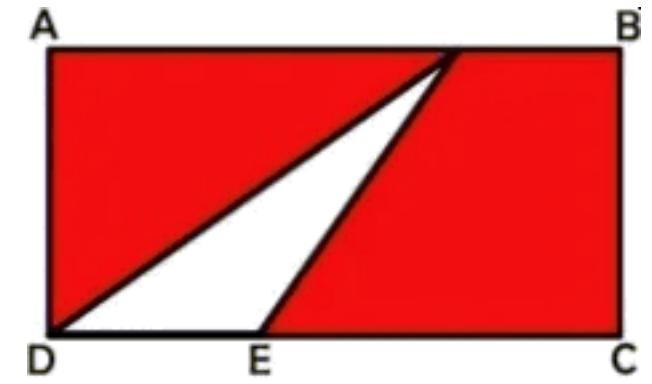
- La descomposición factorial del producto es $3978 = 2 \times 3^2 \times 13 \times 17$
- La Segunda Guerra Mundial empezó en 1939, por lo que el número mínimo de torres es $1989 - 1939 = 50$
- $2a + n > n + 1$

las posibilidades son

- $\left. \begin{array}{l} 2a + n = 2 \times 3 \times 13 = 78 \\ n + 1 = 3 \times 17 = 51 \Rightarrow n = 50 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a = 78 - n = 78 - 50 = 28 \Rightarrow a = 14 \Rightarrow a + n = 50 + 14 = 64$
- $\left. \begin{array}{l} 2a + n = 3 \times 17 = 51 \\ n + 1 = 2 \times 3 \times 13 = 78 \Rightarrow n = 77 \end{array} \right\}$, lo cual da valores negativos de plantas construidas y lo mismo pasará, evidentemente, con otras posibilidades.

En conclusión, el número de pisos de la mayor de las torres es

En el rectángulo de la figura, la longitud AB es doble de la BC, DE= 6 cm. y EC = 12 cm. ¿Cuánto vale el área roja?



SOLUCIÓN

El área roja es el valor de la superficie del rectángulo menos la superficie del rectángulo blanco.

Como $AB = DC = DE + EC = 2 \times BC \Rightarrow DC = 6 + 12 = 18$ cm y $BC = \frac{DC}{2} = 9$ cm

Entonces, el área del rectángulo es $DC \times BC = 18 \times 9 = 162$ cm² y el área del rectángulo blanco es

$\frac{DE \times BC}{2} = \frac{6 \times 9}{2} = 27$ cm² por lo que la superficie roja es $162 - 27 =$

135 cm²

Tengo 3000 baldosas cuadradas idénticas. Tomando un número de ellas he construido una superficie cuadrada en el suelo.

A continuación he añadido 1989 baldosas más para formar, con la superficie original, un área cuadrada más grande.

¿Cuántas baldosas he usado para formar mi primer cuadrado?



SOLUCIÓN

Sea a^2 el número de baldosas con las que he construido la primera superficie (de a baldosas de lado)

Después he construido una superficie cuadrada más grande (de b baldosas de lado): $b^2 = a^2 + 1989 < 3000$

De lo anterior, $b^2 = a^2 + 1989 \Rightarrow b^2 - a^2 = 1989 \Rightarrow (b + a) \times (b - a) = 1989 = 3^2 \times 13 \times 17$

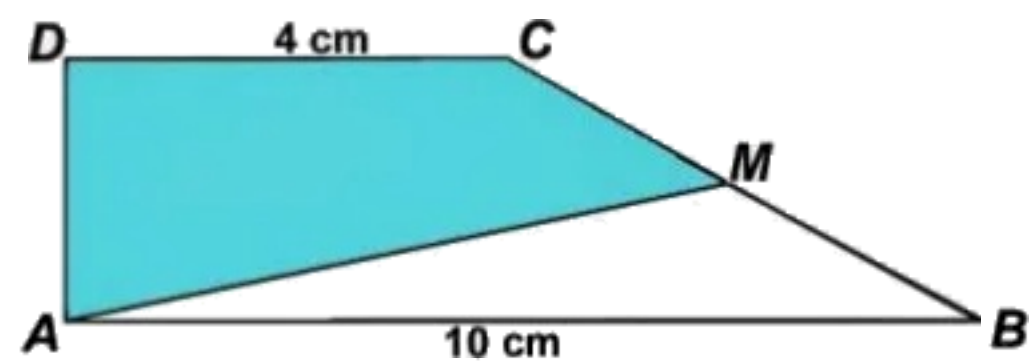
Los resultados posibles son:

- $\left. \begin{matrix} b + a = 3^2 \times 13 \times 17 \\ b - a = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b + a = 1989 \\ b - a = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b = 995 \\ a = 994 \end{matrix} \right\}, \text{ pero } b^2 = 995^2 > 3000$
- $\left. \begin{matrix} b + a = 3 \times 13 \times 17 \\ b - a = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b + a = 663 \\ b - a = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b = 333 \\ a = 330 \end{matrix} \right\}, \text{ pero } b^2 = 333^2 > 3000$
- $\left. \begin{matrix} b + a = 13 \times 17 \\ b - a = 3^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b + a = 221 \\ b - a = 9 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b = 115 \\ a = 106 \end{matrix} \right\}, \text{ pero } b^2 = 115^2 > 3000$
- $\left. \begin{matrix} b + a = 3^2 \times 17 \\ b - a = 13 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b + a = 153 \\ b - a = 13 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b = 83 \\ a = 70 \end{matrix} \right\}, \text{ pero } b^2 = 83^2 > 3000$
-
- $\left. \begin{matrix} b + a = 3^2 \times 13 \\ b - a = 17 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b + a = 117 \\ b - a = 17 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b = 67 \\ a = 50 \end{matrix} \right\}, \text{ pero } b^2 = 67^2 > 3000$
- $\left. \begin{matrix} b + a = 3 \times 17 \\ b - a = 3 \times 13 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b + a = 51 \\ b - a = 39 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b = 45 \\ a = 6 \end{matrix} \right\} \text{ y } b^2 = 45^2 < 3000$

Por lo tanto, la cantidad de baldosas usadas, para hacer la primera superficie, ha sido $a^2 = 6^2 =$

La altura del trapecio rectángulo $ABCD$ de la figura mide 6 cm.

Si M es el punto medio de BC , ¿cuál es el área de la región azul?

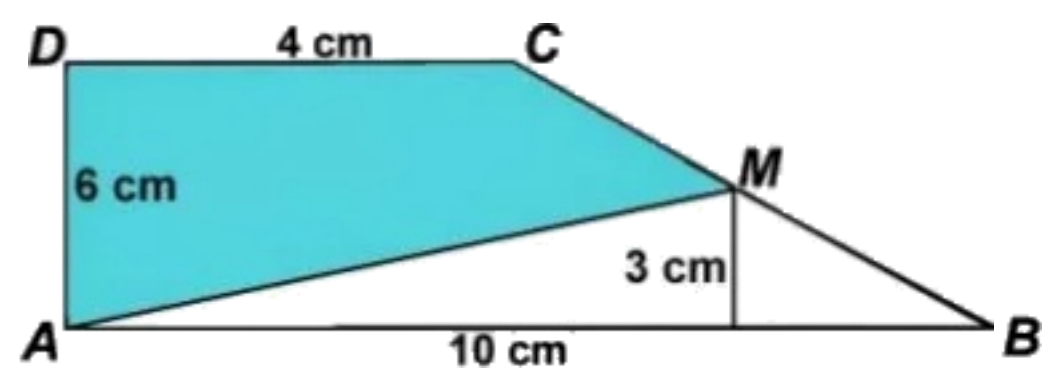


SOLUCIÓN

Observamos que la altura del triángulo AMB debe ser, por proporcionalidad, $\frac{6}{2} = 3$ cm al ser M el punto medio de BC .

El área azul es la diferencia de la superficie del trapecio $ABCD$ y el triángulo AMB :

$$\frac{(4+10) \times 6}{2} - \frac{10 \times 3}{2} = 42 - 15 =$$

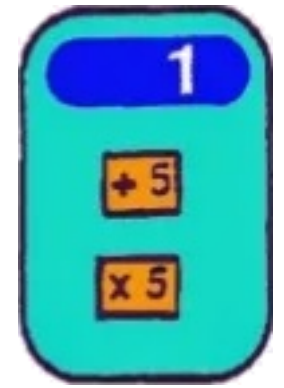


$$27 \text{ cm}^2$$

Esta calculadora tiene sólo dos teclas: +5 y $\times 5$.

Cuando se enciende muestra 1 y cuando se pulsa una tecla muestra inmediatamente el resultado de la operación correspondiente.

¿Cuántas teclas, como mínimo, se deben presionar para que aparezca el número 100?



SOLUCIÓN

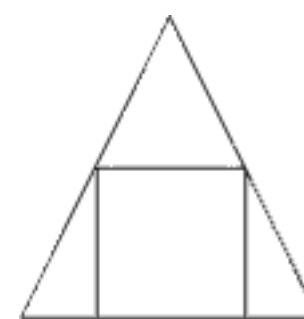
Se consigue 100 pulsando sucesivamente $\times 5$ ($= 5$) – +5 ($= 10$) – +5 ($= 15$) – +5 ($= 20$) – $\times 5$ ($= 100$) de la manera más rápida.

O sea, como mínimo las pulsaciones deben ser

5

Un cuadrado de 1 cm de lado está inscrito en un triángulo equilátero.

¿Cuál es la longitud del lado del triángulo?



SOLUCIÓN

Sea x la longitud, en centímetros, del lado del triángulo equilátero y h su altura en las mismas unidades.

Los triángulos rectángulos AHC y $A'H'C$ son semejantes por lo que

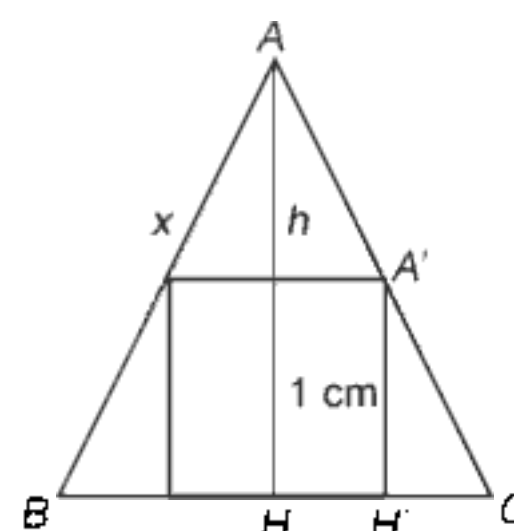
$$\frac{H'C}{A'H'} = \frac{HC}{AH}$$

Ahora bien, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo AHC ,

$$h = AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

También, $A'H' = 1$; $HC = \frac{x}{2}$ y $H'C = HC - HH' = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}$

$$\text{De todo lo anterior, } \frac{H'C}{A'H'} = \frac{HC}{AH} \Rightarrow \frac{\frac{x-1}{2}}{1} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x-1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$



El lado del triángulo es mide $(3 + 2\sqrt{3})/3$ cm

Un agricultor tiene un campo cuadrado que quiere dividir en cuatro partes con la misma forma y con un peral (indicado en el plano por la letra P) y un cerezo (indicado por la letra C) cada una.

Indica cómo debe hacerlo.

P		C	
P		C	P
C		P	
	C		

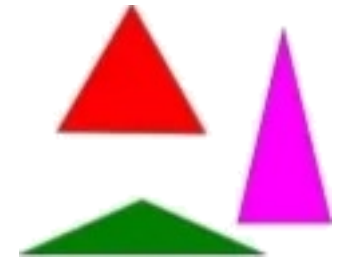
SOLUCIÓN

Como hay dieciséis cuadros en el plano, cada división contendrá 4 de ellos.

Viendo la distribución de los árboles es muy fácil hacer la parcelación:

P		C	
P		C	P
C		P	
	C		

¿Cuántos triángulos isósceles de 25 cm de perímetro pueden construirse si cada lado mide un número entero de centímetros?



SOLUCIÓN

Se debe considerar la condición de que la suma de dos lados debe ser siempre mayor que el tercer lado.

Por lo tanto, el mínimo valor para la longitud de los lados iguales es 7 porque $6 + 6 < 13$ y $6 + 6 + 13 = 25$.

Según el mismo razonamiento, el mayor valor para la longitud de lados iguales es 12, por lo que los triángulos isósceles que tienen los lados de longitudes enteras y perímetro igual a 25 cm son los que tiene de longitudes de sus lados 7,7,11; 8,8,9; 9,9,7; 10,10,5; 11,11,3; 12,12,1

En total,

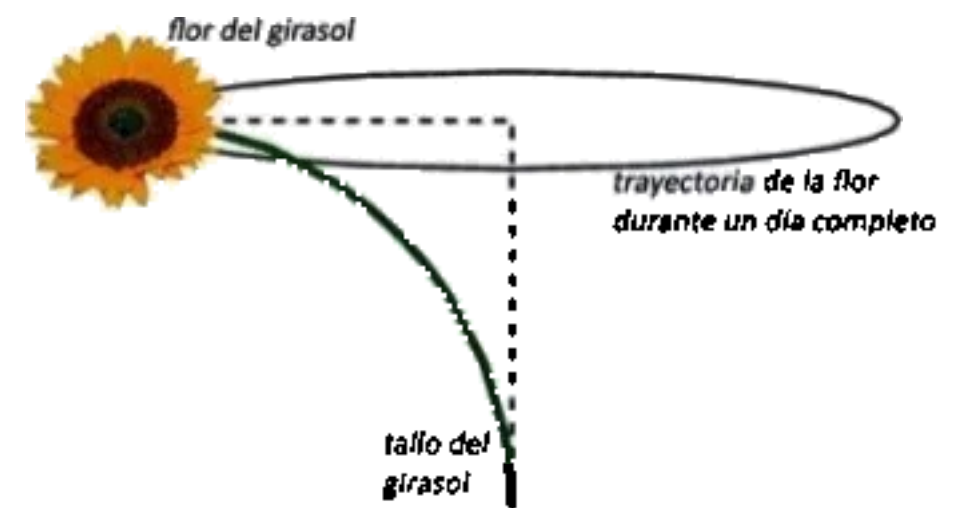
6 triángulos

El profesor JozeLuiz ha inventado un nuevo tipo de girasoles.

Todos tienen tallos de 62 cm de longitud y, siguiendo el curso del Sol, se arquean en un cuarto de círculo.

Las flores y los tallos dan una vuelta alrededor de sí mismos en 24 horas.

¿Qué distancia recorre una flor de este tipo de girasol en un día?



SOLUCIÓN

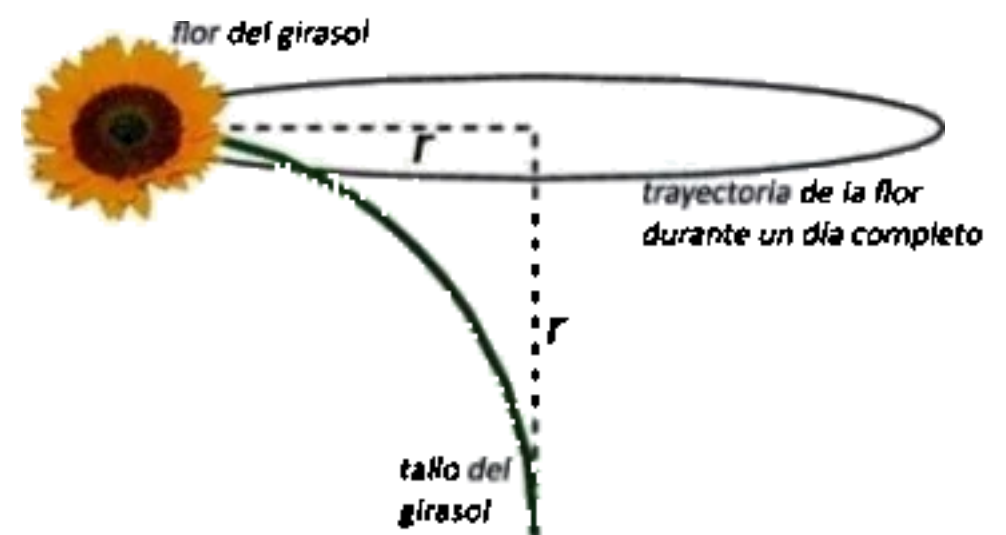
Sea r el radio del cuarto de círculo del arqueado de los tallos, que coincide con el radio de la trayectoria circular de la flor durante el día.

Entonces, $\frac{2\pi r}{4} = 62 \Rightarrow r = \frac{124}{\pi}$ cm según el arqueado del tallo.

De lo anterior, la flor del girasol recorre, al cabo del día,

$$2\pi r = 2\pi \times \frac{124}{\pi} =$$

248 cm



Al hacer cinco nuevas aulas en un colegio, la media de estudiantes por clase se redujo en 6, y al hacer otras 5 nuevas se volvió a reducir, ahora en 4.

Si el número de estudiantes permanece constante, ¿cuántos había?



SOLUCIÓN

Sea n el número inicial de aulas y x el promedio de alumnos por aula.

Según el enunciado, el número total de alumnos era $n x = (n + 5) \times (x - 6) = (n + 10) \times (x - 10)$

$$\begin{aligned} \text{De lo anterior, } \left. \begin{array}{l} (n + 5) \times (x - 6) - n x \\ (n + 10) \times (x - 10) - n x \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} n x + 5x - 6n - 30 - n x \\ n x + 10x - 10n - 100 - n x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 6n - 30 \\ 10x - 10n - 100 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x - 6n - 30 \\ x - n - 10 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 30 \\ x - n - 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 30 \\ n - 20 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

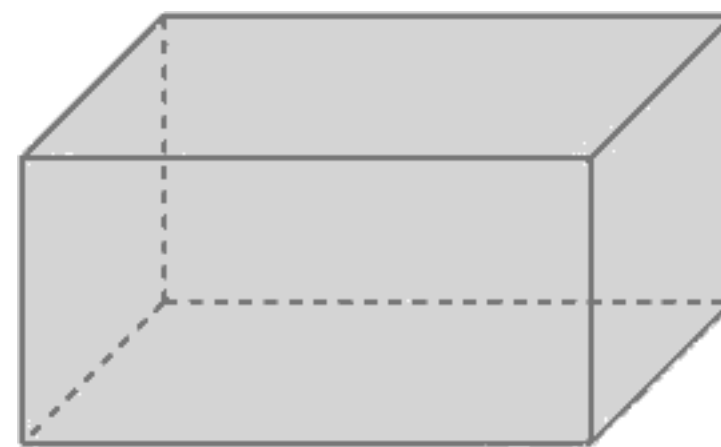
En todo momento había $n x = 20 \times 30 =$

600 estudiantes

Dos ortoedros del mismo volumen poseen todas sus aristas con longitudes enteras medidas en centímetros.

Uno de ellos es un cubo y el otro es de base cuadrada, pero no cubo, y la altura correspondiente a dicha base mide de 1 cm.

Si el volumen es menor de 21000 cm^3 , ¿cuál es su máximo valor posible?



SOLUCIÓN

Sea a la longitud de la arista del cubo y b la longitud de la arista de la base cuadrada del otro ortoedro, ambas medidas en centímetros.

Como poseen el mismo volumen, $a \times a \times a = b \times b \times 1 \Rightarrow a^3 = b^2 < 21000 \text{ cm}^3$, siendo ambos valores desconocidos números enteros.

En resumen, hay que buscar un número que sea, a la vez, cuadrado y cubo perfecto y menor de 21000

Como $\sqrt[3]{21000} = 27,589... \Rightarrow a \leq 27 \text{ cm}$ y $\sqrt{21000} = 144,913... \Rightarrow b \leq 144$

El valor debe acabar en una de estas cifras: 1,4,5,6,9,0 (cifras en las que acaba un cuadrado perfecto) por lo que a puede acabar, respectivamente, en 1,4,5,6,9,0 y sus valores posibles son:

$$a = 1 \Rightarrow a^3 = 1$$

$$a = 4 = 2^2 \Rightarrow a^3 = 2^6 = (2^3)^2 = b^2 \Rightarrow b = 8$$

$$a = 5 \Rightarrow a^3 = 5^3$$

$$a = 6 = 2 \times 3 \Rightarrow a^3 = 2^3 \times 3^3$$

$$a = 9 = 3^2 \Rightarrow a^3 = 3^6 = (3^3)^2 = b^2 \Rightarrow b = 27$$

$$a = 10 = 2 \times 5 \Rightarrow a^3 = 2^3 \times 5^3$$

$$a = 11 \Rightarrow a^3 = 11^3$$

$$a = 14 = 2 \times 7 \Rightarrow a^3 = 2^3 \times 7^3$$

$$a = 15 = 3 \times 5 \Rightarrow a^3 = 3^3 \times 5^3$$

$$a = 16 = 2^4 \Rightarrow a^3 = 2^{12} = (2^6)^2 = b^2 \Rightarrow b = 64$$

$$a = 19 \Rightarrow a^3 = 19^3$$

$$a = 20 = 2^2 \times 5 \Rightarrow a^3 = 2^6 \times 5^3$$

$$a = 21 = 3 \times 7 \Rightarrow a^3 = 3^3 \times 7^3$$

$$a = 24 = 2^3 \times 3 \Rightarrow a^3 = 2^9 \times 3^3$$

$$a = 25 = 5^2 \Rightarrow a^3 = 5^6 = (5^3)^2 = b^2 \Rightarrow b = 125$$

$$a = 26 = 2 \times 13 \Rightarrow a^3 = 2^3 \times 13^3$$

Observamos que en los cuatro casos en los que b también es entero, el mayor valor del volumen corresponde a $a = 25 \text{ cm}$ y $b = 125 \text{ cm}$ y el volumen vale, en este caso, $a^3 = 25^3 = b^2 = 125^2 = 5^6 =$

$$\mathbf{15625 \text{ cm}^3}$$

¿Cuántos enteros positivos x verifican que tanto x como $x+99$ son cuadrados perfectos?



SOLUCIÓN

Sea $x = a^2$ y $x + 99 = b^2$, siendo a y b números enteros positivos.

$$x + 99 = b^2 \Rightarrow a^2 + 99 = b^2 \Rightarrow b^2 - a^2 = (b + a) \times (b - a) = 99 = 3^2 \times 11$$

Las posibilidades son:

- $$\left. \begin{array}{l} b + a = 3^2 \times 11 = 99 \\ b - a = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 50 \\ a = 49 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 49^2 = 2401$$
- $$\left. \begin{array}{l} b + a = 3 \times 11 = 33 \\ b - a = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 18 \\ a = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 15^2 = 225$$
- $$\left. \begin{array}{l} b + a = 11 \\ b - a = 3^2 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 10 \\ a = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1^2 = 1$$

Que cumplan la condición del problema hay

3 valores de x

¿Cuántos cuadrados, como mínimo, de 2 cm de lado deben usarse para cubrir completamente un disco circular de 5 cm de radio?



SOLUCIÓN

Evidentemente, al ser el disco circular una figura con ancho y alto iguales deberá cubrirse en las dos direcciones por tantos cuadrados como contenga el diámetro, al menos, a los lados respectivos.

Como el diámetro del disco es $2 \times 5 = 10$ cm bastarán $10 : 2 = 5$ cuadrados en cada dirección, ancho y alto. Es decir, $5 \times 5 = 25$ cuadrados salvo que en las esquinas basten menos.

La diagonal del cuadrado que forman los 25 cuadraditos vale, por el teorema de Pitágoras, $\sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 14,14$ cm

y, como el diámetro es de 10 cm, sobran $\frac{14,14 - 10}{2} = 2,07$

cm en cada extremo de las diagonales, valor inferior a la

diagonal de uno de los cuadrados: $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2,8$ cm y, por tanto, son necesarios los cuadrados de las esquinas.



25 cuadrados

Simplifica todo lo posible la expresión

$$\sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}$$

SOLUCIÓN

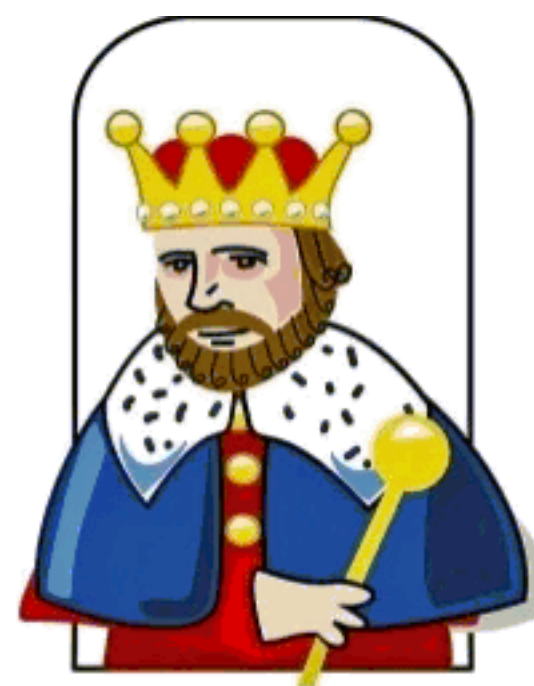
$$\begin{aligned} \text{Hacemos } A &= \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}} \Rightarrow A^2 = \left(\sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}} \right)^2 = \left(\sqrt{7 + \sqrt{13}} \right)^2 + \left(\sqrt{7 - \sqrt{13}} \right)^2 - \\ &- 2 \times \left(\sqrt{7 + \sqrt{13}} \right) \times \left(\sqrt{7 - \sqrt{13}} \right) = 7 + \sqrt{13} + 7 - \sqrt{13} - 2 \times \sqrt{(7 + \sqrt{13})(7 - \sqrt{13})} = 14 - 2 \times \sqrt{49 - 13} \Rightarrow \\ &\rightarrow A^2 = 14 - 2 \times \sqrt{36} = 14 - 2 \times 6 = 14 - 12 \rightarrow A^2 = 2 \rightarrow A = \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}} = \end{aligned}$$

$$\mathbf{\sqrt{2}}$$

En la boda de su hija al rey se le ha ido un poco la cabeza: ha hecho una pirámide de vasos por la que fluye una cascada de champán.

La pirámide se compone de 2 vasos en la parte superior (1×2), los de la novia y el novio, 6 vasos en el piso inmediatamente inferior (2×3) y luego ,siguiendo hacia abajo, 12 vasos (3×4), 20 vasos (4×5), ..., hasta el nivel inferior que cuenta 2001×2002 vasos.

¿Cuál es el número total de vasos usados en esa loca pirámide?



SOLUCIÓN

Notamos que los vasos de cada piso forman la sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_1 = 1 \times 2 = 2$, $a_2 = 2 \times 3 = 6$, $a_3 = 3 \times 4 = 12$, $a_4 = 4 \times 5 = 20$, ..., $a_{2001} = 2000 \times 2001$, $a_{2002} = 2001 \times 2002$, es decir, $a_n = n \times (n+1)$

Hacemos una nueva sucesión con las distintas sumas progresivas:

$$S_1 = a_1 = 2 = 2 \times 1 = 2 \times \frac{1}{6} \times (1 \times 2 \times 3)$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2 = 2 + 6 = 8 = 2 \times 4 = 2 \times \frac{1}{6} \times (2 \times 3 \times 4)$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 = 8 + 12 = 20 = 2 \times 10 = 2 \times \frac{1}{6} \times (3 \times 4 \times 5)$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = S_3 + a_4 = 20 + 20 = 40 = 2 \times 20 = 2 \times \frac{1}{6} \times (4 \times 5 \times 6)$$

... ..

y se trata de averiguar la que nos interesa: S_{2002}

Todas las primeras sumas siguen el patrón $S_n = 2 \times \frac{1}{6} \times n \times (n+1) \times (n+2)$, lo que significa que son dobles números tetraédricos.

Vamos a demostrar, por inducción, que se cumple en toda la sucesión: suponemos cierta la expresión para el término S_n y veremos que también se cumple para S_{n+1} .

$$\begin{aligned} \text{En efecto, por construcción, } S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \Rightarrow S_{n+1} = 2 \times \frac{1}{6} \times n \times (n+1) \times (n+2) + (n+1) \times (n+2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{n+1} = (n+1) \times (n+2) \times \left(2 \times \frac{1}{6} \times n + 1 \right) = (n+1) \times (n+2) \times \left(\frac{2n}{6} + 1 \right) = (n+1) \times (n+2) \times \left(\frac{2n+6}{6} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{n+1} = (n+1) \times (n+2) \times \left(\frac{2 \times (n+3)}{6} \right) \Rightarrow S_{n+1} = 2 \times \frac{1}{6} \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3), \text{ como se quería demostrar.} \end{aligned}$$

Entonces, el valor pedido es $S_{2002} = 2 \times \frac{1}{6} \times 2001 \times 2002 \times 2003 =$

2674674002 vasos

Halla $a^2 + b^2$ sabiendo que a y b son las raíces de la ecuación

$$x^2 - \sqrt{531}x + \frac{431}{2} = 0$$

SOLUCIÓN

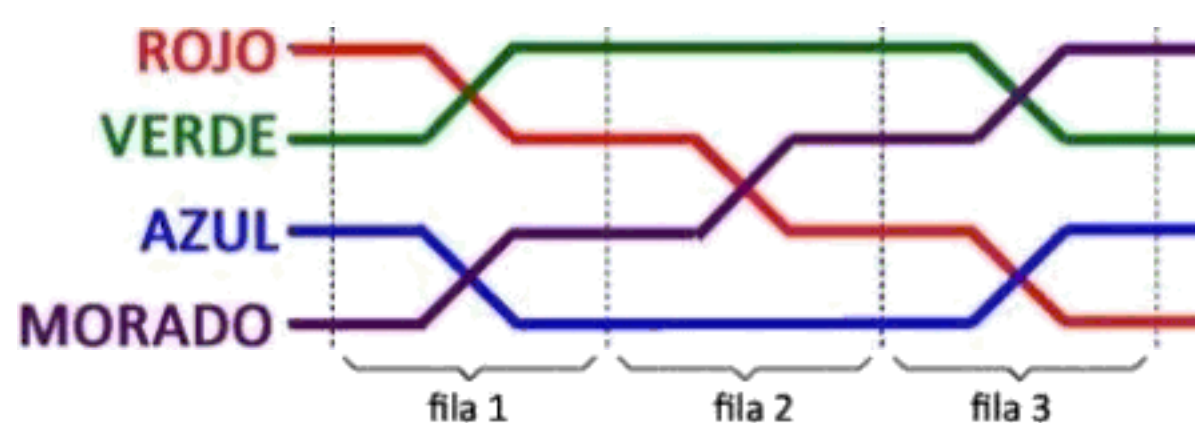
Una ecuación de segundo grado de raíces a y b es $(x-a) \times (x-b) = 0 \Rightarrow x^2 - (a+b)x + a \times b = 0$

En las condiciones del problema, de lo anterior se deduce que $a+b = \sqrt{531}$ y que $a \times b = \frac{431}{2}$

Entonces, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \times a \times b \Rightarrow a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2 \times a \times b = (\sqrt{531})^2 - 2 \times \frac{431}{2} = 531 - 431 \Rightarrow$

$$\mathbf{a^2 + b^2 = 100}$$

Ángel hace una trenza de cuatro hilos de la siguiente manera: en la primera fila intercambia las dos hebras de arriba entre ellas, y las dos hebras de abajo entre ellas. En la segunda fila intercambia los dos hilos del medio.



Luego comienza, alternativamente, como la primera y la segunda fila y, así, logra una trenza de doce filas.

¿En qué orden están los hilos, por colores, después del duodécimo intercambio?

SOLUCIÓN

Llamamos a los colores $R = \text{rojo}$, $V = \text{Verde}$, $A = \text{Azul}$, $M = \text{Morado}$, según el orden inicial de arriba abajo en la trenza

Los sucesivos intercambios producen los siguientes órdenes, siempre de arriba abajo:

Posición original. – RVAM

1°. – VRMA

2°. – VMRA

3°. – MVAR

4°. – MAVR

Se observa que en el cuarto intercambio los hilos de la trenza están en posición inversa a la situación original.

Como cada cuatro intercambios sucederá esto, es de prever que en el octavo intercambio los hilos vuelvan a la posición inicial y en el duodécimo intercambio estén, también, en posición invertida.

La posición solicitada de los hilos, de arriba abajo, en el intercambio duodécimo es

Morado – Azul – Verde - Rojo

Los números a , b y c , distintos de cero, están en progresión aritmética.

Si aumentamos a en 1, o c en 2, resulta una progresión geométrica.

¿Cuánto vale b ?



SOLUCIÓN

Si d es la diferencia de la progresión aritmética, tendremos que $b = a + d$ y $c = a + 2d$

Según las hipótesis, tanto $a + 1, b, c$ como $a, b, c + 2$ forman sendas progresiones geométricas, por lo que verificarán que

$$\left. \begin{array}{l} (a+1) \times c = b^2 \\ a \times (c+2) = b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow (a+1) \times c = a \times (c+2) \Rightarrow ac + c = ac + 2a \Rightarrow c = 2a$$

$$\text{De lo anterior, } c = a + 2d \Rightarrow 2a = a + 2d \Rightarrow 2d = a \Rightarrow d = \frac{a}{2}$$

$$\text{Tenemos así que } b = a + d \Rightarrow b = a + \frac{a}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}a$$

Eligiendo la primera de las dos condiciones expuestas para ser progresión geométrica, escribimos todo en función de a :

$$(a+1) \times c = b^2 \Rightarrow (a+1) \times 2a = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 \Rightarrow 2a^2 + 2a = \frac{9}{4}a^2 \Rightarrow 8a^2 + 8a = 9a^2 \Rightarrow a^2 = 8a \stackrel{a \neq 0}{\Rightarrow} a = 8$$

$$\text{Entonces, } b = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2} \times 8 \Rightarrow$$

$$\mathbf{b = 12}$$

Se alinean varios perros que pesan, cada uno, un número entero de kilogramos.

Al sumar el peso de cada uno de los perros (menos el primero) al doble del peso del anterior se obtiene, siempre, un total de 94 kilogramos.



¿Cuál es el número máximo de perros que puede haber?, ¿cuál es el peso de cada uno de ellos?

SOLUCIÓN

Llamamos a, b, c, d, \dots a los pesos sucesivos de los perros de la fila.

Según el enunciado, $2a + b = 94 \Rightarrow b = 94 - 2a > 0 \Rightarrow 2a < 94 \Rightarrow a < 47$

También, $2b + c = 94 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a + b = 94 \\ 2b + c = 94 \end{array} \right\} \xrightarrow{1^{\circ} \rightarrow 2 \times 1^{\circ}} \left. \begin{array}{l} 4a + 2b = 188 \\ 2b + c = 94 \end{array} \right\} \xrightarrow{1^{\circ} - 2^{\circ}} \left. \begin{array}{l} 4a - c = 94 \\ 2b + c = 94 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a - c = 94 \Rightarrow c = 4a - 94 > 0 \Rightarrow 4a > 94 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a > 23,5 \Rightarrow a \geq 24$

Considerando la existencia de los tres primeros perros hemos deducido que los kilos del primero verifican que $24 \leq a < 47$

Si mantenemos el peso de cada perro entre esos valores, esto nos va a asegurar que, al menos, habrá dos perros más en la fila. Entonces, imponiendo la misma condición para los tres primeros perros podemos acotar más el valor del peso del primer perro.

Consideramos ahora que $24 \leq b < 47$ y $24 \leq c < 47$

Según lo anterior, $\left. \begin{array}{l} b = 94 - 2a \geq 24 \\ c = 4a - 94 \geq 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a \leq 70 \\ 4a \geq 118 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \leq 35 \\ a \geq 29,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \leq 35 \\ a \geq 30 \end{array} \right\} \Rightarrow 30 \leq a \leq 35$

Delimitando ahora los pesos del segundo y tercero a $30 \leq b \leq 35$ y $30 \leq c \leq 35$, tenemos que

$\left. \begin{array}{l} b = 94 - 2a \geq 30 \\ c = 4a - 94 \geq 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a \leq 64 \\ 4a \geq 124 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a \leq 32 \\ a \geq 31 \end{array} \right\} \Rightarrow 31 \leq a \leq 32$

Veamos las posibilidades:

- $a = 31 \Rightarrow b = 94 - 2a = 32 \Rightarrow c = 94 - 2b = 30 \Rightarrow d = 94 - 2c = 34 \Rightarrow e = 94 - 2d = 26 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f = 94 - 2e = 42 \Rightarrow g = 94 - 2f = 10 \Rightarrow h = 94 - 2g = 74 \Rightarrow i = 94 - 2h = -54 < 0$: ocho perros
con pesos (en kilos) 31, 32, 30, 34, 26, 42, 10, 74
- $a = 32$ y la secuencia será igual que la precedente: siete perros con pesos 32, 30, 34, 26, 42, 10, 74

Resumiendo, el número máximo de la fila es

8 perros con pesos 31, 32, 30, 34, 26, 42, 10 y 74 kg

Si

$$\log_{a^2} b + \log_{b^2} a = 1$$

siendo a y b no nulos y distintos de la unidad, ¿qué relación tienen ambos números?

SOLUCIÓN

Como $\log_{a^2} b + \log_{b^2} a = 1$, llamamos $m = \log_{a^2} b \Rightarrow (a^2)^m = a^{2m} = b$ y $n = \log_{b^2} a \Rightarrow (b^2)^n = b^{2n} = a$

En conclusión, $m + n = 1$ y, además, $\left. \begin{array}{l} a^{2m} = b \\ b^{2n} = a \end{array} \right\} \Rightarrow (a^{2m})^{2n} = a \Rightarrow a^{4mn} = a \Rightarrow 4mn = 1 \Rightarrow mn = \frac{1}{4}$

De lo anterior, $\left. \begin{array}{l} m + n = 1 \\ mn = \frac{1}{4} \end{array} \right\}$, se deduce que m y n son raíces de la ecuación $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow m = n = \frac{1}{2}$

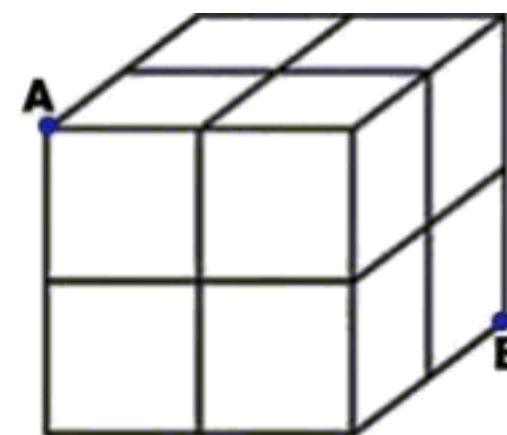
Resumiendo, $a^{2m} = b \Rightarrow a^{2 \times \frac{1}{2}} = b \Rightarrow$

$$\mathbf{a = b}$$

Se construye un cubo de madera de 1 dm de lado al unir, con cola, ocho cubos de 0,5 dm de lado.

Un gusano quiere pasar de la esquina A a la esquina B del cubo grande. Puede arrastrarse sobre la superficie del gran cubo o excavar en el pegamento para deslizarse entre los cubos pequeños, pero no puede cavar en la madera que forma los cubos pequeños.

¿Qué distancia, como mínimo, debe recorrer?



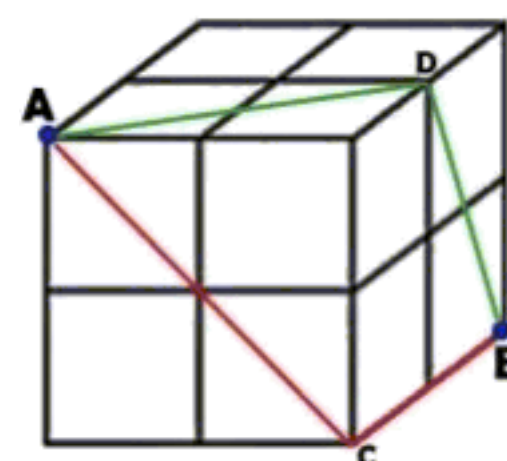
SOLUCIÓN

Las dos rutas más cortas son las que se dibujan en la figura adjunta con los colores rojo (ACB) y verde (ADB), u otras similares, no haciendo falta que el gusano marche por las líneas de separación de los cubitos.

La ruta ACB marcha a través de una diagonal de una cara del cubo y a través de una arista del mismo cubo.

Como el cubo tiene 1 dm de lado, la longitud es $L_{ACB} = AC + CB = \sqrt{1^2 + 1^2} + 1 \Rightarrow \Rightarrow L_{ACB} = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow L_{ACB} = 2,414$ dm, habiendo aplicado en el primer tramo el teorema de Pitágoras.

La ruta ADB marcha sucesivamente a través de dos hipotenusas de triángulos rectángulos de lados, ambos, de longitud $0,5 = \frac{1}{2}$ dm y 1 dm



Aplicando el teorema de Pitágoras en ambos tenemos que $L_{ADB} = AD + DB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \Rightarrow$

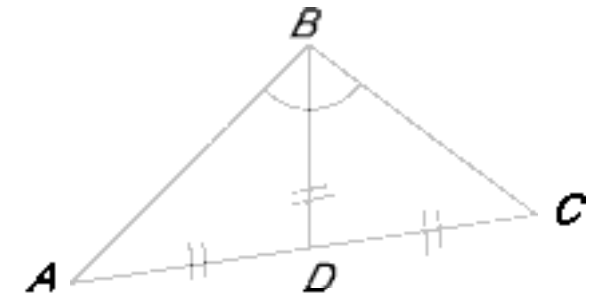
$$\Rightarrow L_{ACB} = 2 \times \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} \right) = 2 \times \sqrt{\frac{5}{4}} = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow L_{ACB} = \sqrt{5} \Rightarrow L_{ACB} = 2,236 \text{ dm}$$

Por lo tanto, el camínimo mínimo es el ADB y el gusano debe recorrer, al menos,

2,236 dm

PD.- Si se desplegase el cubo el gusano marcharía por la ruta ADB en línea recta, lo que confirma la tesis de camino mínimo.

Si los segmentos AD , BD y DC miden lo mismo, ¿cuánto mide el ángulo ABC ?



SOLUCIÓN

Como $AD = BD = DC$, D es el centro de la semicircunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo y el lado AC es un diámetro luego el triángulo ABC es rectángulo en B .

El ángulo $\hat{ABC} =$

90°

Otra forma:

Llamamos $\alpha = \hat{ABD}$. En el triángulo isósceles BDA se verifica que $\hat{DAB} = \hat{ABD} = \alpha \Rightarrow \hat{BDA} = 180^\circ - 2\alpha$

Entonces, en el triángulo isósceles CDB , $\hat{CDB} = 180^\circ - \hat{BDA} = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha \Rightarrow \hat{DBC} = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} \Rightarrow \hat{DBC} = 90^\circ - \alpha$

En resumen, $\hat{ABC} = \hat{ABD} + \hat{DBC} = \alpha + 90^\circ - \alpha \Rightarrow \hat{ABC} =$

90°

En un cuadrado de 3×3 se han colocado números enteros positivos, todos distintos, de modo que los productos de tres números escritos en una misma fila o columna son todos iguales.

Además, el valor entero más grande que aparece en el cuadrado es el más pequeño posible.

¿Cuál es el valor del producto de tres números de una misma línea?

SOLUCIÓN

El cuadrado 3×3 con valores enteros mínimos y distintos que pueden disponerse de tal manera que los números de cada fila o cada columna sumen lo mismo es el cuadrado mágico que se ve al margen u otro similar con los mismos números. La suma de filas y columnas es siempre igual a 15

Ahora bien, como el producto de potencias de una base común es igual a la potencia que resulta con la misma base y exponente la suma de los exponentes, se sigue que el cuadrado que se indica debe ser el de las potencias de 2 (base mínima no trivial) con los exponentes del cuadrado anterior en la misma posición. Será este

y se puede observar que el producto de los números de cada fila o columna tendrá el mismo valor: $2^6 \times 2^7 \times 2^2 = 2^{6+7+2} = 2^{15} = 32768$

Así pensé la solución del problema sin darme cuenta que existían otros valores menores, y por tanto con solución (posiblemente) óptima, basados en la factorización.

El seguidor del blog **Ocho** dio una solución con valores más pequeños con 20 como entero más grande y todos divisores de 120, que es, precisamente, el producto de los valores de las casillas de cada fila o columna.

8	3	4
1	5	9
6	7	2
2^8	2^3	2^4
2^1	2^5	2^9
2^6	2^7	2^2

1	6	20
10	4	3
12	5	2

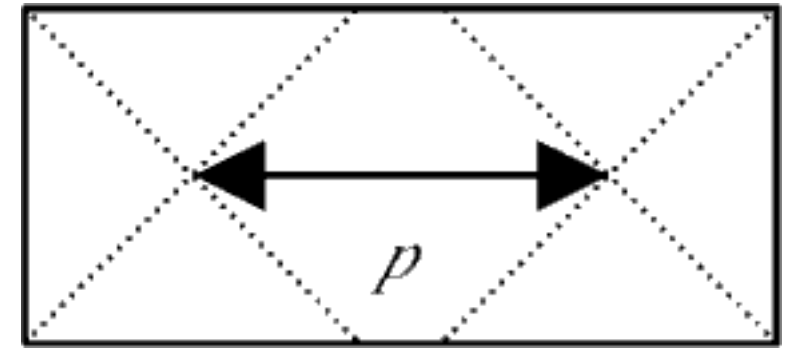
La solución puede ser, entonces,

120

Un billete de autobús mide 7 cm de largo y 3 cm de ancho.

Durante un viaje me he entretenido en hacer dobleces tal como indica la figura, siendo las líneas que aparecen bisectrices de los ángulos de las esquinas.

¿Cuánto mide la longitud p en centímetros?



SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta que el triángulo , formado en la derecha del billete (igual que el que se forma en su izquierda) por las dos dobleces que parten de los vértices, es rectángulo isósceles con ángulos de

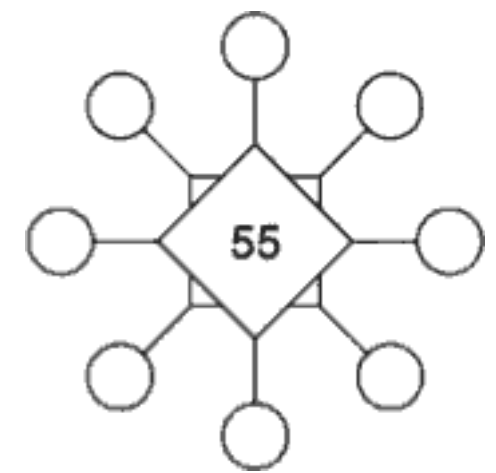
45° , 45° , 90° y su hipotenusa mide 3 cm, su altura es $\frac{3}{2} \times \tan 45^\circ$ cm, por lo que

$$p = 7 - 2 \times \frac{3}{2} \times \tan 45^\circ = 7 - 3 \times \tan 45^\circ = 7 - 3 =$$

4 cm

El abuelo de Pepe le muestra el octógono de la figura y le pide que complete los ocho círculos alrededor del número 55 con todos los números diferentes y menores de 100, de modo que los productos de tres números alineados sean todos iguales a 1980.

¿Cuál es la suma de los ocho números que rodean el octógono?



SOLUCIÓN

Como $\frac{1980}{55} = 36$, los números que se piden son las parejas de factores distintos que dan lugar al valor 36:

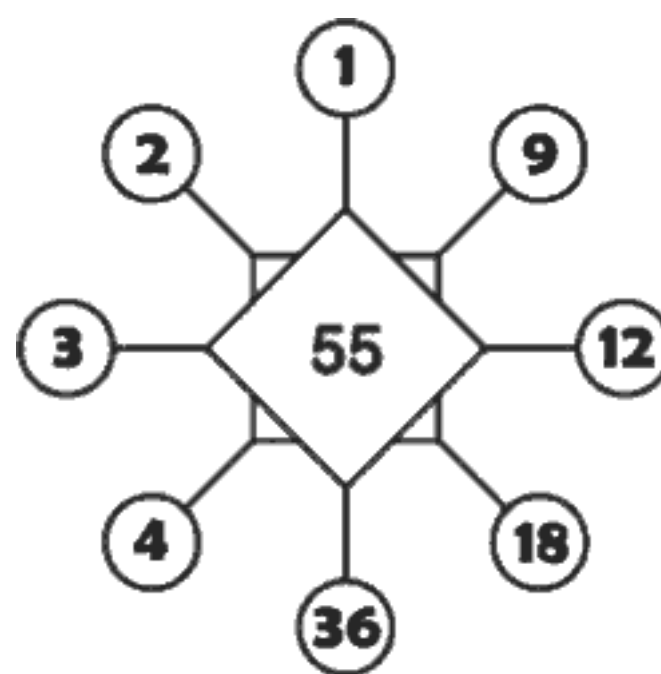
$$1 \times 36 = 36$$

$$2 \times 18 = 36$$

$$3 \times 12 = 36$$

$$4 \times 9 = 36$$

Entonces, el octógono quedará así:



Por lo tanto, la suma de los ocho números pedidos es $1 + 2 + 3 + 4 + 9 + 12 + 18 + 36 =$

85

Hay algunos números enteros positivos que verifican estas dos propiedades:

- La suma de los cuadrados de sus cifras es 50
- Cada cifra es mayor que la que hay a su izquierda

¿Cuál es el producto de todas las cifras del mayor número de todos estos números enteros?



SOLUCIÓN

Analizando los números a partir de la menor primera cifra significativa por la derecha y siguiendo hacia la izquierda (para que haya la mayor cantidad de cifras) obtendremos las cifras 1,2,3,6 tales que

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 6^2 = 50$, por lo que el número sería 1236 y el producto de sus cifras $1 \times 2 \times 3 \times 6 =$

36

A Merche le encanta su enciclopedia.

Hoy la ha abierto al azar. Los números de las dos páginas que tiene delante son dos números de 3 dígitos y el de la izquierda es, por supuesto, un número par.

Para escribir estos dos números de 3 dígitos solo se requiere el uso de 3 dígitos consecutivos. Uno se usa 3 veces, otro 2 veces y el tercero solo una vez.

La suma de los 6 dígitos que componen los dos números de estas páginas es 25.

¿Cuál es el número de la página de la izquierda?



SOLUCIÓN

Suponemos que el número de página de la izquierda es \overline{abc} , siendo c cifra par, y el de la derecha es $\overline{ab(c+1)}$

Si únicamente aparecen 3 dígitos distintos debe cumplirse una de estas dos condiciones:

- $c+1=a$, por lo que los números son \overline{abc} y $\overline{aba} \Rightarrow a+b+c+a+b+a=3a+2b+c=25 \Rightarrow 3 \times (c+1)+2b+c=25 \Rightarrow 2b+4c+3=25 \Rightarrow 2b+4c=22 \Rightarrow b+2c=11$, siendo c cifra par.

Hay dos posibilidades:

- $c=2 \Rightarrow b=11-2c=7$ y $a=c+1=3$, que no cumpliría la condición de ser consecutivas las cifras.
- $c=4 \Rightarrow b=11-2c=3$ y $a=c+1=5$, cifras consecutivas.

- $c+1=b$, por lo que los números son \overline{abc} y $\overline{abb} \Rightarrow a+b+c+a+b+b=2a+3b+c=25 \Rightarrow 2a+3 \times (c+1)+c=25 \Rightarrow 2a+4c+3=25 \Rightarrow 2a+4c=22 \Rightarrow a+2c=11$, siendo c cifra par.

Hay dos posibilidades:

- $c=2 \Rightarrow a=11-2c=7$ y $b=c+1=3$, que no cumpliría la condición de ser consecutivas las cifras.
- $c=4 \Rightarrow a=11-2c=3$ y $b=c+1=5$, cifras consecutivas.

El número de la izquierda puede ser, por tanto, $\overline{abc} =$

534 o 354

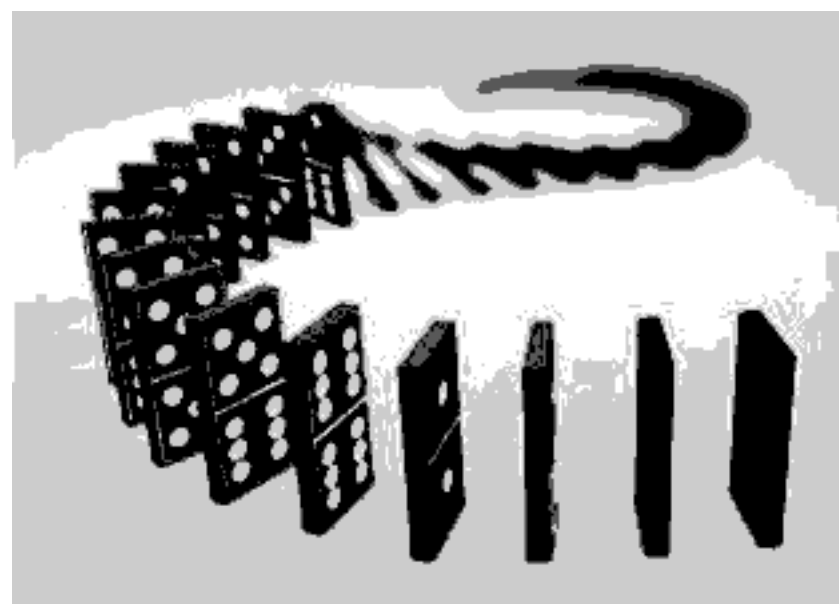
Se construye una sucesión de enteros positivos según las tres reglas siguientes:

- Regla 1: Si el entero es menor que 10, lo multiplica por 9.
- Regla 2: Si el entero es par y mayor que 9, lo divide por 2.
- Regla 3: Si el entero es impar y mayor que 9, le resta 5.

Empieza con un entero positivo elegido al azar, se aplica la regla adecuada y, a continuación, se sigue aplicando la regla que corresponda a cada resultado obtenido.

Un ejemplo de sucesión construida según estas reglas sería: 23, 18, 9, 81, 76...

Calcula el término 2018 de la sucesión que empieza por 98, 49,...



SOLUCIÓN

La sucesión, aplicando las reglas, es $\{a_n\} = \{98, 49, 44, 22, 11, 6, 54, 27, 22, 11, 6, 54, 27, 22, \dots\}$ y se observa que la secuencia 22, 11, 6, 54, 27 se repite continuamente.

Es evidente que

$$a_4 = 22, a_9 = 22, a_{14} = 22, \dots \Rightarrow a_{5k-1} = 22$$

$$a_5 = 11, a_{10} = 11, a_{15} = 11, \dots \Rightarrow a_{5k} = 11$$

$$a_6 = 6, a_{11} = 6, a_{16} = 6, \dots \Rightarrow a_{5k+1} = 6$$

$$a_7 = 54, a_{12} = 54, a_{17} = 54, \dots \Rightarrow a_{5k+2} = 54$$

$$a_8 = 27, a_{13} = 27, a_{18} = 27, \dots \Rightarrow a_{5k+3} = 27, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

De ahí que, como $2018 = 5 \times 403 + 3$, por lo que $a_{2000} = a_{5 \times 403 + 3} =$

27

En la tienda El Barato todos los precios son valores enteros en euros. Hoy hay una operación especial de promoción: todos los productos a 10 euros.

Para los artículos que usualmente se venden a más de 10 euros la oferta es muy interesante pero para los artículos que cuestan, en condiciones normales, menos de 10 euros, su compra resulta más cara.

Para paliar este problema, el gerente de la tienda decide que se haga, en caso de una compra múltiple de artículos iguales que valen normalmente menos de 10 euros, un descuento equivalente al precio habitual de una unidad de ese artículo.

Es decir, una compra de 2 artículos iguales, que cuestan normalmente a 7 euros la unidad, supone hoy un pago total de $2 \times 10 - 7 = 13$ euros en vez de $2 \times 7 = 14$ euros; y una compra de 5 artículos iguales, que cuestan normalmente a 6 euros la unidad, supone un pago total de $5 \times 10 - 6 = 44$ euros, bastante más de los $5 \times 6 = 30$ euros que costarían otro día.

Juan ha ido a comprar varias memorias USB de 16 Gb (cuyo precio habitual es menor de 10 euros por unidad) y, después de un cálculo rápido, ha descubierto que ha pagado exactamente el mismo precio que si hubiera hecho esta compra otro día.

¿Cuál es el precio normal, en ese comercio, de una memoria USB de 16 Gb?



SOLUCIÓN

Llamamos n al número de memorias USB que compra Juan, y p al precio habitual por unidad.

Según la oferta el precio de hoy es $n \times 10 - p$ euros, siendo el precio de cada día $n \times p$ euros.

Entonces, como el gasto es el mismo, $10n - p = np \Rightarrow p + np = 10n \Rightarrow p = \frac{10n}{n+1}$

Suponiendo que compra más de un artículo, como el precio debe ser un valor entero,

- $n = 4$ y el precio por unidad es, normalmente, $p = \frac{10n}{n+1} = \frac{10 \times 4}{4+1} = \frac{40}{5} = 8$ euros
- $n = 9$ y el precio por unidad es, normalmente, $p = \frac{10n}{n+1} = \frac{10 \times 9}{9+1} = \frac{90}{10} = 9$ euros

El precio normal es de 8 ó 9 euros

Antonio, Blas y Carlos reparten su dinero de la siguiente forma:
 Antonio da a Blas y a Carlos dinero hasta que cada uno tenga el doble de lo que tenía; Blas hace ahora lo mismo con Antonio y con Carlos y, finalmente, Carlos hace lo mismo, es decir, les da a Antonio y a Blas dinero hasta que cada uno tenga el doble de lo que tenía en ese momento.



Si Carlos empieza y termina con 36 euros, ¿cuánto dinero tienen entre los tres?

SOLUCIÓN

Sean a , b , c los euros respectivos que tienen, al principio, Antonio, Blas y Carlos, siendo $c = 36$ euros.

Hacemos una tabla en la que vemos el progreso de las donaciones y lo que tienen los amigos

	<i>Antonio</i>	<i>Blas</i>	<i>Carlos</i>
<i>Inicio</i>	a	b	c
<i>Después de la 1ª donación</i>	$a - b - c$	$2b$	$2c$
<i>Después de la 2ª donación</i>	$2 \times (a - b - c)$	$2b - (a - b - c) - 2c = 3b - a - c$	$4c$
<i>Después de la 3ª donación</i>	$4 \times (a - b - c)$	$2 \times (b - a - c)$	$4c - 2 \times (a - b - c) - (3b - a - c)$

Carlos tiene, al final, $4c - 2 \times (a - b - c) - (3b - a - c) = 4c - 2a + 2b + 2c - 3b + a + c = 7c - a - b$

Por la condición final del problema, $7c - a - b = c \Rightarrow a + b = 6c$

En resumen, el total del dinero que tienen entre los tres es $a + b + c = 6c + c = 7c = 7 \times 36 =$

252 euros

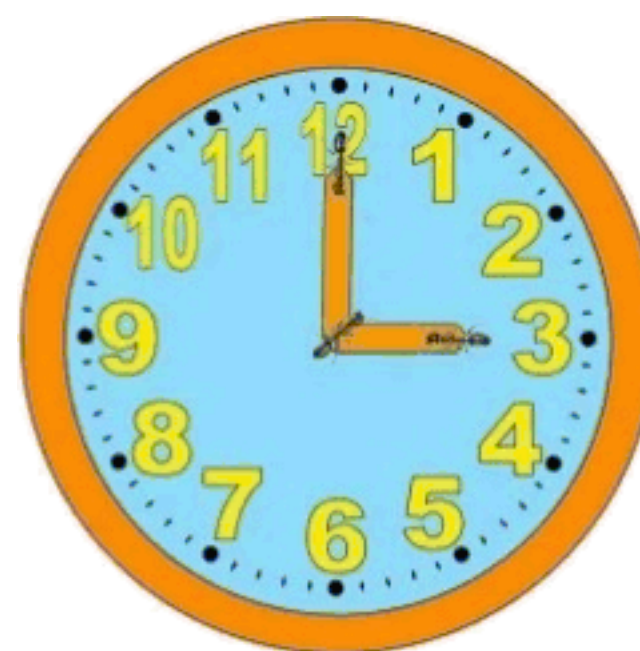
Tres hormigas descansan en un reloj que indica exactamente las tres de la tarde. Una duerme en el centro del reloj y otra al final de la aguja pequeña.

La tercera, situada en el extremo de la aguja grande que mide 22 cm de largo, se despierta a esa hora e inmediatamente toma la dirección hacia centro del reloj.

Va avanzando a una velocidad constante sobre la gran aguja de tal manera que le cuesta exactamente una hora llegar a su destino.

Entre las 3 y las 4 de la tarde puede verse, por una única vez, que las tres hormigas forman un triángulo equilátero.

¿Cuál es la longitud de la aguja pequeña?



SOLUCIÓN

Se sabe que la aguja grande recorre un quinto del giro completo del reloj $\left(\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \text{ o } 12'\right)$ mientras la aguja pequeña recorre $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ (o 1').

Originalmente, las tres hormigas forman un triángulo rectángulo.

1) Si, al formar el triángulo equilátero, llamamos α al ángulo girado por la aguja grande y β al ángulo girado por la aguja pequeña, es evidente (véase la imagen adjunta) que $\beta = 60^\circ + \alpha - 90^\circ \Rightarrow \beta = \alpha - 30^\circ$

De todo lo anterior puede establecerse la proporción siguiente: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{72^\circ}{6^\circ}$,

$$\text{luego } \frac{\alpha}{\alpha - 30^\circ} = 12 \Rightarrow \alpha = 12\alpha - 360^\circ \Rightarrow 11\alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{11}$$

Como la aguja grande recorre 72° cada 12', los minutos x recorridos por la aguja grande desde las tres de la tarde hasta que se forma el triángulo

equilátero entre las hormigas, verifican la proporción $\frac{\alpha}{x} = \frac{72^\circ}{12'} \Rightarrow \frac{\frac{360}{11}}{x} = 6 \Rightarrow$

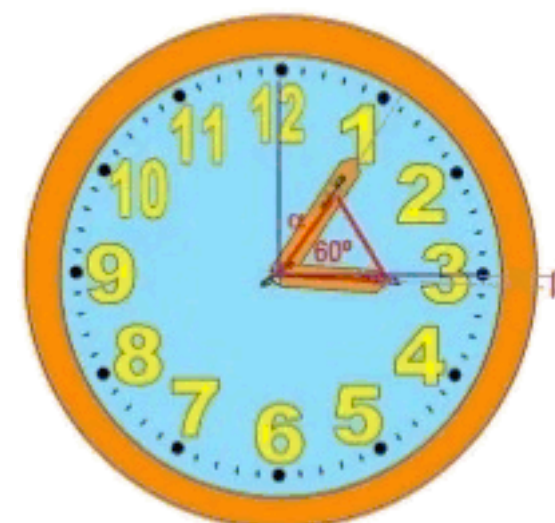
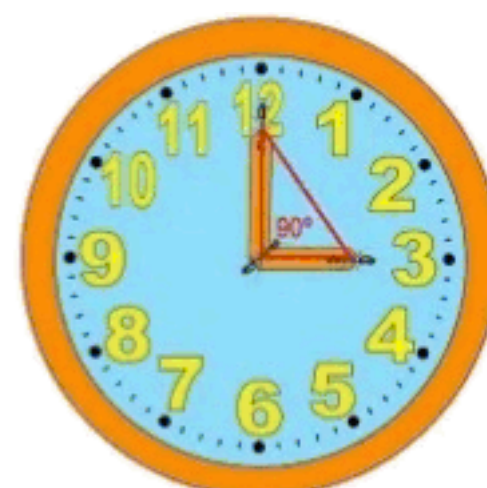
$$6x = \frac{360}{11} \Rightarrow x = \frac{360}{66} = \frac{60}{11} \text{ min}$$

La velocidad de la hormiga que se desplaza es de 22 cm/h $\frac{22}{60}$ cm/min, por lo que la hormiga se ha movido

por la aguja grande $\frac{60}{11} \times \frac{22}{60} = 2$ cm, quedándole $22 - 2 = 20$ cm por recorrer hasta el centro en el momento de formar, con las otras dos hormigas, el triángulo equilátero. Esa distancia es, también, la longitud de la aguja pequeña.

2) Otra posibilidad es que la aguja grande rebase a la aguja pequeña antes de que se forme el triángulo equilátero.

En ese caso, al formar el equilátero, $\alpha = 90^\circ + 60^\circ + \beta \Rightarrow \beta = \alpha - 150^\circ$



Con la proporción especificada anteriormente, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{72^\circ}{6^\circ} \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha - 150^\circ} = 12 \Rightarrow \alpha = 12\alpha - 1800^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow 11\alpha = 1800^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{1800^\circ}{11}$$

Igual que en el caso anterior, como la aguja grande recorre 72° cada $12'$, los minutos x recorridos por la aguja grande desde las tres de la tarde hasta que se forma el triángulo equilátero entre las hormigas, verifican

$$\text{la proporción } \frac{\alpha}{x} = \frac{72^\circ}{12'} \Rightarrow \frac{\frac{1800}{11}}{x} = 6 \Rightarrow 6x = \frac{1800}{11} \Rightarrow x = \frac{1800}{66} = \frac{300}{11} \text{ min}$$

La velocidad de la hormiga que se desplaza es de 22 cm/h $\frac{22}{60} \text{ cm/min}$, por lo que la hormiga se ha movido

por la aguja grande $\frac{300}{11} \times \frac{22}{60} = 10 \text{ cm}$, quedándole $22 - 10 = 12 \text{ cm}$ por recorrer hasta el centro en el

momento de formar, con las otras dos hormigas, el triángulo equilátero. Esa distancia es, también, la longitud de la aguja pequeña.

La aguja pequeña puede medir, según los dos casos anteriores,

12 o 20 cm

¿Cuánto mide el ángulo A de la figura adjunta?

SOLUCIÓN

Nombramos vértices, que usen ángulos necesarios para el proceso de cálculo, como se ve en la imagen.

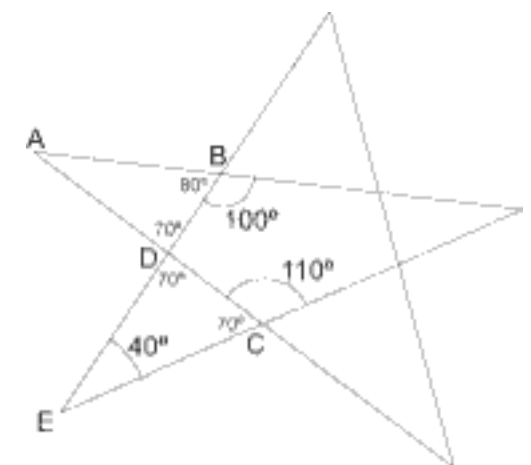
El ángulo C del triángulo CDE es $C_{CDE} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$, suplementario del ángulo C del pentágono central.

De ahí, el ángulo D del mismo triángulo CDE es $D_{CDE} = 180^\circ - E - C_{CDE} = 70^\circ \Rightarrow D_{CDE} = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$

Y, por ser ángulos opuestos por el vértice, el ángulo D del triángulo ABD es igual al ángulo D del triángulo CDE : $D_{ABD} = D_{CDE} = 70^\circ$

Como el ángulo B del triángulo ABD es $B_{ABD} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$, suplementario del ángulo B del pentágono central, ángulo A pedido es $A = 180^\circ - B_{ABD} - D_{ABD} = 180^\circ - 80^\circ - 70^\circ =$

30°



En un antiguo manuscrito se han encontrado curiosas operaciones, entre números naturales, que pueden transcribirse así:

$$((1789 \mu 11) \gamma 9) = 63$$

$$((2000 \mu 9) \gamma 11) = 22$$

$$(((99 \mu 89) \gamma 11) \mu 9) \gamma 7 = 14$$

El profesor Sandalio, experto criptógrafo, ha descubierto la clave del enigma que constituyen las igualdades citadas:

- El resultado de la operación μ es el resto de la división entera del primer número por el segundo.
- El resultado de la operación γ es el producto de los dos números que intervienen en la operación.
- Además, el signo igual y los paréntesis juegan, en las operaciones, el mismo papel que para nuestras operaciones.



Sandalio descubre, un poco más tarde, otro manuscrito con una igualdad compuesta con las mismas operaciones.

$$((((((((19 \mu 4) \gamma 28) \mu 5) \gamma 2) \mu 3) \gamma 10) \mu x) \gamma y) \mu 13) \gamma 4 = 16$$

Desgraciadamente, dos números son ilegibles y se han sustituido por x e y .

¿Cuántos números menores de 20 no pueden ser valores de y ?

SOLUCIÓN

Hacemos los cálculos:

$$\begin{aligned} &((((((((19 \mu 4) \gamma 28) \mu 5) \gamma 2) \mu 3) \gamma 10) \mu x) \gamma y) \mu 13) \gamma 4 = 16 \Rightarrow (((((((3 \gamma 28) \mu 5) \gamma 2) \mu 3) \gamma 10) \mu x) \gamma y) \mu 13) \gamma 4 = 16 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (((((((84 \mu 5) \gamma 2) \mu 3) \gamma 10) \mu x) \gamma y) \mu 13) \gamma 4 = 16 \Rightarrow (((((((4 \gamma 2) \mu 3) \gamma 10) \mu x) \gamma y) \mu 13) \gamma 4 = 16 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (((((((8 \mu 3) \gamma 10) \mu x) \gamma y) \mu 13) \gamma 4 = 16 \Rightarrow (((((((2 \gamma 10) \mu x) \gamma y) \mu 13) \gamma 4 = 16 \Rightarrow (((20 \mu x) \gamma y) \mu 13) \gamma 4 = 16 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (((20 \mu x) \gamma y) \mu 13) \gamma 4 = 16 \stackrel{y=x}{\Rightarrow} (((20 \mu x) \gamma y) \mu 13) \times 4 = 16 \Rightarrow ((20 \mu x) \gamma y) \mu 13 = \frac{16}{4} = 4 \end{aligned}$$

Llamamos m al cociente de la división de $(20 \mu x) \gamma y$ entre 13 $\Rightarrow (20 \mu x) \gamma y = 13m + 4 \stackrel{y=x}{\Rightarrow} 20 \mu x = \frac{13m + 4}{y}$, que debe ser un valor entero, al ser un resto de una división entera.

Necesariamente $y < 20$ debe dividir a $13m + 4$, siendo m un entero positivo y, claso está, $\frac{13m + 4}{y} < 20$ entero positivo también, resto de una división entera.

Posibilidades de que exista y :

- Si $m = 1 \Rightarrow \frac{13m + 4}{y} = \frac{17}{y} < 20$ se cumple para $y = 1$; $y = 17$
- Si $m = 2 \Rightarrow \frac{13m + 4}{y} = \frac{30}{y} < 20$ se cumple para $y = 2$; $y = 3$; $y = 5$; $y = 6$; $y = 10$; $y = 15$
- Si $m = 4 \Rightarrow \frac{13m + 4}{y} = \frac{56}{y} < 20$ se cumple para $y = 4$; $y = 7$; $y = 8$; $y = 14$; $y = 16$
- Si $m = 7 \Rightarrow \frac{13m + 4}{y} = \frac{95}{y} < 20$ se cumple para $y = 19$

- Si $m = 8 \Rightarrow \frac{13m+4}{y} = \frac{108}{y} < 20$ se cumple para $y = 9$; $y = 18$
- Si $m = 9 \Rightarrow \frac{13m+4}{y} = \frac{121}{y} < 20$ se cumple para $y = 11$

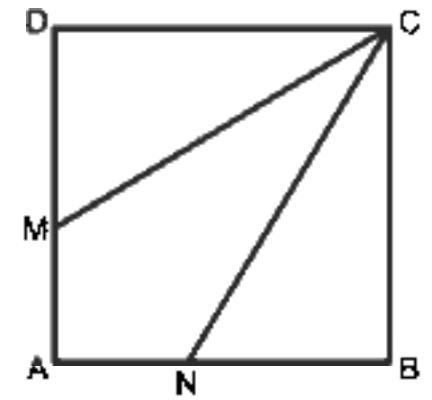
Otros valores de m no muestran más valores de $y < 20$, distintos a los ya indicados, que cumplan las condiciones del problema

Entonces, los únicos valores de $y < 20$ que no cumplen la igualdad son

2 valores: 12 y 13

Los segmentos CM y CN dividen el cuadrado $ABCD$, de lado 3 cm , en tres partes de igual área.

¿Cuánto mide el segmento CM ?



SOLUCIÓN

El área del cuadrado vale $3^2 = 9\text{ cm}^2$, pues los lados miden $CD = DA = AB = BC = 3\text{ cm}$

Como la superficie del triángulo rectángulo CDM es un tercio de la del cuadrado $\Rightarrow \frac{CD \times DM}{2} = \frac{1}{3} \times 9 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3 \times DM}{2} = 3 \Rightarrow DM = 2\text{ cm}$$

Por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo CDM tenemos que $CM^2 = CD^2 + DM^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow CM^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow CM =$

$\sqrt{13}\text{ cm}$

“Agente 002: a partir de ahora, únicamente las cifras 0 y 2 están autorizadas en nuestros códigos cifrados. Así, en vez de escribir 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... se escribirá 0, 2, 20, 22, 200, 202, 220, 222, 2000”

¿Cómo se escribirá, de esta manera, el año 2018?



SOLUCIÓN

Evidentemente, la manera de escribir los números es usando el sistema binario y sustituyendo el dígito 1 por el dígito 2 :

$$0 = 0 \rightarrow 0$$

$$1 = 2^0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$$

$$2 = 2^1 \rightarrow 10 \rightarrow 20$$

$$3 = 2 + 1 = 2^1 + 2^0 \rightarrow 11 \rightarrow 22$$

$$4 = 4 = 2^2 \rightarrow 100 \rightarrow 200$$

$$5 = 4 + 1 = 2^2 + 2^0 \rightarrow 101 \rightarrow 202$$

$$6 = 4 + 2 = 2^2 + 2^1 \rightarrow 110 \rightarrow 220$$

$$7 = 4 + 2 + 1 = 2^2 + 2^1 + 2^0 \rightarrow 111 \rightarrow 222$$

$$8 = 8 = 2^3 \rightarrow 1000 \rightarrow 2000$$

...

Como $2018 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 2 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^1$, ese número escrito en binario es 11111100010 y codificado será

22222200020

86xy

En un papel hay escrito un número de cuatro cifras. Si se borran las dos últimas, el número queda así: 86xy.

Sabiendo que el número original es divisible por 3, 4 y 5, ¿cuál es la suma de las dos cifras que hemos borrado?

SOLUCIÓN

Si el número es divisible por 3 se verifica que $8 + 6 + x + y = 3 \Rightarrow x + y = 3k + 1$

Si el número es divisible por 4 se verifica que $10x + y = 4 \Rightarrow 10x + y = 4m$

Si el número es divisible por 5 se verifica que $y = 5 \Rightarrow y = 5n$

$$\text{Entonces, } \left. \begin{array}{l} x + y = 3k + 1 \\ 10x + y = 4m \\ y = 5n \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 9y = 30k - 4m + 10 \\ y = 5n \end{array} \right\} \Rightarrow 45n = 30k - 4m + 10, \text{ siendo } k, m, n \in \mathbb{N}$$

De lo anterior, $45n = 30k - 4m + 10 \Rightarrow m = \frac{30k - 45n + 10}{4} \Rightarrow m = 7k - 11n + 2 + \frac{2k - n + 2}{4}$, siendo $k, m, n \in \mathbb{N}$

Valores admisibles:

$$k = 1, n = 0 \Rightarrow m = 10 \Rightarrow y = 0, x = 4 \Rightarrow x + y = 4 : \text{ el número es } 8640$$

$$k = 3, n = 0 \Rightarrow m = 25 \Rightarrow y = 0, x = 10 : \text{ imposible}$$

$$k = 5, n = 0 \Rightarrow m = 40 \Rightarrow y = 0, x = 16 : \text{ imposible}$$

...e imposibles los demás valores...

En conclusión, Debe ser $x + y =$

La familia López tiene cuatro hijos.

La suma de las edades del mayor y del menor es igual a la de los dos otros dos, y el producto de las edades del mayor y del menor es solo la mitad del producto de las edades de los otros dos.

Si el mayor tiene menos de 20 años, ¿cuántos años tiene?



SOLUCIÓN

Llamamos a, b, c, d a las edades de los cuatro, de mayor a menor.

Según el enunciado,
$$\left. \begin{array}{l} a+d=b+c \\ ad=\frac{bc}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+d=b+c \\ d=\frac{bc}{2a} \end{array} \right\} \Rightarrow a+\frac{bc}{2a}=b+c \Rightarrow 2a^2-2(b+c)a+bc=0, \text{ ecuación de}$$

segundo grado en $a \Rightarrow a = \frac{b+c \pm \sqrt{(b+c)^2 - 2bc}}{2} = \frac{b+c \pm \sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - 2bc}}{2} \Rightarrow a = \frac{b+c \pm \sqrt{b^2 + c^2}}{2}$, que

debe ser un valor entero positivo. $b, c < 20$ deben pertenecer a una terna pitagórica para que $\sqrt{b^2 + c^2}$ sea entero.

Las posibilidades son:

- $b=4, c=3 \Rightarrow a = \frac{4+3 \pm \sqrt{4^2+3^2}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow a=6 \Rightarrow d = \frac{4 \times 3}{2 \times 6} = 1$: las edades son 6, 4, 3, 1
- $b=8, c=6 \Rightarrow a = \frac{8+6 \pm \sqrt{8^2+6^2}}{2} = \frac{14 \pm 10}{2} \Rightarrow a=12 \Rightarrow d = \frac{8 \times 6}{2 \times 12} = 2$: las edades son 12, 8, 6, 2
- $b=12, c=9 \Rightarrow a = \frac{12+9 \pm \sqrt{12^2+9^2}}{2} = \frac{21 \pm 15}{2} \Rightarrow a=18 \Rightarrow d = \frac{12 \times 9}{2 \times 18} = 3$: las edades son 18, 12, 9, 3
- $b=16, c=12 \Rightarrow a = \frac{16+12 \pm \sqrt{16^2+12^2}}{2} = \frac{28 \pm 20}{2} \Rightarrow a=24$: no cumple la condición del problema $a < 20$
- $b=12, c=5 \Rightarrow a = \frac{12+5 \pm \sqrt{12^2+5^2}}{2} = \frac{17 \pm 13}{2} \Rightarrow a=15 \Rightarrow d = \frac{12 \times 5}{2 \times 15} = 2$: las edades son 15, 12, 5, 2
- $b=15, c=8 \Rightarrow a = \frac{15+8 \pm \sqrt{15^2+8^2}}{2} = \frac{23 \pm 17}{2} \Rightarrow a=20$: no cumple la condición del problema $a < 20$
- Cualquier otra terna tampoco cumplirá la condición citada.

Por lo tanto, el mayor puede tener

6, 12, 15 o 18 años

El número de votantes de mi pueblo bajó en 400 durante un año.

Al año siguiente aumentó en un 6% pero todavía había 40 menos que antes de la bajada.

¿Cuántos había antes de bajar?



SOLUCIÓN

Sea x la cantidad de votantes antes de la bajada. Al año había $x - 400$ votantes.

Al siguiente, al aumentar un 6%, había $(x - 400) \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) = x - 40 \Rightarrow (x - 400) \times \frac{106}{100} = x - 40 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 106x - 42400 = 100x - 4000 \Rightarrow 6x = 38400 \Rightarrow x = \frac{38400}{6} =$$

6400 votantes

Joaquín acaba de arreglar su vieja bicicleta y le ha colocado dos ruedas antiguas. Una de 52 cm de diámetro y la otra de 46 cm de diámetro, incluidas ambas llantas.

Recorre una pista que mide entre 970 m y 1000 m.

Inicialmente, las dos válvulas de las cámaras estaban exactamente en la parte inferior de las ruedas y al llegar nota con sorpresa que ambas siguen exactamente en la parte inferior de las ruedas.

¿Cuál es la longitud de la pista?



SOLUCIÓN

Según el enunciado, ambas ruedas dan una cantidad de vueltas exactas al recorrer la pista. Si llamamos a , b al número de vueltas que ha dado cada una de las dos ruedas, tenemos que $2 \times \pi \times 52 \times a = 2 \times \pi \times 46 \times b$, centímetros recorridos por ambas ruedas.

Simplificando obtenemos que $52a = 46b \Rightarrow 26a = 23b$

Como a , b son valores naturales (número de vueltas) y $\text{mcd}(23,26)=1$ necesariamente $a = 23k$, $k \in \mathbb{N}$ y

como $\frac{2 \times \pi \times 52 \times a}{100}$ son los metros recorridos: $970 < \frac{2 \times \pi \times 52 \times a}{100} < 1000 \Rightarrow 970 < \frac{2 \times \pi \times 52 \times 23k}{100} < 1000 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{97000}{2 \times 52 \times 23 \times \pi} < k < \frac{100000}{2 \times 52 \times 23 \times \pi} \Rightarrow 12,90805 < k < 13,30727 \Rightarrow k = 13$$

El número de vueltas que da la rueda de 52 cm de radio es $a = 23 \times 13 = 299$, por lo que la longitud de la pista

$$\text{es } \frac{2 \times \pi \times 52 \times a}{100} = \frac{2 \times \pi \times 52 \times 299}{100} =$$

976,91 metros

Si

$$\frac{m}{m+2n} = 4$$

¿cuál es el valor de la fracción m/n ?

SOLUCIÓN

$$\frac{m}{m+2n} = 4 \Rightarrow \frac{m+2n}{m} = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + \frac{2n}{m} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2n}{m} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{n}{m} = -\frac{3}{8} \Rightarrow \frac{m}{n} =$$

$$\mathbf{-8/3}$$

El autoproduito de un número natural es el producto de todas sus cifras.

Por ejemplo, el autoproduito de 24 es $2 \times 4 = 8$, el autoproduito de 354 es $3 \times 5 \times 4 = 60$, el autoproduito de 105 es $1 \times 0 \times 5 = 0$.

¿Cuál es la suma de los autoproduitos de todos los números de 10 à 2018, ambos incluidos?



SOLUCIÓN

Hacemos la suma de los autoproduitos de 10 a 99 y la llamamos S_2

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 2 + \dots + 1 \times 9 + 2 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 2 \times 9 + \dots + 9 \times 0 + 9 \times 1 + 9 \times 2 + \dots + 9 \times 9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_2 = 1 \times (0 + 1 + 2 + \dots + 9) + 2 \times (0 + 1 + 2 + \dots + 9) + \dots + 9 \times (0 + 1 + 2 + \dots + 9) \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_2 = (1 + 2 + \dots + 9) \times (1 + 2 + \dots + 9) = (1 + 2 + \dots + 9)^2 \end{aligned}$$

Hacemos la suma de los autoproduitos de 100 a 999 y la llamamos S_3

$$\begin{aligned} S_3 &= 1 \times 0 \times 0 + 1 \times 0 \times 1 + 1 \times 0 \times 2 + \dots + 1 \times 0 \times 9 + 1 \times 1 \times 0 + 1 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 2 + \dots + 1 \times 1 \times 9 + \dots + \\ &+ 1 \times 9 \times 0 + 1 \times 9 \times 1 + 1 \times 9 \times 2 + \dots + 1 \times 9 \times 9 + \dots + 9 \times 9 \times 0 + 9 \times 9 \times 1 + 9 \times 9 \times 2 + \dots + 9 \times 9 \times 9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_3 = 1 \times 0 \times (0 + 1 + 2 + \dots + 9) + 1 \times 1 \times (0 + 1 + 2 + \dots + 9) + \dots + 9 \times 9 \times (0 + 1 + 2 + \dots + 9) \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_3 = (1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times 2 + \dots + 9 \times 9) \times (0 + 1 + 2 + \dots + 9) = (1 + 2 + \dots + 9)^2 \times (1 + 2 + \dots + 9) \Rightarrow \\ &S_3 = (1 + 2 + \dots + 9)^3 \end{aligned}$$

Es evidente que la suma de los autoproduitos de 1000 a 1999 es la suma de los autoproduitos de 1000 a 1099 más la suma de los autoproduitos de 1100 a 1999

Si llamamos a dicha suma S_4 , la primera parte es nula porque todos los números poseen algún cero como cifra y, entonces, es evidente que $S_4 = 1 \times S_3 = S_3 = (1 + 2 + \dots + 9)^3$

Además, la suma de los autoproduitos de 2000 a 2018 también es nula por la misma razón que antes.

En resumen, la suma pedida es $S_2 + S_3 + S_4 = (1 + 2 + \dots + 9)^2 + (1 + 2 + \dots + 9)^3 + (1 + 2 + \dots + 9)^3$ y como

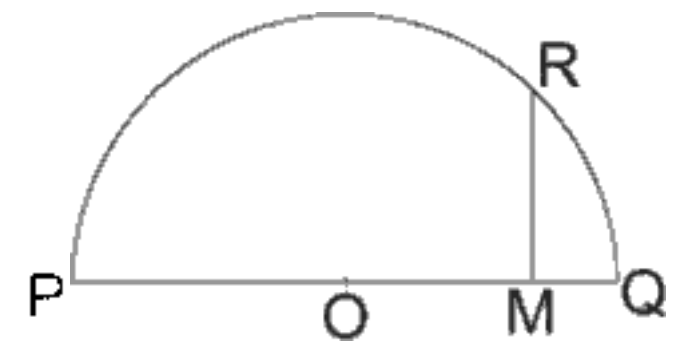
$$1 + 2 + \dots + 9 = \frac{(1+9) \times 9}{2} = 45, \text{ suma de los nueve primeros términos de la progresión aritmética formada}$$

por los números naturales, $S_2 + S_3 + S_4 = 45^2 + 45^3 + 45^3 =$

184275

En la semicircunferencia de la figura, con centro O, $OM = 3 \times MQ$ y RM es perpendicular a PQ.

¿Cuál es la razón entre PR y RM?



SOLUCIÓN

Sea $MQ = x \Rightarrow OM = 3 \times MQ = 3x \Rightarrow PQ = 2 \times OQ = 2 \times (OM + MQ) \Rightarrow$
 $\Rightarrow PQ = 2 \times OQ = 2 \times (3x + x) \Rightarrow PQ = 8x$ y $PM = PQ - MQ = 7x$

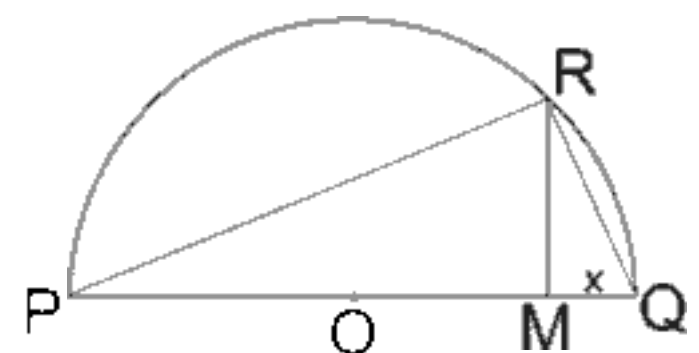
Si aplicamos el teorema de la altura en el triángulo rectángulo PRQ tenemos que $RM^2 = PM \times MQ = 7x \times x \Rightarrow RM^2 = 7x^2$

En el triángulo rectángulo QMR aplicamos el teorema de Pitágoras:

$RQ^2 = RM^2 + MQ^2 = 7x^2 + x^2 = 8x^2$ y, entonces, en el triángulo rectángulo PRQ se verifica, por el mismo teorema, que $PR^2 = PQ^2 - RQ^2 = (8x)^2 - 8x^2 = 64x^2 - 8x^2 = 56x^2$

Concluyendo, la razón $\frac{PR^2}{RM^2} = \frac{56x^2}{7x^2} = 8 \Rightarrow \frac{PR}{RM} = \sqrt{8} =$

$$2\sqrt{2}$$



Dos números naturales tienen un hijo natural yuxtaponiendo uno detrás de otro.

Se dice que el nacimiento es perfecto si el número resultante es un cuadrado perfecto así como cada uno de los dos números iniciales. Por ejemplo, (324 , 9) es el par que da el nacimiento perfecto más pequeño que es mayor de 2018, ya que 324, 9 y 3249 son cuadrados.



¿Cuántos nacimientos perfectos hay que den valores menores que 2018?

SOLUCIÓN

Como $44^2 = 1936$ y $45^2 = 2025$, buscaremos todos los nacimientos menores o iguales que $44^2 = 1936$

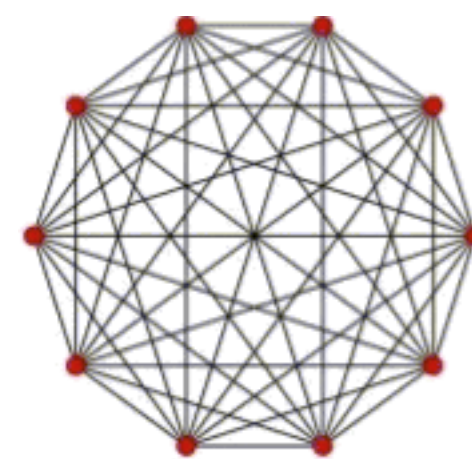
Y obtenemos:

- Un nacimiento perfecto de dos cifras el par (4 , 9) con el nacimiento $49 : 4 = 2^2, 9 = 3^2, 49 = 7^2$
- De tres cifras
 - el par (16 , 9) con el nacimiento $169 : 16 = 4^2, 9 = 3^2, 169 = 13^2$
 - el par (36 , 1) con el nacimiento $361 : 36 = 6^2, 1 = 1^2, 361 = 19^2$
- De cuatro cifras
 - el par (1 , 225) con el nacimiento $1225 : 1 = 1^2, 225 = 15^2, 1225 = 35^2$
 - el par (144 , 4) con el nacimiento $1444 : 144 = 12^2, 4 = 2^2, 1444 = 38^2$
 - el par (16 , 81) con el nacimiento $1681 : 16 = 4^2, 81 = 9^2, 1681 = 41^2$

Total,

6 nacimientos perfectos menores de 2018

¿Cuánto mide cada ángulo de un polígono convexo regular de 54 diagonales?



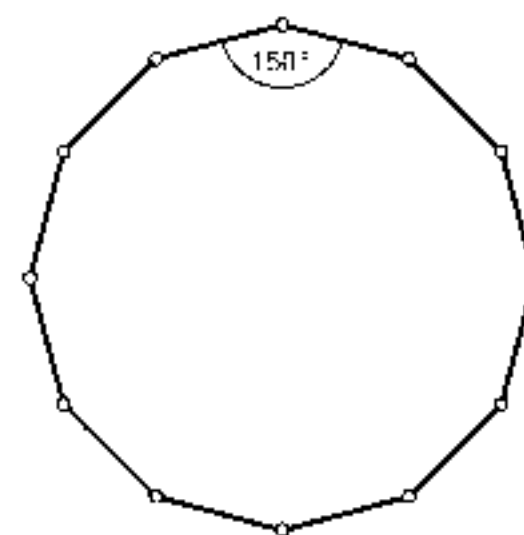
SOLUCIÓN

El número de diagonales de un polígono convexo es el número de segmentos distintos que podemos formar uniendo sus vértices dos a dos menos el número de lados.

Si n es el número de vértices (o lados) del polígono, el número de diagonales es $\binom{n}{2} - n = \frac{n \times (n-1)}{2} - n \Rightarrow$
 $\Rightarrow \binom{n}{2} - n = \frac{n^2 - n}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} = 54 \Rightarrow n^2 - 3n - 108 = 0 \Rightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 432}}{2} = \frac{3 \pm 21}{2} \Rightarrow n = 12$, número de lados o vértices de un dodecágono regular.

En la figura adjunta se muestra uno con su descomposición en triángulos isósceles trazando las diagonales que pasan por su centro.

Los ángulos centrales miden $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ cada uno, por lo que cada ángulo de cada vértice de los triángulos será la mitad del suplementario a 30° y, como el ángulo formado por los lados del dodecágono será el doble del citado, este será el suplementario a 30° : $180^\circ - 30^\circ =$



150°

Rosendo multiplica por 7 un número enorme, de 2018 cifras.

El resultado es otro número que tiene todas sus cifras iguales a 9 excepto la de las unidades.

¿Cuál es esa cifra?



SOLUCIÓN

Si la última cifra (por la izquierda) del resultado del producto es un 9 quiere decir que la cifra correspondiente al factor es 1 y se han llevado, del producto anterior de cifras, 2 : $1 \times 7 + 2 = 9$

$$\begin{array}{r} 1\ldots\ldots\ldots \\ \times 7 \\ \hline 9\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Eso quiere decir que la penúltima cifra del factor es 4 (para que lleve al siguiente producto 2) pues $4 \times 7 = 28$ y se lleva, del producto anterior de cifras, 1 : $4 \times 7 + 1 = 29$

$$\begin{array}{r} 14\ldots\ldots\ldots \\ \times 7 \\ \hline 99\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Razonando de manera análoga llegamos a que el producto es así:

$$\begin{array}{r} 1428571\ldots\ldots \\ \times 7 \\ \hline 9999999\ldots\ldots \end{array}$$

y la secuencia 142857 se va repitiendo a lo largo del factor desconocido.

Como $2018 = 336 \times 6 + 2$ el factor tiene 336 bloques seguidos de 142857 y acaba en dos dígitos más que deberán ser tales que, multiplicados por 7, se obtenga un nueve (9) en las decenas y otra cifra como unidad.

Pueden ser 13, pues $13 \times 7 = 91$, o 14, pues $14 \times 7 = 98$. Por tanto, la cifra de las unidades que se busca es

1 u 8

En una bolsa con 200 bolas, el 95% son rojas.

Quitamos algunas bolas rojas y, entre las que quedan, el 75% son rojas.

¿Cuántas bolas rojas hemos quitado de la bolsa?



SOLUCIÓN

Sea x el número de bolas rojas que quitamos.

Si de 200 bolas había un 95% de bolas rojas, había $\frac{200 \times 95}{100} = 190$ bolas rojas.

Quitamos x bolas rojas por lo que quedan, en total, $200 - x$ bolas de las cuales $190 - x$ son rojas y representan el 75% de todas: $190 - x = \frac{(200 - x) \times 75}{100} \Rightarrow 19000 - 100x = 15000 - 75x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 100x - 75x = 19000 - 15000 \Rightarrow 25x = 4000$$

Por lo tanto, quitamos $x = \frac{4000}{25} =$

160 bolas rojas

¿Cuál es la mínima longitud de cuerda necesaria para unir tres barras de hierro de sección circular de 4 cm de diámetro, sabiendo que se necesitan al menos 10 cm para hacer el nudo?



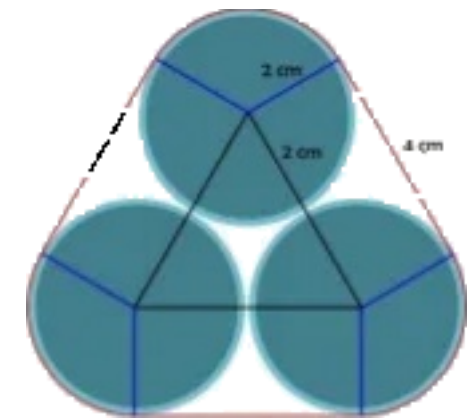
SOLUCIÓN

La disposición de los tubos que permite unirlos con menos cuerda es la que se ve en la imagen de la derecha. La cuerda que envuelve a los tres tubos (en rojo en la figura adjunta) se compone de una longitud igual a la circunferencia de un tubo (tres arcos de cuerda que, unidos, equivalen a la circunferencia) más tres veces el diámetro (los segmentos rectos):

$$2\pi r + 3 \times 2r = 2\pi r + 6r, \text{ siendo } r = 2 \text{ cm} \Rightarrow 2\pi r + 6r = 2\pi \times 2 + 6 \times 2 = 4\pi + 12 \text{ cm}$$

A esta longitud debemos sumar los mínimos centímetros necesarios para hacer el nudo y tendremos ya lo que necesitamos, que son $4\pi + 12 + 10 = 4\pi + 22 =$

34,57 cm



De entre todos los números enteros positivos x e y tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$$

¿cuál es el mayor valor de y ?

SOLUCIÓN

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{12} - \frac{1}{x} = \frac{x-12}{12x} \Rightarrow y = \frac{12x}{x-12}$$

Según la igualdad original, a mayores valores de x corresponderán menores valores de $\frac{1}{x}$ y, por tanto, mayores valores de $\frac{1}{y}$ que significan menores valores de y . Y viceversa.

Es decir, el mayor valor entero positivo de y se corresponde con el menor valor entero positivo posible de x que, según la igualdad deducida, es $x = 13 \Rightarrow y = \frac{12 \times 13}{13 - 12} \Rightarrow y =$

156

La famosa poción mágica del druida Panoramix debe, para preservar sus virtudes, conservarse en un gran caldero cilíndrico con tapa (ambos, caldero y tapa, de grosor insignificante) y respetando las siguientes condiciones:

- las medidas de diámetro y altura de este caldero son números enteros de *pies galos*. El *pie galo* (pg) difiere ligeramente del *pie romano*.
- el número de *pies galos cuadrados* (pg^2), que expresan el área del caldero incluida la tapa, y el número de *pies cúbicos galos* (pg^3), que expresan el volumen del caldero, son iguales.
- La altura del caldero es menor de 4 *pies galos*.



¿Cuál es el diámetro del caldero de la poción mágica expresado en *pies galos* ?

SOLUCIÓN

Llamamos d , h al diámetro y a la altura, en *pies galos*, del cilindro. Ambos valores son enteros. El radio de las bases es $\frac{d}{2}$ pg.

La superficie del cilindro (incluida la tapa) es $hd\pi + 2\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi \text{ pg}^2$, área lateral más el área de las dos bases.

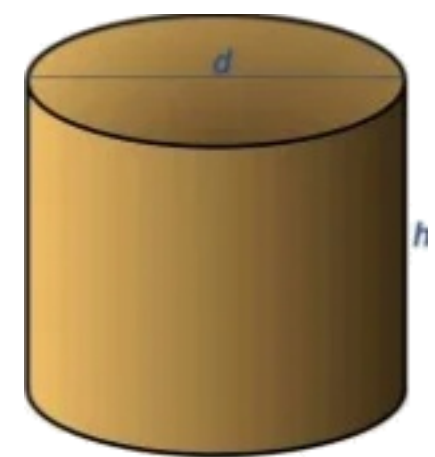
El volumen del cilindro es $h\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi \text{ pg}^3$, altura multiplicada por el área de la base.

$$\text{Entonces, } hd\pi + 2\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = h\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi \Rightarrow \left(h + \frac{d}{2}\right) \times d\pi = \frac{hd}{4} \times d\pi \stackrel{d \neq 0}{\Rightarrow} h + \frac{d}{2} = \frac{hd}{4} \Rightarrow 4h + 2d = hd \Rightarrow$$

$$\Rightarrow hd - 2d = 4h \Rightarrow d = \frac{4h}{h-2} \Rightarrow h > 2$$

$$\text{Como } h < 4 \text{ entero} \Rightarrow h = 3 \Rightarrow d = \frac{4 \times 3}{3-2} =$$

12 pg



Si $2000^2 - 1996^2 = 111ak^2$, con a y k enteros, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar $k-a$?



SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 2000^2 - 1996^2 = 111ak^2 &\Rightarrow 111ak^2 = (2000 + 1996) \times (2000 - 1996) \Rightarrow 111ak^2 = 3996 \times 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow ak^2 &= \frac{3996 \times 4}{111} \Rightarrow ak^2 = 36 \times 4 = 2^2 \times 3^2 \times 2^2 \Rightarrow ak^2 = 2^4 \times 3^2 \end{aligned}$$

La diferencia $k - a$ será máxima si k es positivo y el mayor valor posible, y a , que siempre es positivo, debe tener el menor valor posible.

Esto se cumple cuando $a = 1, k^2 = 2^4 \times 3^2 \Rightarrow a = 1, k = 2^2 \times 3 \Rightarrow a = 1, k = 12 \Rightarrow k - a = 12 - 1 =$

11