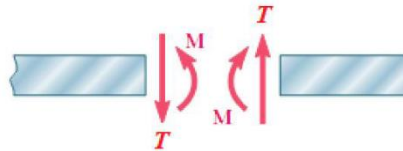


Rappel :

- Afin d'assurer la compatibilité entre les signes des efforts et des moments calculés à droite et à gauche d'une section, la convention de signe suivante est utilisée :



- Les contraintes dans une poutre en flexion peuvent être exprimées comme suit :

$$\sigma = \frac{M \times y}{I_{AN}}$$

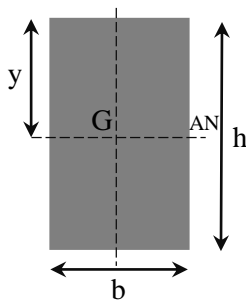
où

M : Est le moment de flexion.

y : Est la distance entre l'axe neutre (AN) et la frontière d'une section transversale de la poutre (voir les formes géométriques montrés ci-dessous).

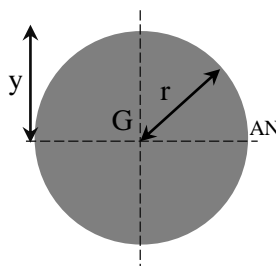
I_{AN} : Est le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre (AN).

- Moment d'inertie de quelques formes géométriques :



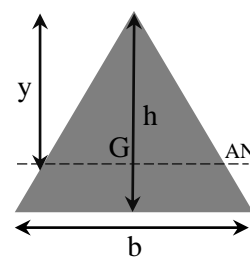
$$I_{AN} = \frac{b \times h^3}{12}$$

$$y = \frac{h}{2}$$



$$I_{AN} = \frac{\pi \times D^4}{64}$$

$$y = r$$



$$I_{AN} = \frac{\pi \times D^4}{64}$$

$$y = \frac{2 \times h}{3}$$

Solution de l'exercice N°1 (I) :

- Les réactions R_{Ay} et R_{By} :

on a :

$$+\uparrow \sum F_{ex} / y = 0$$

donc

$$R_{Ay} - 6 - (2 \times 1.5) + R_{By} = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 6 + 3$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 9 \text{ -----} \rightarrow (1)$$

on a aussi

$$+\curvearrowright \sum M / A = 0$$

donc

$$6 \times (1) + 3 \times ((1.5 / 2) + 0.5 + 2) - R_{By} \times (4) = 0$$

$$R_{By} \times (4) = 6 + 9.75$$

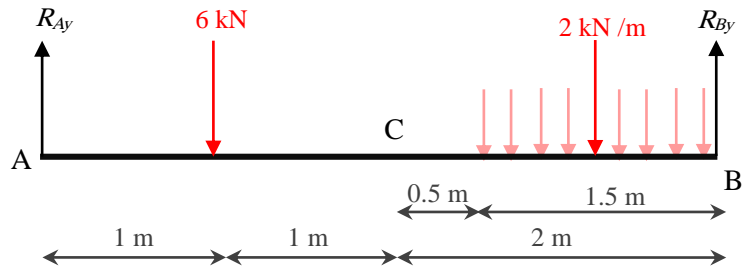
$$R_{By} = \frac{15.75}{4}$$

$$R_{By} = 3.9375 \text{ kN} \text{ -----} \rightarrow (2)$$

La substitution de (2) dans l'équation (1) conduit à

$$R_{Ay} + 3.937 = 9$$

$$R_{Ay} = 5.0625 \text{ kN}$$



- L'effort tranchant et le moment fléchissant au point C :

on a :

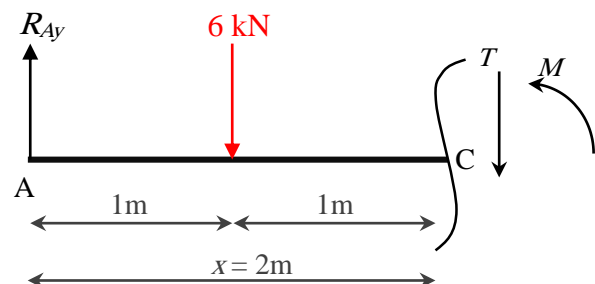
$$\sum F / y = 0$$

donc

$$T + 6 - R_{Ay} = 0$$

$$T = -6 + 5.0625$$

$$T = -0.9375 \text{ kN}$$



on a :

$$\sum M / C = 0$$

donc

$$M - R_{Ay} \times (2) + 6 \times (1) = 0$$

$$M = R_{Ay} \times (2) - 6 \times (1)$$

$$M = 5.0625 \times (2) - 6$$

$$M = 4.125 \text{ kN.m}$$

Solution de l'exercice N°1 (II) :

- *L'effort tranchant et le moment fléchissant au $x=0.5\text{ m}$:*

on a :

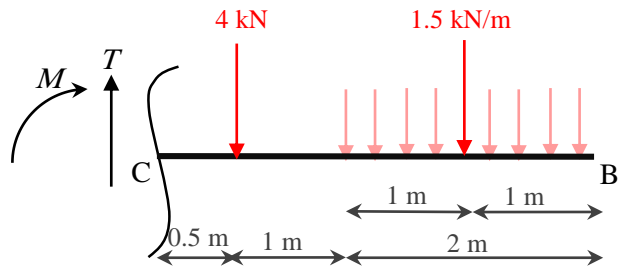
$$\sum F/y = 0$$

donc

$$T - 4 - (1.5 \times 2) = 0$$

$$T = 4 + (1.5 \times 2)$$

$$\boxed{T = 7 \text{ kN}}$$



on a :

$$\sum M/C = 0$$

donc

$$M + 4 \times (0.5) + (1.5 \times 2) \times (1 + 1 + 0.5) = 0$$

$$M = -4 \times (0.5) - (3) \times (2.5)$$

$$M = -2 - 7.5$$

$$\boxed{M = -9.5 \text{ kN.m}}$$

Solution de l'exercice N°2 (I) :

- Les réactions R_{Ay} et R_{By} :

on a :

$$+\uparrow \sum F_{ex} / y = 0$$

donc

$$R_{Ay} - P + R_{By} = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} = P \text{ -----} \rightarrow (1)$$

on a aussi

$$+\curvearrowright \sum M / A = 0$$

donc

$$P \times \left(\frac{L}{3}\right) + \frac{PL}{3} - R_{By} \times (L) = 0$$

$$R_{By} \times (L) = \frac{P \times L}{3} + \frac{P \times L}{3}$$

$$R_{By} \times (L) = \frac{2 \times P \times L}{3}$$

$$R_{By} = \frac{2 \times P \times L}{3 \times L}$$

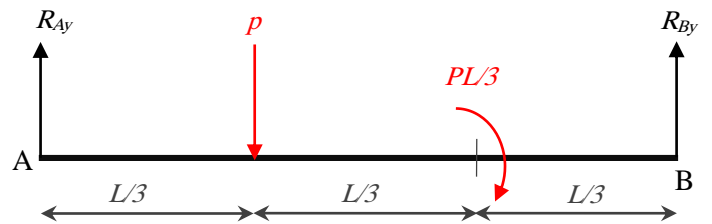
$$\boxed{R_{By} = \frac{2 \times P}{3}} \text{ -----} \rightarrow (2)$$

La substitution de (2) dans l'équation (1) conduit à

$$R_{Ay} + \frac{2 \times P}{3} = P$$

$$R_{Ay} = \frac{3 \times P}{3} - \frac{2 \times P}{3}$$

$$\boxed{R_{Ay} = \frac{P}{3}}$$



- L'effort tranchant et le moment fléchissant au trois sections :

Section (01) : $0 \leq x \leq L/3$

on a :

$$\sum F/y = 0$$

donc

$$T - R_{Ay} = 0$$

$$T = R_{Ay}$$

$$T = \frac{P}{3} \text{ -----} \rightarrow (1)$$

on a :

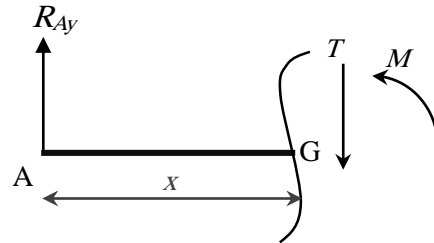
$$\sum M/G = 0$$

donc

$$M - R_{Ay} \times x = 0$$

$$M = R_{Ay} \times x$$

$$M = \frac{P}{3} \times x \text{ -----} \rightarrow (2)$$



La substitution de x dans (1) et (2) conduit à

à $x = 0$

$$\boxed{T = \frac{P}{3}}$$

et

$$M = \frac{P}{3} \times (0)$$

$$\boxed{M = 0}$$

à $x = L/3$

$$\boxed{T = \frac{P}{3}}$$

et

$$M = \frac{P}{3} \times \left(\frac{L}{3}\right)$$

$$\boxed{M = \frac{P \times L}{9}}$$

Section (02) : $L/3 \leq x \leq (2 \times L)/3$

on a :

$$\sum F/y = 0$$

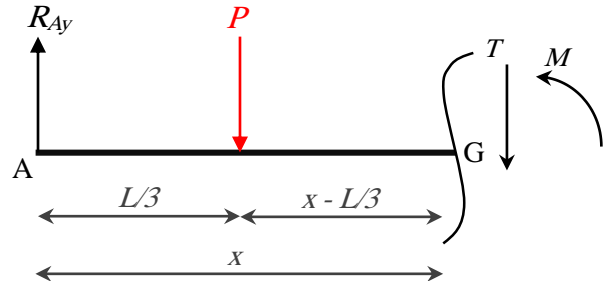
donc

$$T + P - R_{Ay} = 0$$

$$T = R_{Ay} - p$$

$$T = \frac{p}{3} - \frac{3 \times p}{3}$$

$$T = -\frac{2 \times P}{3} \text{ -----} \rightarrow (1)$$



on a :

$$\sum M/G = 0$$

donc

$$M + p \times (x - \frac{L}{3}) - R_{Ay} \times (x) = 0$$

$$M = R_{Ay} \times (x) - p \times (x - \frac{L}{3})$$

$$M = \frac{p}{3} \times (x) - p \times (x - \frac{L}{3}) \text{ -----} \rightarrow (2)$$

La substitution de x dans (1) et (2) conduit à

$$\text{à } x = L/3$$

$$\boxed{T = -\frac{2 \times P}{3}}$$

et

$$M = \frac{P}{3} \times (\frac{L}{3}) - P \times (\frac{L}{3} - \frac{L}{3})$$

$$M = \frac{P \times L}{9} - 0$$

$$\boxed{M = \frac{P \times L}{9}}$$

$$\text{à } x = (2 \times L)/3$$

$$\boxed{T = -\frac{2 \times P}{3}}$$

et

$$M = \frac{P}{3} \times (\frac{2 \times L}{3}) - P \times (\frac{2 \times L}{3} - \frac{L}{3})$$

$$M = \frac{2 \times P \times L}{9} - \frac{3 \times P \times L}{9}$$

$$\boxed{M = -\frac{P \times L}{9}}$$

Section (03) : $(2 \times L)/3 \leq x \leq L$

on a :

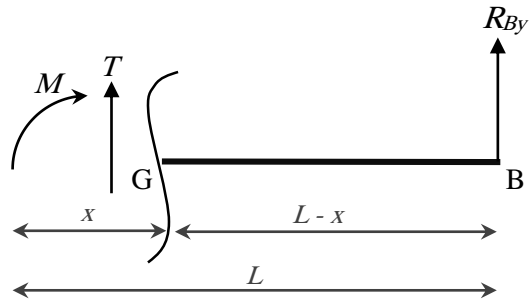
$$\sum F/y = 0$$

donc

$$T + R_{By} = 0$$

$$T = -R_{By}$$

$$T = -\frac{2 \times p}{3} \text{ -----} \rightarrow (1)$$



on a :

$$\sum M/G = 0$$

donc

$$M - R_{By}(L - x) = 0$$

$$M = R_{By}(L - x)$$

$$M = \frac{2 \times P}{3}(L - x) \text{ -----} \rightarrow (2)$$

La substitution de x dans (1) et (2) conduit à

$$\text{à } x = (2 \times L)/3$$

$$\boxed{T = -\frac{2 \times P}{3}}$$

et

$$M = \frac{2 \times P}{3} \left(\frac{3 \times L}{3} - \frac{2 \times L}{3} \right)$$

$$M = \frac{2 \times P}{3} \left(\frac{L}{3} \right)$$

$$\boxed{M = \frac{2 \times P \times L}{9}}$$

$$\text{à } x = L$$

$$\boxed{T = -\frac{2 \times P}{3}}$$

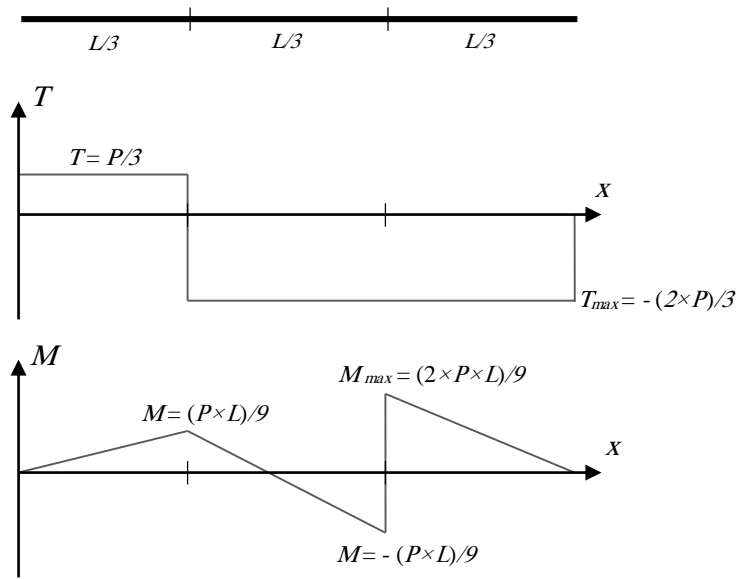
et

$$M = \frac{2 \times P}{3}(L - L)$$

$$M = \frac{2 \times P}{3}(0)$$

$$\boxed{M = 0}$$

- Les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant :



Solution de l'exercice N°2 (II) :

- L'effort tranchant et le moment fléchissant au deux sections :

Section (01) : $0 \leq x \leq L/2$

on a :

$$\sum F/y = 0$$

donc

$$T - q \times \frac{L}{2} = 0$$

$$T = q \times \frac{L}{2} \text{ -----} \rightarrow (1)$$

on a :

$$\sum M/G = 0$$

donc

$$M + q \times \frac{L}{2} \times \left(L - x - \frac{L}{4} \right) = 0$$

$$M = -q \times \frac{L}{2} \times \left(\frac{3 \times L}{4} - x \right) \text{ -----} \rightarrow (2)$$

La substitution de x dans (1) et (2) conduit à

à $x = 0$

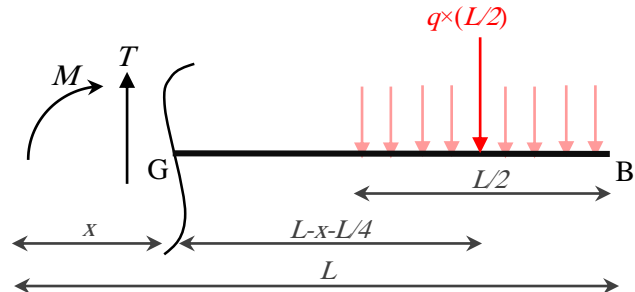
$$\boxed{T = \frac{q \times L}{2}}$$

et

$$M = -q \times \frac{L}{2} \times \left(\frac{3 \times L}{4} - (0) \right)$$

$$M = -q \times \frac{L}{2} \times \left(\frac{3 \times L}{4} \right)$$

$$\boxed{M = -\frac{3 \times q \times L^2}{8}}$$



à $x = L/2$

$$\boxed{T = \frac{q \times L}{2}}$$

et

$$M = -q \times \frac{L}{2} \times \left(\frac{3 \times L}{4} - \left(\frac{L}{2} \right) \right)$$

$$M = -q \times \frac{L}{2} \times \left(\frac{3 \times L}{4} - \left(\frac{2 \times L}{4} \right) \right)$$

$$\boxed{M = -\frac{q \times L^2}{8}}$$

Section (02) : $L/2 \leq x \leq L$

on a :

$$\sum F/y = 0$$

donc

$$T - q \times (L - x) = 0$$

$$T = q \times (L - x) \text{ -----} \rightarrow (1)$$

on a :

$$\sum M/G = 0$$

donc

$$M + q \times (L - x) \times \frac{(L - x)}{2} = 0$$

$$M = -q \times \frac{(L - x)^2}{2} \text{ -----} \rightarrow (2)$$

La substitution de x dans (1) et (2) conduit à

$$\text{à } x = L/2$$

$$T = q \times \left(\frac{2 \times L}{2} - \frac{L}{2} \right)$$

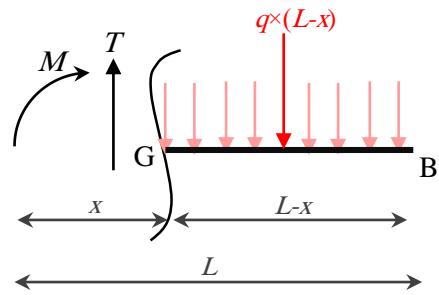
$$\boxed{T = \frac{q \times L}{2}}$$

et

$$M = -q \times \frac{\left(\frac{2 \times L}{2} - \frac{L}{2} \right)^2}{2}$$

$$M = -q \times \frac{\left(\frac{L^2}{4} \right)}{2}$$

$$\boxed{M = -\frac{q \times L^2}{8}}$$



$$\text{à } x = L$$

$$T = q \times (L - L)$$

$$\boxed{T = 0}$$

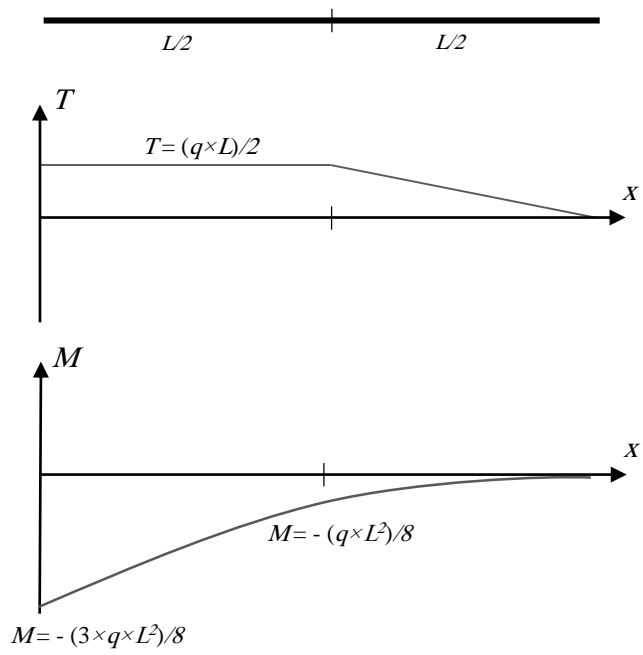
et

$$M = -q \times \frac{(L - L)^2}{2}$$

$$M = -q \times \frac{(0)^2}{2}$$

$$\boxed{M = 0}$$

- Les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant :



Solution de l'exercice N°2 (III) :

- Les réactions R_{Ay} et R_{By} :

on a :

$$+\uparrow \sum F_{ex} / y = 0$$

donc

$$R_{Ay} - (q_1 \times 2.4) - (q_2 \times 2.4 + R_{By}) = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} = (q_1 \times 2.4) + (q_2 \times 2.4)$$

$$R_{Ay} + R_{By} = (1 \times 2.4) + (2 \times \frac{1}{2} \times 2.4)$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 2.4 + 2.4$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 4.8 \text{ -----} \rightarrow (1)$$

on a aussi

$$+\curvearrowright M / A = 0$$

donc

$$\left[q_1 \times 2.4 \times \left(\frac{2.4}{2} \right) \right] + \left[q_1 \times 2.4 \times \left(\frac{2}{3} \times 2.4 \right) \right] - R_{Ay} \times 2.4 = 0$$

$$R_{Ay} \times 2.4 = \left[q_1 \times 2.4 \times \left(\frac{2.4}{2} \right) \right] + \left[q_1 \times 2.4 \times \left(\frac{2}{3} \times 2.4 \right) \right]$$

$$R_{Ay} \times 2.4 = \left[1 \times 2.4 \times \left(\frac{2.4}{2} \right) \right] + \left[2 \times \frac{1}{2} \times 2.4 \times \left(\frac{2}{3} \times 2.4 \right) \right]$$

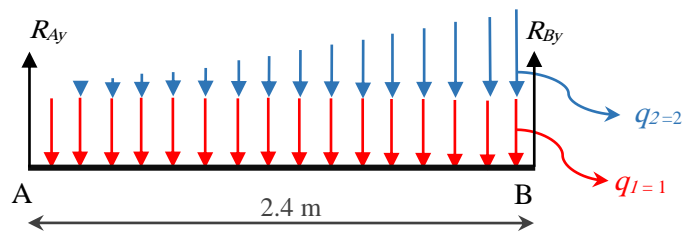
$$R_{Ay} \times 2.4 = 2.88 + 3.84$$

$$R_{Ay} = \frac{6.72}{2.4}$$

$$\boxed{R_{Ay} = 2.8 \text{ kN}} \text{ -----} \rightarrow (2)$$

La substitution de (2) dans l'équation (1) conduit à

$$R_{Ay} + 2.8 = 4.8$$



$$R_{Ay} = 4.8 - 2.8$$

$$R_{Ay} = 2 \text{ kN}$$

- L'effort tranchant et le moment fléchissant au trois sections :

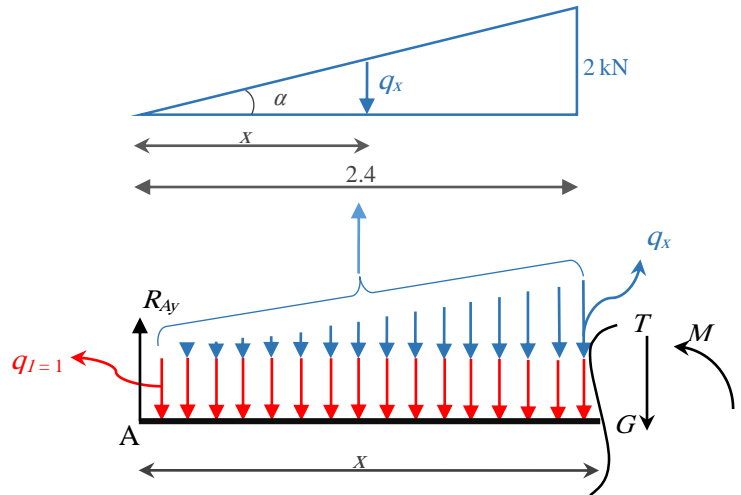
de la figure ci-contre on a :

$$\tan \alpha = \frac{q_x}{x} = \frac{2}{2.4}$$

donc

$$q_x = \frac{2 \times x}{2.4}$$

$$q_x = 0.833 \times x$$



Section : $0 \leq x \leq 2.4$

on a :

$$\sum F/y = 0$$

donc

$$T + q \times (x) + \frac{1}{2} \times q_x \times (x) - R_{Ay} = 0$$

$$T = R_{Ay} - q \times (x) - \frac{1}{2} \times q_x \times (x)$$

$$T = 2 - 1 \times (x) - \frac{1}{2} \times 0.833 \times x \times (x)$$

$$T = 2 - x - 0.416 \times x^2 \text{ -----} \rightarrow (1)$$

on a :

$$\sum M/G = 0$$

donc

$$M - R_{Ay} \times x + \left[q \times x \times \left(\frac{x}{2} \right) \right] + \left[\frac{1}{2} \times q_x \times x \times \left(\frac{x}{3} \right) \right] = 0$$

$$M = R_{Ay} \times x - \left[q \times x \times \left(\frac{x}{2} \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \times q_x \times x \times \left(\frac{x}{3} \right) \right]$$

$$M = 2 \times x - \left[1 \times x \times \left(\frac{x}{2} \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \times (0.833 \times x) \times x \times \left(\frac{x}{3} \right) \right]$$

$$M = 2 \times x - \left(\frac{x^2}{2} \right) - (0.1388 \times x^3) \text{ -----} \rightarrow (2)$$

La substitution de x dans (1) et (2) conduit à

$$\text{à } x = 0$$

$$\text{à } x = 2.4$$

$$T = 2 - (0) - 0.416 \times (0)^2$$

$$T = 2 - (2.4) - 0.416 \times (2.4)^2$$

$$\boxed{T = 2 \text{ kN}}$$

$$\boxed{T = -2.8 \text{ kN}}$$

et

et

$$M = 2 \times (0) - \left(\frac{(0)^2}{2} \right) - (0.1388 \times (0)^3)$$

$$M = 2 \times (2.4) - \left(\frac{(2.4)^2}{2} \right) - (0.1388 \times (2.4)^3)$$

$$\boxed{M = 0}$$

$$M = 4.8 - 2.88 - 1.92$$

$$\boxed{M = 0}$$

La substitution de x résultant de ($T=0$) dans l'équation (2) conduit à déterminé la valeur maximale du moment fléchissant (M_{max})

on a :

$$T = 2 - x - 0.416 \times x^2 = 0$$

$$-0.416 \times x^2 - x + 2 = 0 \text{ -----} \rightarrow (3)$$

Pour que (3) soit égal à zéro, x doit prendre les valeurs $x_1 = -3.70$ et $x_2 = 1.29$

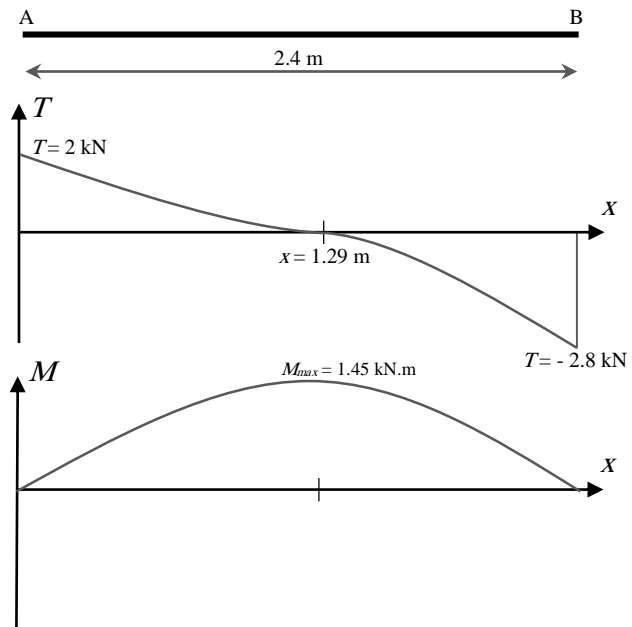
$$x_1 \in [0, 2.4] \text{ et } x_2 \notin [0, 2.4]$$

La substitution de la valeur de x_1 dans (2) conduit à

$$M_{max} = 2 \times (1.29) - \left(\frac{(1.29)^2}{2} \right) - (0.1388 \times (1.29)^3)$$

$$\boxed{M_{max} = 1.45 \text{ kN}}$$

- Les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant :



Solution de l'exercice N°2 (IV) :

- Les réactions R_{Ay} et R_{By} :

on a :

$$+\uparrow \sum F_{ex} / y = 0$$

donc

$$R_{Ay} - 12 \times (1.6) + R_{By} = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 12 \times (1.6)$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 19.2 \text{ -----} \rightarrow (1)$$

on a aussi

$$+\curvearrowright \sum M / A = 0$$

donc

$$(12 \times 1.6) \times \left(\frac{1.6}{2} \right) - R_{By} \times (3.2) - 3 = 0$$

$$R_{By} \times (3.2) = (12 \times 1.6) \times 0.8 - 3$$

$$R_{By} = \frac{12.36}{3.2}$$

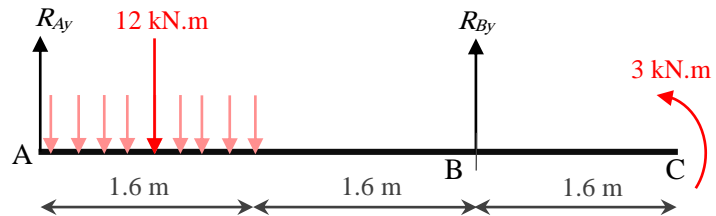
$$\boxed{R_{By} = 3.86 \text{ kN}} \text{ -----} \rightarrow (2)$$

La substitution de (2) dans l'équation (1) conduit à

$$R_{Ay} + 3.86 = 19.2$$

$$R_{Ay} = 19.2 - 3.86$$

$$\boxed{R_{Ay} = 15.34 \text{ kN}}$$



- L'effort tranchant et le moment fléchissant au trois sections :

Section (01) : $0 \leq x \leq 1.6$

on a :

$$\sum F/y = 0$$

donc

$$T + 12 \times (x) - R_{Ay} = 0$$

$$T = R_{Ay} - 12 \times x$$

$$T = 15.34 - 12 \times x \text{ -----} \rightarrow (1)$$

on a :

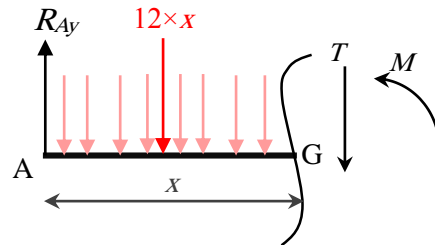
$$\sum M/G = 0$$

donc

$$M + (12 \times x) \times \frac{x}{2} - R_{Ay} \times x = 0$$

$$M = (R_{Ay} \times x) - \left(\frac{12 \times x^2}{2} \right)$$

$$M = (15.34 \times x) - 6 \times x^2 \text{ -----} \rightarrow (2)$$



La substitution de x dans (1) et (2) conduit à

à $x = 0$

$$T = 15.34 - 12 \times (0)$$

$$\boxed{T = 15.34 \text{ kN}}$$

et

$$M = (15.34 \times 0) - 6 \times 0$$

$$\boxed{M = 0}$$

à $x = 1.6$

$$T = 15.34 - 12 \times (1.6)$$

$$\boxed{T = -3.86 \text{ kN}}$$

et

$$M = (15.34 \times 1.6) - 6 \times 1.6$$

$$M = 24.544 - 15.36$$

$$\boxed{M = 9.18 \text{ kN.m}}$$

Section (02) : $1.6 \leq x \leq 3.2$

on a :

$$\sum F/y = 0$$

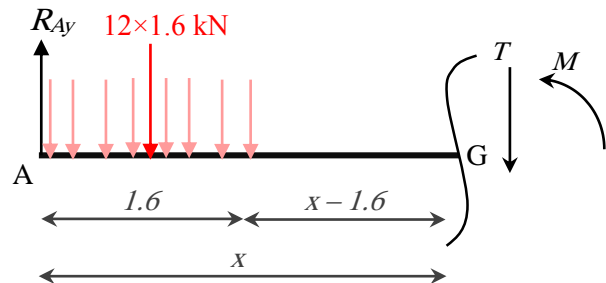
donc

$$T + 12 \times (1.6) - R_{Ay} = 0$$

$$T = R_{Ay} - 12 \times (1.6)$$

$$T = 15.34 - 19.2$$

$$T = -3.86 \text{ -----} \rightarrow (1)$$



on a :

$$\sum M/G = 0$$

donc

$$M + (12 \times 1.6) \times (x - \frac{1.6}{2}) - R_{Ay} \times (x) = 0$$

$$M = R_{Ay} \times (x) - 19.2 \times (x - 0.8)$$

$$M = 15.34 \times (x) - 19.2 \times (x - 0.8) \text{ -----} \rightarrow (2)$$

La substitution de x dans (1) et (2) conduit à

à $x = 1.6$

$$T = -3.86 \text{ kN}$$

et

$$M = 15.34 \times (1.6) - 19.2 \times (1.6 - 0.8)$$

$$M = 24.544 - 15.36$$

$$M = 9.18 \text{ kN.m}$$

à $x = 3.2$

$$T = -3.86 \text{ kN}$$

et

$$M = 15.34 \times (3.2) - 19.2 \times (3.2 - 0.8)$$

$$M = 49 - 46$$

$$M = 3 \text{ kN.m}$$

Section (03) : $3.2 \leq x \leq 4.8$

on a :

$$\sum F/y = 0$$

donc

$$T = 0 \text{-----} \rightarrow (1)$$

on a :

$$\sum M/G = 0$$

donc

$$M - 3 = 0$$

$$M = 3 \text{-----} \rightarrow (2)$$

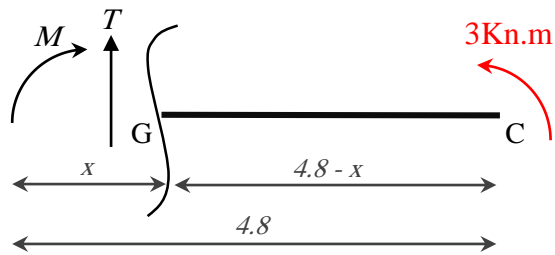
La substitution de x dans (1) et (2) conduit à

à $x = 3.2$

$$T = 0$$

et

$$M = 3 \text{ kN.m}$$



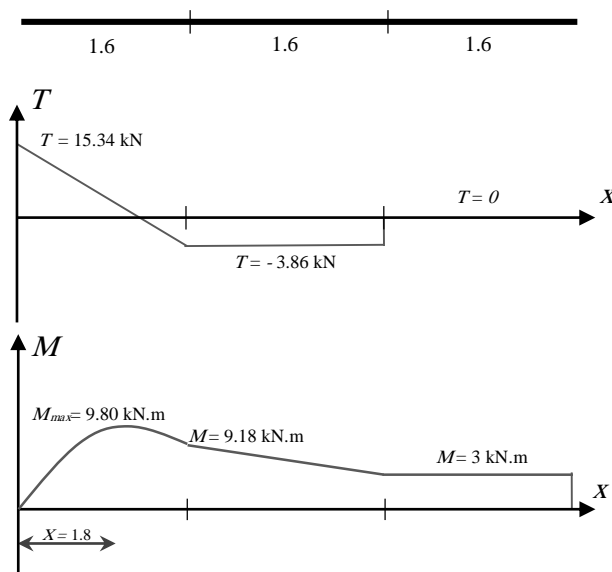
à $x = 4.8$

$$T = 0$$

et

$$M = 3 \text{ kN.m}$$

- Les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant :



- *Calcul de contrainte en flexion pour une section rectangulaire :*

on a :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \times y}{I_{AN}}$$

dans lequel :

$$M_{\max} : 9.80 \text{ KN}$$

$$y : 120 \text{ mm}$$

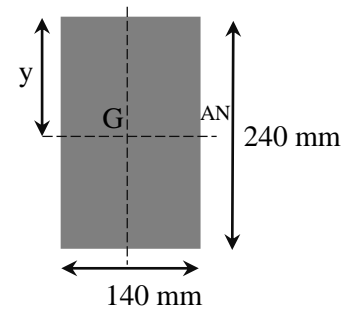
$$I_{AN} = \frac{b \times h^3}{12}$$

$$I_{AN} = 1.6 \times 10^{-4}$$

AN :

$$\sigma_{\max} = \frac{9.80 \times 0.120}{1.6 \times 10^{-4}}$$

$$\sigma_{\max} = 7.35 \text{ kPa}$$



- *Calcul de contrainte en flexion pour une section circulaire :*

on a :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \times y}{I_{AN}}$$

dans lequel :

$$M_{\max} : 9.80 \text{ KN}$$

$$y : 100 \text{ mm}$$

$$I_{AN} = \frac{\pi \times D^4}{64}$$

$$I_{AN} = 7.85 \times 10^{-5}$$

AN :

$$\sigma_{\max} = \frac{9.80 \times 0.100}{7.85 \times 10^{-5}}$$

$$\sigma_{\max} = 12.484 \text{ kPa}$$

