الرياضيات البحتة

القسم العلمي

الفصل الدراسي الثاني

الجزء الخاص بالشرح و التمارين

يشمل مسائل جديدة تقيس مستويات عليا من التفكير

تقنية جديدة

امتحانات إلكترونية باستخدام تقنية QR

جديد...

يصرف مع الكتاب الجزء الخاص بالامتحانات بنظام أسئلة الاختيار من متعدد

المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

2 ثانوى

2020

Scanned by CamScanner

أولًا الجبر

الوحدة 1 المتتابعات والمتسلسلات.

الوحدة 2 التباديل والتوافيق.

ثانيًا التفاضل والتكامل وحساب المثلثات

الوحدة 3 التفاضل والتكامل.

الوحدة 4 حساب المثلثات.

Scanned by CamScanner

أولًا الجبر

الوحدة 1 المتتابعات والمتسلسلات.

الوحدة 2 التباديل والتوافيق.

Scanned by CamScanner

1 المتتابعات والمتسلسلات

الدرس 1 المتتابعات.

الدرس 2 المتسلسلات ورمز التجميع.

الدرس 3 المتتابعة الحسابية.

الدرس 4 المتسلسلات الحسابية.

الدرس 5 المتتابعة الهندسية.

الدرس 6 المتسلسلات الهندسية.

Scanned by CamScanner

الدرس 1

المتتابعات

* المتتابعة الحقيقية غير المنتهية هى دالة مجالها = ص$^+$ ومجالها المقابل = ح وبالتالى يكون بيان المتتابعة هو مجموعة الأزواج المرتبة (س ، ص) حيث س ∈ ص$^+$ ، ص ∈ ح وعلى ذلك يمكن كتابة بيان المتتابعة على الصورة :

د = {(١ ، د (١)) ، (٢ ، د (٢)) ، (٣ ، د (٣)) ، ..... ، (ن ، د (ن)) ، .....}

* وحيث إن المساقط الأولى للأزواج المرتبة المحددة لبيان المتتابعة هى عناصر ص$^+$ وهى معروفة لدينا فإنه يمكن الاستغناء عن كتابتها فى بيان المتتابعة والاكتفاء بكتابة المساقط الثانية داخل قوسين من النوع ( ) تمييزًا لها عن قوسى المجموعة { }

* وعلى ذلك يمكن التعبير عن المتتابعة كما يأتى :

(د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، ..... ، د (ن) ، .....) والقيم د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، ..... تسمى حدود المتتابعة حيث د (١) هو الحد الأول للمتتابعة ويرمز له بالرمز $ح_١$

، د (٢) هو الحد الثانى للمتتابعة ويرمز له بالرمز $ح_٢$ ، د (ن) هو الحد النونى للمتتابعة ويرمز له بالرمز $ح_ن$ وهكذا .....

وبذلك يمكن التعبير عن المتتابعة بصورة أخرى كما يأتى :

$(ح_ن) = (ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ..... ، ح_ن ، .....)$

* وإذا كان مجال الدالة يتكون من أول (ن) من الأعداد الصحيحة الموجبة فإن المتتابعة تكون منتهية.

Scanned by CamScanner

مثلاً : إذا كانت الدالة د : $ص^+ \longrightarrow ح$ حيث د (س) = ٢ س + ٣ فإن :

د (١) = ٢ (١) + ٣ = ٥ ، د (٢) = ٢ (٢) + ٣ = ٧ ، د (٣) = ٢ (٣) + ٣ = ٩

، د (٤) = ٢ (٤) + ٣ = ١١ ، .....

فإن : (د (١) ، د (٢) ، د (٣) ، د (٤) ، .....)

أى (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، .....) تسمى متتابعة

ويكون : $ح_١$ = ٥ ، $ح_٢$ = ٧ ، $ح_٣$ = ٩ ، $ح_٤$ = ١١ وهكذا

وبصفة عامة يكون : د (ن) = ٢ ن + ٣ حيث ن $\in ص^+$ ويرمز لذلك بالرمز $ح_ن$

(الحد النونى) حيث $ح_ن$ = ٢ ن + ٣ والذى من خلاله يمكن إيجاد قيمة أى حد إذا علمت رتبته ن

ملاحظات

١ لاحظ الفرق بين ($ح_ن$) ، $ح_ن$

حيث ($ح_ن$) ترمز للمتتابعة بينما $ح_ن$ ترمز للحد النونى للمتتابعة.

٢ حدود المتتابعة هى صور عناصر مجال المتتابعة.

٣ لاحظ الفرق بين المتتابعة والمجموعة حيث إن :

* المتتابعة تخضع لترتيب عناصرها بينما المجموعة لا تخضع لترتيب عناصرها.
* المتتابعة قد تتكرر عناصرها بينما المجموعة لا يمكن أن تتكرر عناصرها.

المتتابعة المنتهية والمتتابعة غير المنتهية

تعريف

- **المتتابعة المنتهية هى :** متتابعة عدد حدودها منته أى لها عدد محدود من العناصر.
- **المتتابعة غير المنتهية هى :** متتابعة عدد حدودها غير منته أى لها عدد لا نهائى من العناصر.

Scanned by CamScanner

مثال ١

بين أى المتتابعات الآتية منتهية وأيها غير منتهية :

١ (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، .... ، ٣٢)

٢ $\left(\frac{١}{٢} ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ....\right)$

٣ $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ن - ٣$ ، $ن \in ص^+$

٤ $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{٢ن}$ ، $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$

الحل

١ متتابعة منتهية.

٢ متتابعة غير منتهية.

∴ عدد الحدود غير منته.

٣ ∵ $ن \in ص^+$

∴ المتتابعة غير منتهية.

٤ ∵ $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$

∴ عدد الحدود = ٥

∴ المتتابعة منتهية.

الحد العام للمتتابعة

يرمز للحد العام للمتتابعة بالرمز $ح_ن$ ويسمى أحيانًا بالحد النونى حيث $ح_ن$ هو صورة العنصر الذى ترتيبه $ن$ فى المتتابعة ويمكن استنتاجه من خلال بعض الحدود المعطاة من المتتابعة وذلك بإدراك العلاقة بين قيمة الحد $ح_ن$ ورتبة الحد $ن$

مثال ٢

اكتب الحد العام لكل من المتتابعات الآتية :

١ (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...)

٢ $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٨} ، \frac{١}{١٦} ، ...\right)$

٣ $\left(\frac{-١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{-١}{٥} ، \frac{١}{٦} ، ...\right)$

الحل

١ ∵ $ح_١ = ٢ (١)$ ، $ح_٢ = ٢ (٢)$ ، $ح_٣ = ٢ (٣)$ ، $ح_٤ = ٢ (٤)$ ، ...

∴ الحد العام هو : $ح_ن = ٢ن$

Scanned by CamScanner

٢ ∵ $ح_١ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{١}$ ، $ح_٢ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ ، $ح_٣ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$ ، $ح_٤ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$ ، ...

∴ الحد العام هو : $ح_ن = \left(\frac{١}{٢}\right)^{ن}$

٣ ∵ $ح_١ = \frac{(-١)^{١}}{٢ + ١}$ ، $ح_٢ = \frac{(-١)^{٢}}{٢ + ٢}$ ، $ح_٣ = \frac{(-١)^{٣}}{٢ + ٣}$ ، $ح_٤ = \frac{(-١)^{٤}}{٢ + ٤}$ ، ...

∴ الحد العام هو : $ح_ن = \frac{(-١)^{ن}}{٢ + ن}$

لاحظ أنه يمكن استنتاج الحد العام لبعض المتتابعات كما يلي :

١ متتابعة أعداد العد (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ....) حدها العام هو $ح_ن = ن$

بينما المتتابعة (٤ ، ٥ ، ٦ ، ...) تمثل متتابعة أعداد العد إبتداء من الحد الرابع ويكون حدها العام هو $ح_ن = ن + ٣$

٢ متتابعة أعداد العد الفردية (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ....) حدها العام هو $ح_ن = ٢ ن - ١$

بينما المتتابعة (١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ....) تمثل متتابعة أعداد العد الفردية ابتداء من الحد السادس ويكون حدها العام هو $ح_ن = ٢ (ن + ٥) - ١$

٣ متتابعة أعداد العد الزوجية (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ....) حدها العام هو $ح_ن = ٢ ن$ بينما المتتابعة (١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ....) تمثل متتابعة الأعداد الزوجية ابتداء من الحد الخامس ويكون حدها العام هو $ح_ن = ٢ (ن + ٤)$

٤ متتابعة الأعداد المربعة (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ....) حدها العام $ح_ن = ن^{٢}$ بينما المتتابعة (٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ....) تمثل متتابعة الأعداد المربعة ابتداء من الحد الثالث ويكون حدها العام هو $ح_ن = (ن + ٢)^{٢}$

مثال ٣

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتابعة ($ح_ن$) حيث :

١ $ح_١ = ٥$ ، $ح_{ن+١} = ٣ ح_ن$ حيث $ن \geq ١$ واكتب الحد العام للمتتابعة.

٢ $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_ن$ ، $ن \geq ١$ ، $ح_١ = ٣$ ، $ح_٢ = ٧$

٣ $ح_ن = \frac{(-١)^{ن-١}}{٢ ن + ٣}$

Scanned by CamScanner

الحـــل

١ $\because$ $ح_{ن+١} = ٣ ح_ن$

بوضع $ن = ١$ $\therefore ح_٢ = ٣ ح_١$ $\therefore ح_٢ = ٣ (٥) = ١٥$

بوضع $ن = ٢$ $\therefore ح_٣ = ٣ ح_٢$ $\therefore ح_٣ = ٣ (١٥) = ٤٥$

بوضع $ن = ٣$ $\therefore ح_٤ = ٣ ح_٣$ $\therefore ح_٤ = ٣ (٤٥) = ١٣٥$

بوضع $ن = ٤$ $\therefore ح_٥ = ٣ ح_٤$ $\therefore ح_٥ = ٣ (١٣٥) = ٤٠٥$

$\therefore$ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة هى : ٥ ، ١٥ ، ٤٥ ، ١٣٥ ، ٤٠٥

أى أن : $(٥ \times ٣^٠ ، ٥ \times ٣ ، ٥ \times ٣^٢ ، ٥ \times ٣^٣ ، ٥ \times ٣^٤)$

$\therefore$ الحد العام هو : $ح_ن = ٥ \times ٣^{ن-١}$

٢ $\because$ $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_ن$

$\therefore$ بوضع $ن = ١$ $\therefore ح_٣ = ح_٢ + ح_١ = ٧ + ٣ = ١٠$

، بوضع $ن = ٢$ $\therefore ح_٤ = ح_٣ + ح_٢ = ١٠ + ٧ = ١٧$

، بوضع $ن = ٣$ $\therefore ح_٥ = ح_٤ + ح_٣ = ١٧ + ١٠ = ٢٧$

$\therefore$ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة هى : ٣ ، ٧ ، ١٠ ، ١٧ ، ٢٧

٣ $\because$ $ح_ن = \frac{(-١)^{ن-١}}{٢ ن + ٣}$

$\therefore$ بوضع $ن = ١$ $\therefore ح_١ = \frac{(-١)^{١-١}}{٢ (١) + ٣} = \frac{١}{٥}$

، بوضع $ن = ٢$ $\therefore ح_٢ = \frac{(-١)^{٢-١}}{٢ (٢) + ٣} = \frac{-١}{٧}$

، بوضع $ن = ٣$ $\therefore ح_٣ = \frac{(-١)^{٣-١}}{٢ (٣) + ٣} = \frac{١}{٩}$

، بوضع $ن = ٤$ $\therefore ح_٤ = \frac{(-١)^{٤-١}}{٢ (٤) + ٣} = \frac{-١}{١١}$

، بوضع $ن = ٥$ $\therefore ح_٥ = \frac{(-١)^{٥-١}}{٢ (٥) + ٣} = \frac{١}{١٣}$

$\therefore$ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة هى : $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{-١}{٧}$ ، $\frac{١}{٩}$ ، $\frac{-١}{١١}$ ، $\frac{١}{١٣}$

Scanned by CamScanner

ملاحظات

١ فى المثال السابق : العلاقة $ح_{ن+٢} = ح_{ن+١} + ح_{ن}$ هى علاقة بين حدود المتتابعة وتعنى أن كل حد يساوى مجموع الحدين السابقين له مباشرة.

٢ إذا اختلفت إشارة كل حد فى المتتابعة عن إشارة الحد التالى له مباشرة فإن المتتابعة تسمى بالمتتابعة التذبذبية ففى المثال السابق :

المتتابعة $\left(\frac{١}{٥} ، \frac{-١}{٧} ، \frac{١}{٩} ، \frac{-١}{١١} ، \frac{١}{١٣} ، ...\right)$ تسمى متتابعة تذبذبية.

٣ بعض المتتابعات ليست لها قاعدة معروفة حتى الآن وبالتالى ليس معروف حدها العام مثل متتابعة الأعداد الأولية (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

معلومة إثرائية

المتتابعة $(ح_ن)$ التى حدودها (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ...)

تعرف باسم متتابعة فيبوناتشى وكل حد فى هذه المتتابعة ناتج من مجموع الحدين السابقين له مباشرة وتتحدد قاعدتها كالآتى $ح_{ن+٢} = ح_{ن} + ح_{ن+١}$ لكل $ن \in ص^+$ ، $ح_١ = ح_٢ = ١$

المتتابعة التزايدية - التناقصية - الثابتة

تعريف

لكل $ن \geq ١$:

- تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ **تزايدية** إذا كان $ح_{ن+١} > ح_ن$ أى : $ح_{ن+١} - ح_ن > ٠$
- تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ **تناقصية** إذا كان $ح_{ن+١} < ح_ن$ أى : $ح_{ن+١} - ح_ن < ٠$
- تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ **ثابتة** إذا كان $ح_{ن+١} = ح_ن$ أى : $ح_{ن+١} - ح_ن = ٠$

مثال ٤

بين أى المتتابعات $(ح_ن)$ الآتية تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك :

١ $(ح_ن) = (٣ن - ٢)$

٢ $(ح_ن) = \left(\frac{١}{٢ن + ١}\right)$

٣ $(ح_ن) = \left(\frac{(-١)^ن}{ن} + ٢\right)$

٤ $(ح_ن) = (٥)$

Scanned by CamScanner

الحـــل

١ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = (٣(ن+١) - ٢) - (٣ن - ٢)$

$= \cancel{٣ن} + ٣ - ٢ - \cancel{٣ن} + ٢ = ٣ > ٠$

∴ المتتابعة $(ح_ن)$ تزايدية لجميع قيم $ن \in ص^+$

٢ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = \frac{١}{٢(ن+١)+١} - \frac{١}{٢ن+١} = \frac{١}{٢ن+٣} - \frac{١}{٢ن+١}$

$= \frac{(٢ن+٣) - (٢ن+١)}{(٢ن+١)(٢ن+٣)} = \frac{-٢}{(٢ن+١)(٢ن+٣)} < ٠$

∴ المتتابعة $(ح_ن)$ تناقصية لجميع قيم $ن \in ص^+$

٣ $ح_{ن+١} - ح_ن = \left(٢ + \frac{(-١)^{ن+١}}{ن+١}\right) - \left(٢ + \frac{(-١)^ن}{ن}\right) = \frac{(-١)^{ن+١}}{ن+١} - \frac{(-١)^ن}{ن}$

$= (-١)^{ن+١}\left(\frac{١}{ن+١} + \frac{١}{ن}\right) = (-١)^{ن+١}\left(\frac{٢ن+١}{ن(ن+١)}\right)$

، ∵ المقدار الناتج موجب إذا كان ن عددًا فرديًا ، سالب إذا كان ن عددًا زوجيًا

∴ المتتابعة $(ح_ن)$ ليست تزايدية وليست تناقصية.

٤ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = ٥ - ٥ =$ صفر

∴ المتتابعة $(ح_ن)$ ثابتة لجميع قيم $ن \in ص^+$

ملاحظـة

المتتابعة الثابتة : هى متتابعة جميع حدودها متساوية أى حدها العام على الصورة : $ح_ن = أ$ حيث $أ \in ح$ ويكون $ح_{ن+١} - ح_ن =$ صفر وقد تكون منتهية أو غير منتهية مثل المتتابعة (٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥) أ، المتتابعة (-٢ ، -٢ ، -٢ ، -٢ ، ...)

مثال ٥

أوجد الحد العام للمتتابعة (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ...) ثم أوجد :

١ $ح_٧$ ، $ح_{١٠}$ فى المتتابعة. ٢ رتبة الحد الذى قيمته ٦٥ فى المتتابعة.

Scanned by CamScanner

الحل

∵ $ح_1 = ٥ + ٤ (١)$ ، $ح_2 = ٥ + ٤ (٢)$ ، $ح_3 = ٥ + ٤ (٣)$ ، $ح_4 = ٥ + ٤ (٤)$

∴ الحد العام : $ح_ن = ٥ + ٤ ن$

١ $ح_7 = ٥ + ٤ (٧) = ٣٣$ ، $ح_{10} = ٥ + ٤ (١٠) = ٤٥$

٢ بفرض $ح_ن = ٦٥$ ∴ $٥ + ٤ ن = ٦٥$

∴ $٤ ن = ٦٠$

∴ $ن = ١٥$ ∴ $ح_{15} = ٦٥$

معلومة إثرائية

* إذا علم عدد محدود من الحدود المتتالية بدون قاعدة فلا يمكن تعيين حد عام وحيد لهذه المتتابعة ولتوضيح ذلك نأخذ المتتابعتين التاليتين $ح_ن = ن^2$

، $ح'_ن = ن^2 + (ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣)(ن - ٤)$

فنجد أن الأربعة حدود الأولى فى كل من المتتابعتين متشابهة وهى ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ بينما الحد الخامس مختلف حيث $ح_5 = (٥)^2 = ٢٥$ ، $ح'_5 = (٥)^2 + ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٤٩$

وبالتالى يكون $ح_ن$ ، $ح'_ن$ وصف صحيح المتتابعة (١ ، ٤ ، ٩ ، ٢٥ ، ...)

أى أن : لا يمكن إيجاد حد عام وحيد.

Scanned by CamScanner

تمارين 1

على المتتابعات

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أكمل كلًا مما يأتي باستخدام أحد الرموز > أ، < أ، = :

(١) تكون المتتابعة تناقصية إذا كان : $ح_{ن+١}$ ..... $ح_ن$ لكل $ن \geq ١$

(٢) تكون المتتابعة ثابتة إذا كان : $ح_{ن+١}$ ..... $ح_ن$ لكل $ن \geq ١$

(٣) تكون المتتابعة تزايدية إذا كان : $ح_{ن+١}$ ..... $ح_ن$ لكل $ن \geq ١$

٢ بيِّن أى المتتابعات الآتية منتهية وأيها غير منتهية :

(١) (١ ، ٤ ، ٧ ، ١١ ، ...)

(٢) (٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ... ، ٢١)

(٣) المتتابعة $(ح_ن)$ ، حيث $ح_ن = ن^٢ - ١$ ، $ن \in ص^+$

(٤) المتتابعة $(ح_ن)$ ، حيث $ح_ن = \frac{٣}{ن} + ١$ ، $ن \in \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥\}$

٣ اكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التى حدها العام يعطى بالقواعد الآتية :

(١) $ح_ن = ن(ن - ١)$

(٢) $ح_ن = ٢ن - ٣$

(٣) $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{ن + ٣}$

(٤) $ح_ن = جا\left(\frac{ن}{٤}\pi\right)$

(٥) $ح_ن = ٣$

(٦) $ح_ن = ١ + \frac{٢}{\sqrt{ن}}$

٤ بين أى المتتابعات $(ح_ن)$ الآتية تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك :

(١) $(ح_ن) = (٢ن + ٥)$

(٢) $(ح_ن) = \left(\frac{١}{٣ن - ١}\right)$

(٣) $(ح_ن) = \left(\left(\frac{١}{٣}\right)^{ن+١}\right)$

(٤) $(ح_ن) = \left(\left(\frac{-١}{٣}\right)^ن\right)$

(٥) $ح_ن = (-١)^ن (ن^٢ + ١)$

(٦) $(ح_ن) = \left(\frac{(-١)^ن}{٢ن} + ٤\right)$

Scanned by CamScanner

٥ اكتب الحد العام لكل من المتتابعات الآتية :

① $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٣}{٤} ، \frac{٤}{٥} ، ...\right)$ ② $(١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ...)$

③ $(-١ ، ٢ ، -٤ ، ٨ ، -١٦ ، ...)$

④ $\left(١ ، \frac{١}{١٠} ، \frac{١}{١٠٠} ، \frac{١}{١٠٠٠} ، ...\right)$

⑤ $\left(\text{جتا}\ \frac{\pi}{٣} ، \text{جتا}\ \frac{٢\pi}{٣} ، \text{جتا}\ \pi ، \text{جتا}\ \frac{٤\pi}{٣} ، ...\right)$

⑥ $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٤} ، \frac{٩}{٨} ، \frac{٢٧}{١٦} ، ...\right)$

⑦ $\left(٢ + \frac{١}{٢} ، ٢ - \frac{١}{٣} ، ٢ + \frac{١}{٤} ، ٢ - \frac{١}{٥} ، ...\right)$

---

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المتتابعة الحقيقية هى دالة مجالها هو .....

(أ) ح (ب) $ح^+$ (جـ) ص (د) $ص^+$

② الحد السادس فى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{٢ن}$ هو .....

(أ) ٦ (ب) $\frac{-١}{١٢}$ (جـ) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{١}{٦}$

③ الحد الرابع فى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{\sqrt{ن}}{ن + ١}$ هو .....

(أ) ٤ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٢}{٥}$

④ فى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٣ن^٢ - ١$ إذا كان $ح_ن = ٧٤$

فإن : ن = ...

(أ) ± ٥ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٧٤

⑤ الحد النونى للمتتابعة (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ...) هو .....

(أ) ٢ن (ب) ٤ن (جـ) $٢^ن$ (د) $ن^٢$

⑥ الحد النونى للمتتابعة (-١ ، ٤ ، -٩ ، ١٦ ، ...) هو .....

(أ) $-ن^٢$ (ب) $(-١)^ن ن^٢$ (جـ) $(-ن)^٢$ (د) -٤ن

⑦ فى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_{ن+١} = ن ح_ن$ ، $ن \geq ١$

إذا كان $ح_١ = ١$ فإن : $ح_٢$ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

Scanned by CamScanner

⑧ الحد النونى للمتتابعة (٢ ، ٢ ، $\frac{٨}{٣}$ ، ٤ ، ...) هو .....

(أ) $ح_ن = ن - ١$ (ب) $ح_ن = ٢ن - ١$

(جـ) $ح_ن = ٢^{ن-١}$ (د) $ح_ن = \frac{٢^ن}{ن}$

⑨ يقال للمتتابعة $(ح_ن)$ إنها تزايدية لجميع قيم $ن \in ص^+$ إذا كان .....

(أ) $\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}} > ١$ (ب) $ح_ن = ح_{ن+١}$

(جـ) $ح_{ن+١} > ح_ن$ (د) $\frac{ح_ن}{ح_{ن+١}} > -١$

⑩ تسمى المتتابعة التى حدها النونى $ح_ن = \frac{(-١)^ن}{٣ن - ٢}$ متتابعة .....

(أ) تزايدية. (ب) تناقصية. (جـ) تذبذبية. (د) ثابتة.

⑪ المتتابعة التى حدها النونى $ح_ن = \frac{٢}{ن} - ١$ حيث $ن \in ص^+$ تمثل .....

(أ) متتابعة تزايدية. (ب) متتابعة تناقصية.

(جـ) متتابعة ثابتة. (د) متتابعة تذبذبية.

⑫ الحد العاشر من حدود المتتابعة (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ...)

هو .....

(أ) ٢٩ (ب) ٣٤ (جـ) ٥٥ (د) ٨٩

⑬ الحد العام للمتتابعة ((٢ × ٣) ، (٣ × ٤) ، (٤ × ٥) ، (٥ × ٦) ، ...)

هو $ح_ن$ = ...

(أ) (ن − ١) (ن + ١) (ب) ن (ن + ١)

(جـ) ٢ن (ن + ١) (د) (ن + ١) (ن + ٢)

⑭ الخمسة حدود الأولى من المتتابعة التى فيها $ح_١ = ١$ ، $ح_٢ = ٢$

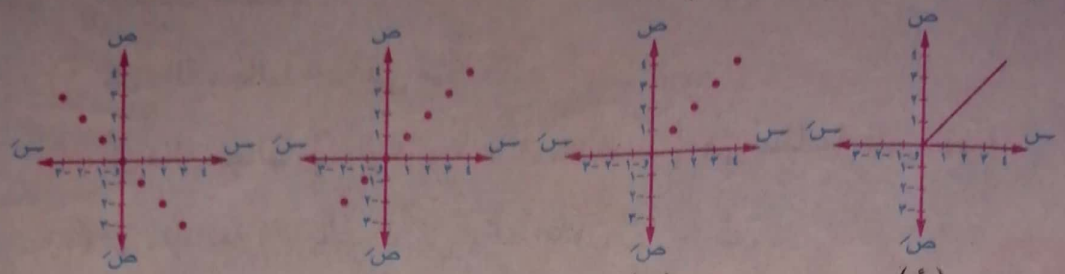
، $ح_ن = ح_{ن-١} + ح_{ن-٢}$ لكل $ن > ٢$ هى .....

(أ) (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥) (ب) (١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦)

(جـ) (١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨) (د) (١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١٢)

Scanned by CamScanner

(١٥) أى الأشكال الآتية تمثل متتابعة ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

---

٧ اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $(ح_ن)$ المعرفة كالآتى حيث $ن \geq ١$:

(١) $ح_١ = ٥$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن - ١$

(٢) $ح_١ = ٢$ ، $ح_{ن+١} = ٢ ح_ن$

(٣) $ح_١ = -١$ ، $ح_{ن+١} = \frac{-١}{ح_ن}$

(٤) $ح_١ = ٩$ ، $ح_{ن+١} = \frac{(-١)^ن}{٣ ح_ن}$

---

٨ أوجد حد عام للمتتابعة (٢ ، ٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) ثم أوجد :

(١) $ح_{١١}$ ، $ح_{٢٥}$

(٢) رتبة الحد الذى قيمته ٥٩ فى المتتابعة. «٣ ن - ١ ، ٣٢ ، ٧٤ ، $ح_{٢٠}$»

---

٩ أوجد الحد العام للمتتابعة (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ...) ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٢٨ فى المتتابعة. «$٢^ن$ ، $ح_٧$»

---

١٠ فى المتتابعة $(ح_ن)$ إذا كان $ح_١ = ٩$ ، $ح_٣ = ٣٦$ ، $ح_{ن+١} = ح_ن + ن س$

أوجد : قيمة س «٩»

---

١١ فى المتتابعة $(ح_ن)$ إذا كان $ح_ن = أ + ن ب$ ، $ح_١ = ٥$ ، $ح_٣ = ١١$

فأوجد : قيمتى أ ، ب «٢ ، ٣»

Scanned by CamScanner

١٢ اكتشف الخطأ :

(١) كل دالة مجالها ص هى متتابعة.

(٢) كل دالة مجالها {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...} هى متتابعة غير منتهية.

(٣) فى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ن^٢$ يكون $ح_ن < ح_{ن+١}$

١٣ إذا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حدودها (١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ ، ....)

(١) ادرس نمط المتتابعة ثم أوجد الحدين الثامن والتاسع.

(٢) مثل التسعة حدود الأولى من المتتابعة بيانيًا.

(٣) هل نعتبر أن هذه المتتابعة تزايدية أم تناقصية أم غير ذلك ؟ فسر إجابتك.

(٤) اكتب العلاقة بين حدود هذه المتتابعة.

١٤ الربط بالهندسة :

صممت متتابعة من الدوائر المتحدة المركز والتى طول نصف قطر أصغرها يساوى ١ سنتيمتر وطول نصف قطر كل دائرة يساوى ضعف طول نصف قطر الدائرة السابقة لها مباشرة ، اكتب الحد العام للمتتابعة التى تعبر عن مساحات الدوائر بدءًا من الدائرة الصغرى ثم أوجد بدلالة π مساحة الدائرة الخامسة فى الترتيب.

«$(٤)^{ن-١}$ π ، ٢٥٦ π سم^٢»

١٥ الربط بالرياضة :

يمارس كريم تمارين اللياقة البدنية لمدة ٨ دقائق فى اليوم الأول ثم يزيد الفترة بعد ذلك بمعدل دقيقتين يوميًا.

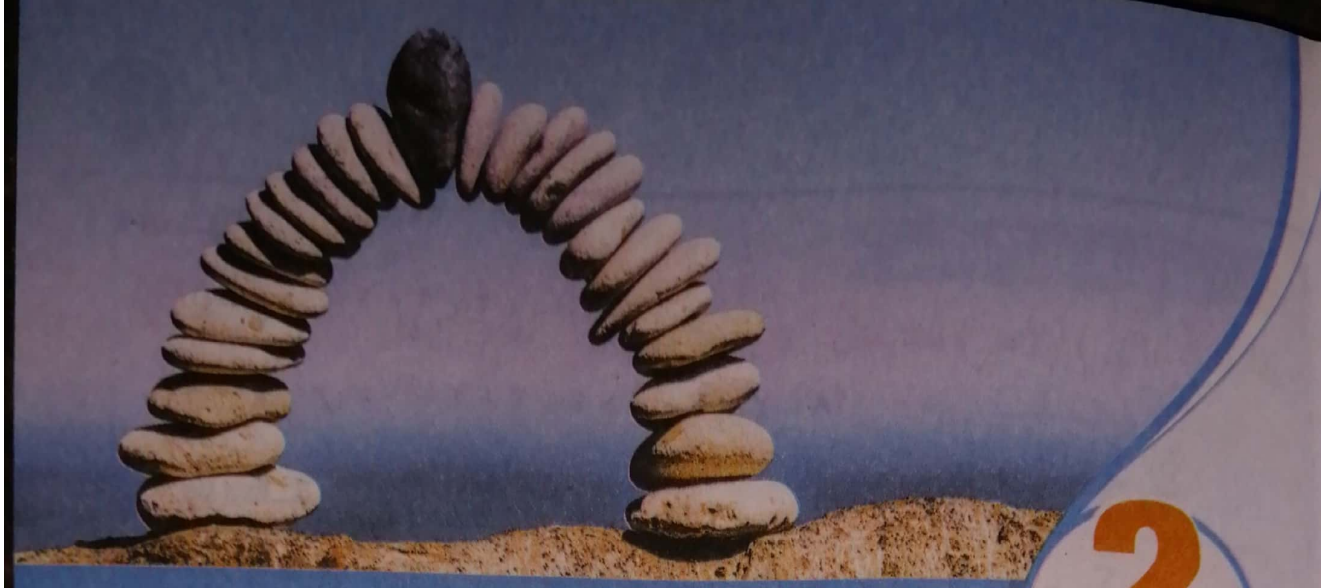
(١) اكتب الخمسة حدود الأولى لهذه المتتابعة.

(٢) أوجد الحد العام لهذه المتتابعة.

(٣) أوجد الزمن الذى يستغرقه كريم فى اليوم السابع.

(٤) فى أى يوم سيكون الزمن الذى يستغرقه كريم نصف ساعة ؟ وضح إجابتك.

Scanned by CamScanner



الدرس 2

المتسلسلات ورمز التجميع

رمز التجميع $\sum$

يستخدم رمز التجميع $\sum$ (ويقرأ سيجما) لكى يرمز لمجموع $ن$ حدًا من الحدود المتتالية فى المتتابعة

$(ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ..... ، ح_ر ، ..... ، ح_ن ، .....)$

بدءًا من الحد الأول بأن نكتب : $\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$ وتقرأ مجموع $ح_ر$ من $ر = ١$ إلى $ر = ن$

أى أن : $\sum_{ر=١}^{ن} ح_ر = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ن$

ملاحظة

ليس من الضرورى أن يبدأ المجموع من الحد الأول أى أنه يمكن استخدام رمز التجميع $\sum$ للتعبير عن مجموع الحدود المتتالية فى المتتابعة بدءًا من حدها الأول أو الثانى أو الثالث أو الحد رقم $ك$ فى المتتابعة إلى الحد رقم $ن$:

فمثلًا : $\sum_{ر=ك}^{ن} ح_ر = ح_ك + ح_{ك+١} + ح_{ك+٢} + ... + ح_ن$

مثال ١

أوجد ناتج كل مما يأتى :

١ $\sum_{ر=١}^{٧} ر$

٢ $\sum_{ر=٤}^{٧} (٢ ر^٢ - ١)$

٣ $\sum_{ر=١}^{٥} \left(\frac{١}{ر + ١} - \frac{١}{ر} \right)$

Scanned by CamScanner

الحـــل

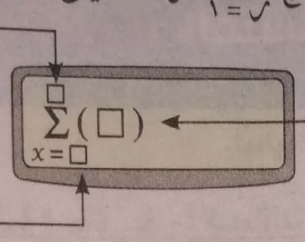
١ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ، ٧

$\therefore \sum_{ر=١}^{٧} ر = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ = ٢٨$

ملاحظـة

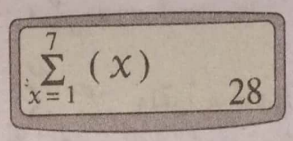
يمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد ناتج $\sum_{ر=١}^{٧} ر$ كما يلى :

١ نضغط SHIFT ثم Log.J فيظهر لنا



نكتب x وذلك بالضغط على ALPHA ثم X

٢ نضغط = فيظهر الناتج



٢ بوضع ر = ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧

$\therefore \sum_{ر=٤}^{٧} (٢ ر^{٢} - ١) = (٢ (٤)^{٢} - ١) + (٢ (٥)^{٢} - ١) + (٢ (٦)^{٢} - ١) + (٢ (٧)^{٢} - ١)$

$= ٣١ + ٤٩ + ٧١ + ٩٧ = ٢٤٨$

٣ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

$\therefore \sum_{ر=١}^{٥} \left(\frac{١}{ر + ١} - \frac{١}{ر}\right) = \left(\frac{١}{١ + ١} - \frac{١}{١}\right) + \left(\frac{١}{٢ + ١} - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٣ + ١} - \frac{١}{٣}\right)$

$+ \left(\frac{١}{٤ + ١} - \frac{١}{٤}\right) + \left(\frac{١}{٥ + ١} - \frac{١}{٥}\right)$

$= \cancel{\frac{١}{٢}} - ١ + \cancel{\frac{١}{٣}} - \cancel{\frac{١}{٣}} + \cancel{\frac{١}{٤}} - \cancel{\frac{١}{٤}} + \cancel{\frac{١}{٥}} - \cancel{\frac{١}{٥}} + \frac{١}{٦}$

$= -١ + \frac{١}{٦} = \frac{-٥}{٦}$

Scanned by CamScanner

الخواص الجبرية للتجميع

إذا كانت : $(ح_ر)$ ، $(هـ_ر)$ متتابعتين ، $ن \in ص^+$ ، $حـ \in ح$ فإن :

١ $\sum_{ر=١}^{ن} حـ = حـ ن$

فمثلًا : • $\sum_{ر=١}^{ن} ٥ = ٥ ن$ • $\sum_{ر=١}^{ن} (-٣) = -٣ ن$

٢ $\sum_{ر=١}^{ن} ر = \frac{ن(ن+١)}{٢}$ **أى أن :** $١ + ٢ + ٣ + \dots + ن = \frac{ن(ن+١)}{٢}$

فمثلًا : $\sum_{ر=١}^{١٠} ر = ١ + ٢ + ٣ + \dots + ١٠ = \frac{١٠(١٠+١)}{٢} = ٥٥$

٣ $\sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

أى أن : $١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + \dots + ن^٢ = \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

فمثلًا : $\sum_{ر=١}^{٥} ر^٢ = ١^٢ + ٢^٢ + ٣^٢ + ٤^٢ + ٥^٢ = \frac{٥(٥+١)(٢ \times ٥+١)}{٦} = ٥٥$

٤ $\sum_{ر=١}^{ن} حـ ح_ر = حـ \sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$

فمثلًا : • $\sum_{ر=١}^{٥} ٣ ر = ٣ \sum_{ر=١}^{٥} ر = ٣ \times \frac{٥(٥+١)}{٢} = ٤٥$

• $\sum_{ر=١}^{ن} ١٢ ر^٢ = ١٢ \sum_{ر=١}^{ن} ر^٢ = ١٢ \times \frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$

$= ٢ ن(ن+١)(٢ن+١)$

٥ $\sum_{ر=١}^{ن} (ح_ر \pm هـ_ر) = \sum_{ر=١}^{ن} ح_ر \pm \sum_{ر=١}^{ن} هـ_ر$

فمثلًا : $\sum_{ر=١}^{ن} (٢ر + ٣) = \sum_{ر=١}^{ن} ٢ر + \sum_{ر=١}^{ن} ٣ = ٢ \sum_{ر=١}^{ن} ر + ٣ن$

$= \cancel{٢} \times \frac{ن(ن+١)}{\cancel{٢}} + ٣ن = ن^٢ + ن + ٣ن = ن^٢ + ٤ن$

Scanned by CamScanner

مثال ٢

أوجد بطريقتين مختلفتين : $\sum_{\text{ر}=١}^{٤} (\text{ر}^{٢} + ٣\text{ر} - ٢)$

الحل

الطريقة الأولى : (إيجاد المفكوك)

بوضع $\text{ر} = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤$

$$\therefore \sum_{\text{ر}=١}^{٤} (\text{ر}^{٢} + ٣\text{ر} - ٢) = (١^{٢} + ٣ \times ١ - ٢) + (٢^{٢} + ٣ \times ٢ - ٢)$$

$$+ (٣^{٢} + ٣ \times ٣ - ٢) + (٤^{٢} + ٣ \times ٤ - ٢)$$

$$= ٢ + ٨ + ١٦ + ٢٦ = ٥٢$$

الطريقة الثانية : (باستخدام خواص التجميع)

$$\sum_{\text{ر}=١}^{٤} (\text{ر}^{٢} + ٣\text{ر} - ٢) = \sum_{\text{ر}=١}^{٤} \text{ر}^{٢} + \sum_{\text{ر}=١}^{٤} ٣\text{ر} - \sum_{\text{ر}=١}^{٤} ٢$$

$$= \frac{٤(٤+١)(٢ \times ٤ + ١)}{٦} + ٣ \times \frac{٤(٤+١)}{٢} - ٢ \times ٤$$

$$= ٣٠ + ٣٠ - ٨ = ٥٢$$

ملاحظة

جميع الخواص الجبرية السابقة لرمز التجميع لا تستخدم إلا فى حالة إيجاد مجموع المتتابعة بدءًا من الحد الأول أى لإيجاد : $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}$

مثال ٣

أوجد قيمة كل مما يأتى باستخدام خواص رمز التجميع $\sum$:

١ $\sum_{\text{ر}=٨}^{١٢} (٢\text{ر} + ٣)$

٢ $\sum_{\text{ر}=٥}^{٨} (\text{ر}^{٢} - ٢\text{ر})$

الحل

١ لاحظ أن : $\sum_{\text{ر}=٨}^{١٢} (٢\text{ر} + ٣)$

تعنى مجموع حدود المتتابعة بدءًا من الحد الثامن إلى الحد الثانى عشر.

Scanned by CamScanner

، ∵ مجموع الحدود من $ح_٨$ إلى $ح_{١٢}$ = (مجموع الحدود من $ح_١$ إلى $ح_{١٢}$)

− (مجموع الحدود من $ح_١$ إلى $ح_٧$)

$$\therefore \sum_{ر=٨}^{١٢} (٢ر + ٣) = \sum_{ر=١}^{١٢} (٢ر + ٣) - \sum_{ر=١}^{٧} (٢ر + ٣)$$

$$= \left(\sum_{ر=١}^{١٢} ٢ر + \sum_{ر=١}^{١٢} ٣\right) - \left(\sum_{ر=١}^{٧} ٢ر + \sum_{ر=١}^{٧} ٣\right)$$

$$= \left(٢ \times \frac{١٢(١٢ + ١)}{٢} + ٣ \times ١٢\right) - \left(٢ \times \frac{٧(٧ + ١)}{٢} + ٣ \times ٧\right)$$

$$= (١٥٦ + ٣٦) - (٥٦ + ٢١)$$

$$= ١٩٢ - ٧٧ = ١١٥$$

٢ $$\sum_{ر=٥}^{٨} (ر^٢ - ٢ر) = \sum_{ر=١}^{٨} (ر^٢ - ٢ر) - \sum_{ر=١}^{٤} (ر^٢ - ٢ر)$$

$$= \left(\sum_{ر=١}^{٨} ر^٢ - \sum_{ر=١}^{٨} ٢ر\right) - \left(\sum_{ر=١}^{٤} ر^٢ - \sum_{ر=١}^{٤} ٢ر\right)$$

$$= \left(\frac{٨(٨ + ١)(٢ \times ٨ + ١)}{٦} - ٢ \times \frac{٨(٨ + ١)}{٢}\right)$$

$$- \left(\frac{٤(٤ + ١)(٢ \times ٤ + ١)}{٦} - ٢ \times \frac{٤(٤ + ١)}{٢}\right)$$

$$= (٢٠٤ - ٧٢) - (٣٠ - ٢٠)$$

$$= ١٣٢ - ١٠ = ١٢٢$$

المتسلسلات

المتسلسلة هى : عملية جمع لحدود المتتابعة

أى أنه : لأى متتابعة ($ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ..... ، $ح_ن$ ، .....) حيث $ن \in ص^+$

، $ح_ن$ هو الحد الذى ترتيبه $ن$ من المتتابعة.

يكون : $ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ن + ...$ هى المتسلسلة المرتبطة بهذه المتتابعة.

Scanned by CamScanner

١ المتسلسلة المنتهية

لأى متتابعة منتهية ($ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، ..... ، $ح_ن$) يكون :

$ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ر + ... + ح_ن = \sum_{ر=١}^{ن} ح_ر$ متسلسلة منتهية.

أى أن :

> مجموع كل حدود المتتابعة المنتهية يسمى متسلسلة منتهية.
> والقيمة العددية للمتسلسلة هى مجموع حدود المتتابعة المناظرة.

مثال ٤

اكتب كلًا من المتسلسلتين الآتيتين باستخدام رمز التجميع $\sum$ ثم أوجد مجموع حدود المتتابعة المناظرة :

١ ٣ + ٥ + ٧ + ... + ٢١

٢ ٣ + ٨ + ١٥ + ٢٤ + ... + ٤٤٠

الحل

١ ∵ ٣ + ٥ + ٧ + ... + ٢١ = (١ + ٢ × ١) + (١ + ٢ × ٢)

+ (١ + ٢ × ٣) + ... + (١ + ٢ × ١٠)

∴ الحد العام للمتتابعة (٣ ، ٥ ، ٧ ، ..... ، ٢١) هو $ح_ر$ = ١ + ٢ ر

، عدد حدود المتتابعة : ن = ١٠

∴ ٣ + ٥ + ٧ + ... + ٢١ = $\sum_{ر=١}^{١٠}$ (١ + ٢ ر)

، ∵ $\sum_{ر=١}^{١٠}$ (١ + ٢ ر) = $\sum_{ر=١}^{١٠}$ ١ + $\sum_{ر=١}^{١٠}$ ٢ ر

= ١ × ١٠ + ٢ × $\frac{١٠ (١٠ + ١)}{٢}$ = ١٢٠

∴ مجموع حدود المتتابعة المناظرة : (٣ ، ٥ ، ٧ ، ..... ، ٢١) = ١٢٠

٢ ∵ ٣ + ٨ + ١٥ + ٢٤ + ... + ٤٤٠

= ١ (١ + ٢) + ٢ (٢ + ٢) + ٣ (٣ + ٢) + ٤ (٤ + ٢) + ... + ٢٠ (٢٠ + ٢)

Scanned by CamScanner

∴ الحد العام للمتتابعة (٣ ، ٨ ، ١٥ ، ..... ، ٤٤٠) هو $ح_ر = ر(ر + ٢)$

، عدد حدود المتتابعة : $ن = ٢٠$

$$\therefore ٣ + ٨ + ١٥ + \cdots\cdots + ٤٤٠ = \sum_{ر=١}^{٢٠} ر(ر + ٢) = \sum_{ر=١}^{٢٠} ر^٢ + ٢ \sum_{ر=١}^{٢٠} ر$$

$$= \frac{٢٠(٢٠ + ١)(٤٠ + ١)}{٦} + ٢ \times \frac{٢٠(٢٠ + ١)}{٢}$$

$$= ٣٢٩٠$$

∴ مجموع حدود المتتابعة المناظرة : (٣ ، ٨ ، ١٥ ، ..... ، ٤٤٠) = ٣٢٩٠

مثال ٥

اكتب مفكوك كل من المتسلسلتين الآتيتين ، وأوجد مجموع حدود المتتابعة المناظرة :

١ $\sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر)$ ٢ $\sum_{ر=١}^{٦} (ر^٢ + ٢)$

الحل

١ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

$$\therefore \sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر) = (١ + ١) + (١ + ٢) + (١ + ٣) + (١ + ٤) + (١ + ٥)$$

$$= ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ = ٢٠$$

∴ مجموع حدود المتتابعة : (٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦) = ٢٠

٢ بوضع ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

$$\therefore \sum_{ر=١}^{٦} (ر^٢ + ٢) = (١^٢ + ٢) + (٢^٢ + ٢) + (٣^٢ + ٢) + (٤^٢ + ٢) + (٥^٢ + ٢) + (٦^٢ + ٢)$$

$$= ٣ + ٦ + ١١ + ١٨ + ٢٧ + ٣٨ = ١٠٣$$

∴ مجموع حدود المتتابعة : (٣ ، ٦ ، ١١ ، ١٨ ، ٢٧ ، ٣٨) = ١٠٣

Scanned by CamScanner

ملاحظة

فى المثال السابق : يمكن استخدام خواص علامة التجميع $\sum$ فى إيجاد قيمة المتسلسلة أى مجموع حدود المتتابعة المناظرة دون إيجاد مفكوك المتسلسلة.

١ $\sum_{ر=١}^{٥} (١ + ر) = \sum_{ر=١}^{٥} ١ + \sum_{ر=١}^{٥} ر = ١ \times ٥ + \frac{٥ \times ٦}{٢} = ٢٠$

٢ $\sum_{ر=١}^{٦} (ر^{٢} + ٢) = \sum_{ر=١}^{٦} ر^{٢} + \sum_{ر=١}^{٦} ٢ = \frac{٦ (٦ + ١) (٢ \times ٦ + ١)}{٦} + ٢ \times ٦ = ١٠٣$

٢ المتسلسلة غير المنتهية

وهى المتسلسلة التى بها عدد لا نهائى من الحدود ويرمز لها بالرمز $\sum_{ر=١}^{\infty} ح_{ر}$

فمثلًا : المتسلسلة : $-٢ + ٤ - ٨ + ١٦ - ٣٢ + \cdots$ غير منتهية.

والمتتابعة المناظرة لها : $(-٢ ، ٤ ، -٨ ، ١٦ ، -٣٢ ، \cdots)$ حدها العام هو $ح_{ر} = (-٢)^{ر}$

ولذلك فإن : $-٢ + ٤ - ٨ + ١٦ - ٣٢ + \cdots = \sum_{ر=١}^{\infty} (-٢)^{ر}$

مثال ٦

اكتب مفكوك كل من المتسلسلتين الآتيتين :

١ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\left(\frac{١}{٣}\right)^{ر} - ١ \right)$

٢ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{ر + ١} - \frac{١}{ر} \right)$

الحل

١ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\left(\frac{١}{٣}\right)^{ر} - ١ \right) = \left(\left(\frac{١}{٣}\right)^{١} - ١ \right) + \left(\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢} - ١ \right) + \left(\left(\frac{١}{٣}\right)^{٣} - ١ \right)$

$+ \left(\left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} - ١ \right) + \cdots$

$= \frac{-٢}{٣} + \frac{-٨}{٩} + \frac{-٢٦}{٢٧} + \frac{-٨٠}{٨١} + \cdots$

$= \frac{-٢}{٣} - \frac{٨}{٩} - \frac{٢٦}{٢٧} - \frac{٨٠}{٨١} - \cdots$

Scanned by CamScanner

٢ $\sum_{ر=١}^{\infty} \left(\frac{١}{ر+١} - \frac{١}{ر}\right) = \left(\frac{١}{١+١} - \frac{١}{١}\right) + \left(\frac{١}{٢+١} - \frac{١}{٢}\right) + \left(\frac{١}{٣+١} - \frac{١}{٣}\right)$

$+ \left(\frac{١}{٤+١} - \frac{١}{٤}\right) + \ldots\ldots$

$= \frac{-١}{٢} + \frac{-١}{٦} + \frac{-١}{١٢} + \frac{-١}{٢٠} + \ldots\ldots$

$= \frac{-١}{٢} - \frac{١}{٦} - \frac{١}{١٢} - \frac{١}{٢٠} - \ldots\ldots$

مثال ٧

استخدم رمز التجميع $\sum$ فى كتابة كل من المتسلسلتين الآتيتين :

١ $١ \times ٢ + ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ٤ \times ٥ + \ldots\ldots$

٢ $٣ + ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \ldots\ldots$

الحـــل

١ ∵ الحد العام للمتتابعة : $(١ \times ٢ ، ٢ \times ٣ ، ٣ \times ٤ ، ٤ \times ٥ ، \ldots\ldots)$

هو $ح_ر = ر(ر + ١)$

∴ $١ \times ٢ + ٢ \times ٣ + ٣ \times ٤ + ٤ \times ٥ + \ldots\ldots = \sum_{ر=١}^{\infty} ر(ر + ١)$

٢ ∵ الحد العام للمتتابعة : $\left(٣ ، ١ ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٩} ، \ldots\ldots\right)$ هو $ح_ر = ٣^{٢-ر}$

∴ $٣ + ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \ldots\ldots = \sum_{ر=١}^{\infty} ٣^{٢-ر}$

Scanned by CamScanner

اختبر نفسك

تمارين 2

على المتسلسلات ورمز التجميع

من أسئلة الكتاب المدرس

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① $\sum_{س=١}^{٥} ٣ = ...$

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) ٢٤٣

② $\sum_{س=٢}^{٥} ٣ = ...$

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ١٥ (د) ١٢

③ $\sum_{س=١}^{٤} س = ...$

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ (جـ) ٤ (د) ٦

④ $\sum_{س=١}^{١٠} س^{٢} = ...$

(أ) ١٠ (ب) ٥٥ (جـ) ٢٢٠ (د) ٣٨٥

⑤ قيمة المتسلسلة $\sum_{س=٧}^{٢٣} ٣ س = ...$

(أ) ٢٥٥ (ب) ٧٦٥ (جـ) ٨٠٧ (د) ٨٢٨

⑥ قيمة المتسلسلة $\sum_{س=١}^{١٥} (س^{٢} + س + ١) = ...$

(أ) ١٣٧٥ (ب) ٣٧٢٠ (جـ) ١٤٤٠٠ (د) ٢٢٣٢٠٠٠

⑦ $٢ + ٤ + ٦ + ٨ + ... + ٣٠ = ...$

(أ) $\sum_{س=١}^{٣٠} س$ (ب) $\sum_{س=١}^{١٥} س$ (جـ) $\sum_{س=١}^{١٥} ٢ س$ (د) $\sum_{س=١}^{٣٠} ٢ س$

⑧ $١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ٤^{٢} + ... + ٨^{٢} = ...$

(أ) $\sum_{س=١}^{٨} س^{٢}$ (ب) $\sum_{س=١}^{٦٤} س$ (جـ) $\sum_{س=١}^{٨} ٢ س$ (د) $\sum_{س=١}^{٨} ٢ س^{٢}$

⑨ $٣ + ٦ + ٩ + ١٢ + ... = ...$

(أ) $\sum_{س=١}^{\infty} ٣ س$ (ب) $\sum_{س=١}^{\infty} (س + ٣)$

(جـ) $\sum_{س=١}^{\infty} (س + ٢)$ (د) $\sum_{س=١}^{\infty} س^{٣}$

Scanned by CamScanner

٢ اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية :

① $\sum_{\text{ر}=1}^{5} (3\text{ر} - 2)$

② $\sum_{\text{ر}=1}^{8} ((-1)^{\text{ر}} + 4\text{ر})$

③ $\sum_{\text{ر}=1}^{\infty} ((\frac{1}{2})^{\text{ر}} - 1)$

④ $\sum_{\text{ر}=1}^{\infty} (\frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{ر}+1})$

٣ اكتب مفكوك كل من المتسلسلات الآتية ، ثم أوجد مجموع المفكوك :

① $\sum_{\text{ر}=1}^{4} (\text{ر}^2)$

② $\sum_{\text{ر}=1}^{5} (1 - \text{ر}^2)$

③ $\sum_{\text{ر}=1}^{5} (\frac{-1}{2})^{\text{ر}}$

④ $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\frac{1}{\text{ر}+1} - \frac{1}{\text{ر}})$

٤ أوجد بطريقتين مختلفتين :

① $\sum_{\text{ر}=1}^{5} (2\text{ر}^2 - 3\text{ر} + 5)$

② $\sum_{\text{ر}=1}^{4} (3 - 2\text{ر} + \text{ر}^2)$

٥ إذا علمت أن : $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر} = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)}{2}$ ، $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ر}^2 = \frac{\text{ن}(\text{ن}+1)(2\text{ن}+1)}{6}$

فأوجد باستخدام خواص رمز التجميع $\sum$ قيمة كل مما يأتي :

① $\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{ر} + 2)$

② $\sum_{\text{ر}=1}^{6} (2\text{ر}^2 - 1)$

③ $\sum_{\text{ر}=8}^{12} 2(\text{ر} + 5)$

④ $\sum_{\text{ر}=4}^{7} (\text{ر}^2 - 2\text{ر} + 3)$

٦ اكتب المتسلسلات التالية مستخدمًا رمز التجميع :

① $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 20$

② $7 \times 1 + 7 \times 2 + 7 \times 3 + \dots + 7 \times 20$

③ $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

④ $1 + 4 + 9 + 16 + \dots + 64$

⑤ $-1 - 8 - 27 - 64 - \dots - 216$

⑥ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{20}$

⑦ $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$

Scanned by CamScanner

(٨) ٢ × ٣ + ٣ × ٤ + ٤ × ٥ + ...

(٩) ١ × ٢ × ٣ + ٣ × ٤ × ٥ + ٥ × ٦ × ٧ + ...

(١٠) $\frac{٢}{١ \times ٢} + \frac{٢}{٢ \times ٣} + \frac{٢}{٣ \times ٤} + \frac{٢}{٤ \times ٥} + ... + \frac{٢}{٩ \times ١٠}$

(١١) ٩ + ٩٩ + ٩٩٩ + ٩٩٩٩ + ... إلى ن حدًا

---

٧ اكتشف الخطأ :

(١) المتسلسلة هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها.

(٢) $\sum_{ر=٠}^{٩} (٢ ر + ١) = ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ٩$

---

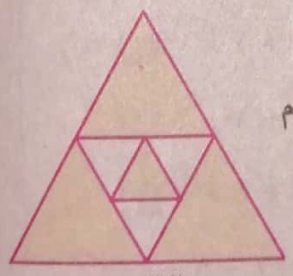
٨ بدأ رجل عمله فى إحدى الشركات فكان مجموع ما تقاضاه فى نهاية السنة الأولى ١٦٠٠٠ جنيه فإذا كان مجموع ما يتقاضاه سنويًا يزداد بمعدل ٥ ٪ سنويًا ، اكتب باستخدام رمز التجميع $\sum$ مجموع ما تقاضاه الرجل فى أول خمس سنوات من بدء استلامه العمل، وأوجد هذا المجموع. «١٠٠٨٨٤١٠ جنيه»

---

٩ طفل يريد بناء هرم من قطع خشبية على شكل مكعبات متماثلة بحيث تحتوى قمة الهرم على مكعب واحد والصف الثانى على مكعبين والصف الذى يليه على ثلاثة مكعبات وهكذا. عبر عن عدد المكعبات المستخدمة فى بناء الهرم باستخدام رمز التجميع $\sum$ إذا علم أن الهرم يتكون من ١٠ صفوف ، وأوجد عدد المكعبات. «٥٥ مكعبًا»

---

١٠ الربط بالهندسة :



٣٢ سم

يمثل الشكل المقابل مثلثًا متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ٣٢ سم نصفت أضلاعه الثلاثة ، ورسم المثلث الداخلى وقمنا بهذا النمط مرة أخرى حتى حصلنا على ثلاثة مثلثات بما فيها المثلث الأول.

(١) اكتب متسلسلة محيطات الثلاث مثلثات باستخدام رمز التجميع.

(٢) أوجد بالسنتيمترات مجموع محيطات المثلثات الثلاثة التى حصلنا عليها. «١٦٨ سم»

Scanned by CamScanner

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $\sum_{ر=١}^{١٢} (٣أ + ١) = ٨٤$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

② إذا كان : $\sum_{ر=١}^{٢٠} \text{جا}\,\theta = ١٠$ فإن إحدى قيم θ هى .....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

③ إذا كان $س_١$ ، $س_٢$ جذرا المعادلة $س^٢ - (م - ٢) س - ١ = ٠$

وكان : $\sum_{ر=١}^{٢} س_ر = ٣$ فإن : م = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

④ إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن} (٢ر - ٣) = ٨٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٠

⑤ إذا كان $\sum_{ر=١}^{ن} (٣) = ١٢$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} (ر) = ١٠$ ، $\sum_{ر=١}^{ن} (ر^٢) = ٣٠$

وكان : $د(س) = ٣ - ٢س + س^٢$ فإن : $\sum_{ر=١}^{ن} د(ر) =$ .....

(أ) ١٢ (ب) ٢٢ (جـ) ٥٢ (د) ٦٢

⑥ إذا كان : $\sum_{س=١}^{م} (س) + \sum_{ص=١}^{م} (ص) + \sum_{ع=١}^{م} (ع) = ١٦٥$ فإن : م = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

⑦ إذا كان : $\sum_{ن=١}^{ك} (ن + ١)^٢ = ٨٤ + \sum_{ن=١}^{ك} (ن - ١)^٢$ فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٩

⑧ إذا كان : $\sum_{ر=١}^{ن} لو \left(\frac{ر + ١}{ر}\right) = ٢$ فإن : ن = ...

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٩٩ (د) ١٠٠

Scanned by CamScanner

⑨ إذا كان $س = \sum_{ر=١}^{ن} ٣ر$ ، $ص = \sum_{ر=١}^{ن} (٣ر + ٢)$

وكان : $ص - س = ١٠$ فإن : $ن =$ .....

(أ) ٥ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٣

⑩ إذا كان $ن > ٨$ وكان : $\sum_{ر=٥}^{ن} ر^٢ = س$ ، $\sum_{ر=٥}^{٨} ر^٢ + \sum_{ر=٨}^{ن} ر^٢ = ص$

فإن : .....

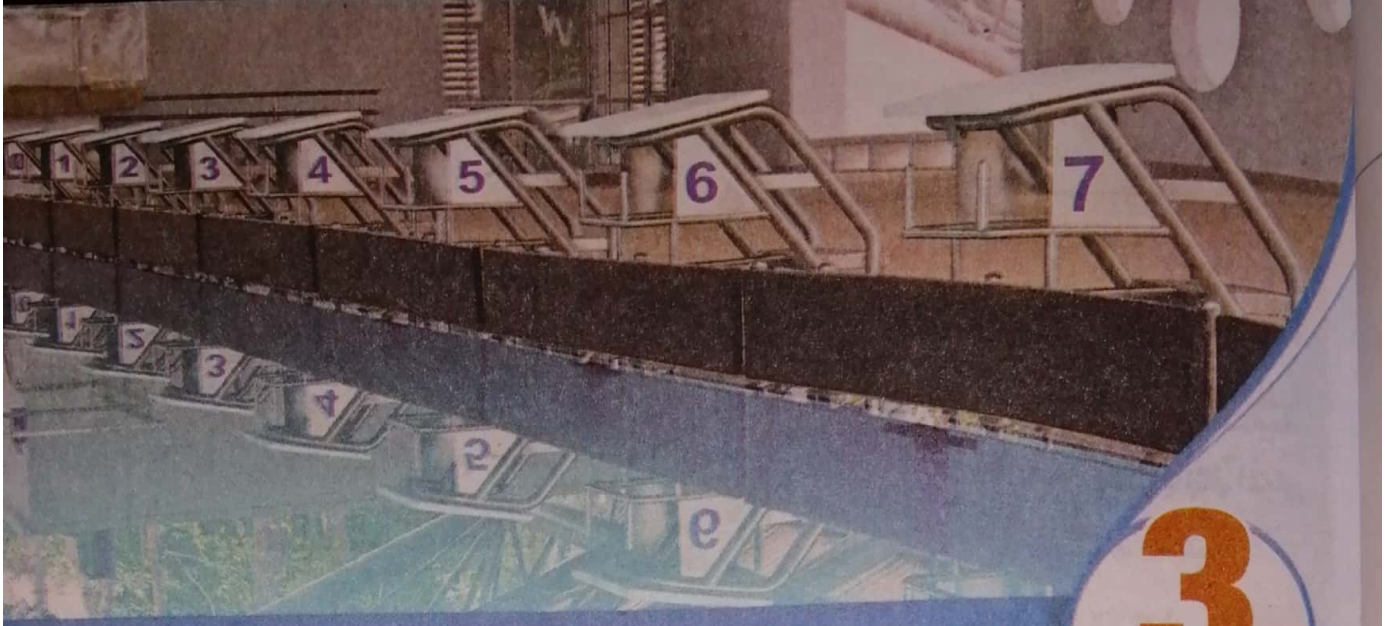
(أ) $س = ص$ (ب) $س = ص + ٦٤$

(جـ) $ص = س + ٦٤$ (د) $ص = ٦٤ س$

⑪ $\sum_{أ=١}^{٢} \sum_{ب=١}^{٢} \sum_{حـ=١}^{٢} أ ب حـ =$ .....

(أ) ٨ (ب) ٢٧ (جـ) ٦٤ (د) ١٢٥

Scanned by CamScanner



الدرس 3

المتتابعة الحسابية

تعريف

المتتابعة الحسابية هى المتتابعة التى يكون فيها الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة يساوى مقدارًا ثابتًا يسمى أساس المتتابعة ويرمز له عادة بالرمز (ء)

اى أن $ء = ح_{ن+١} - ح_{ن}$ لكل $ن \in ص^+$

ومن التعريف السابق فإن المتتابعة الحسابية تكون :

- تزايدية عندما ء > ٠
- تناقصية عندما ء < ٠
- ثابتة عندما ء = ٠

مثال ١

بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية وأيها ليست حسابية وأوجد أساس كل متتابعة حسابية :

١ (٥ ، ٩ ، ١٣ ، ١٧ ، .....)

٢ (−١٧ ، −١٥ ، −١٣ ، −١١ ، .....)

٣ $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٨} ، \frac{١}{١١} ، .....)$

الحل

١ ∵ $ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = ٤$ ∴ المتتابعة حسابية وأساسها = ٤

٢ ∵ $ح_٢ - ح_١ = ح_٣ - ح_٢ = ح_٤ - ح_٣ = ٢$ ∴ المتتابعة حسابية وأساسها = ٢

Scanned by CamScanner

٣ ∵ $ح_٢ - ح_١ = \frac{١}{٥} - \frac{١}{٢} = -\frac{٣}{١٠}$

، $ح_٣ - ح_٢ = \frac{١}{٨} - \frac{١}{٥} = -\frac{٣}{٤٠}$

∴ $ح_٢ - ح_١ \neq ح_٣ - ح_٢$

∴ المتتابعة ليست حسابية.

معلومة إثرائية

المتتابعة التى مقلوبات حدودها تكون متتابعة حسابية تسمى بالمتتابعة التوافقية مثل المتتابعة $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٨} ، \frac{١}{١١} ، .....)$ بالمثال المجاور.

مثال ٢

بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية وأيها ليست حسابية وأوجد أساس كل متتابعة حسابية:

١ $(ح_ن) = (٣ن - ٢)$ ٢ $(ح_ن) = (٢ن^٢ - ١)$ ٣ $(ح_ن) = (٣^ن)$

الحـــل

لمعرفة ما إذا كانت المتتابعة $(ح_ن)$ تكون متتابعة حسابية أم لا نوجد $ح_{ن+١} - ح_ن$ فإذا كان الناتج يساوى مقدارًا ثابتًا كانت $(ح_ن)$ متتابعة حسابية وكان هذا المقدار الثابت أساسها، بينما إذا كان الناتج ليس بمقدار ثابت فإن $(ح_ن)$ ليست متتابعة حسابية.

١ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = (٣(ن+١) - ٢) - (٣ن - ٢)$

$= ٣ن + ٣ - ٢ - ٣ن + ٢ = ٣$ = مقدار ثابت.

∴ $(ح_ن) = (٣ن - ٢)$ متتابعة حسابية أساسها = ٣

٢ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = (٢(ن+١)^٢ - ١) - (٢ن^٢ - ١)$

$= ٢ن^٢ + ٤ن + ٢ - ١ - ٢ن^٢ + ١ = ٤ن + ٢$

وهذا ليس بمقدار ثابت لأنه يعتمد على قيمة ن

∴ $(ح_ن) = (٢ن^٢ - ١)$ ليست متتابعة حسابية.

٣ ∵ $ح_{ن+١} - ح_ن = (٣^{ن+١}) - (٣^ن)$

$= ٣^ن(٣ - ١) = ٢ \times ٣^ن$ وهذا ليس بمقدار ثابت لأنه يعتمد على قيمة ن

∴ $(ح_ن) = (٣^ن)$ ليست متتابعة حسابية.

Scanned by CamScanner

ملاحظة

المتتابعة الحسابية هى دالة من الدرجة الأولى فى ن حيث ن ∈ ص⁺ ويكون معامل ن هو أساس المتتابعة ففى المثال السابق :

١ (ح$_{ن}$) = (٣ ن − ٢)

متتابعة حسابية لأن (ح$_{ن}$) دالة من الدرجة الأولى فى ن وأساسها ء = ٣

٢ (ح$_{ن}$) = (٢ ن^{٢} − ١)

متتابعة ليست حسابية لأن (ح$_{ن}$) دالة من الدرجة الثانية فى ن

التمثيل البيانى للمتتابعة الحسابية

حيث إن المتتابعة الحسابية هى دالة من الدرجة الأولى فى ن ومجالها = ص⁺ لذلك تمثل بيانيًا بنقط على استقامة واحدة.

مثال ٣

مثل بيانيًا الستة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية :

(ح$_{ن}$) = (٢ ن − ٣) موضحًا مجال ومدى المتتابعة.

الحل

∵ ح$_{١}$ = ٢ (١) − ٣ = −١ ، ح$_{٢}$ = ٢ (٢) − ٣ = ١ ، ح$_{٣}$ = ٢ (٣) − ٣ = ٣

، ح$_{٤}$ = ٢ (٤) − ٣ = ٥ ، ح$_{٥}$ = ٢ (٥) − ٣ = ٧

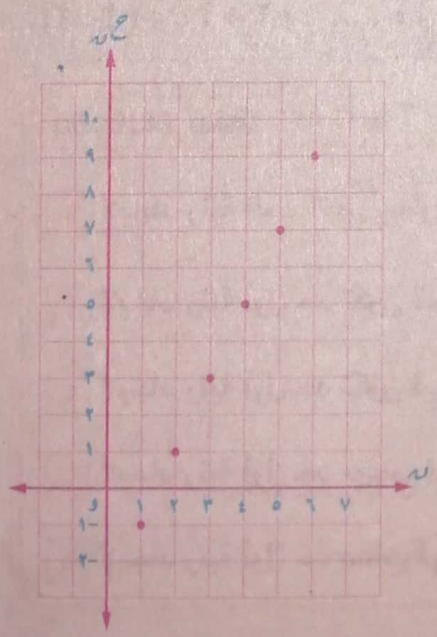
، ح$_{٦}$ = ٢ (٦) − ٣ = ٩

∴ الستة حدود الأولى من المتتابعة تمثل بالنقط :

(١ ، −١) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٥)

، (٥ ، ٧) ، (٦ ، ٩)

وتمثل بيانيًا بالشكل المقابل :



مجال المتتابعة = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...} = ص⁺

مدى المتتابعة = {−١ ، ١ ، ٣ ، ٥ ، ...}

Scanned by CamScanner

الحد العام (النونى) للمتتابعة الحسابية

إذا كانت ($ح_ن$) متتابعة حسابية حدها الأول = أ ، أساسها = ء فإن

الصورة العامة للمتتابعة الحسابية هى : (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، .....)

أى أن : $ح_١$ = أ ، $ح_٢$ = أ + ء ، $ح_٣$ = أ + ٢ء وهكذا .....

ونلاحظ فى هذه الصورة أن معامل ء يقل دائمًا واحد عن رتبة الحد وعليه يكون :

$ح_{٢٥}$ = أ + ٢٤ء ، $ح_{٧٥}$ = أ + ٧٤ء ، وهكذا...

ومنها نجد أن الحد العام (النونى) للمتتابعة الحسابية هو $ح_ن$ = أ + (ن − ١)ء

فمثلًا : فى المتتابعة الحسابية (٥ ، ٧ ، ٩ ، ....) يكون أ = ٥ ، ء = ٢

ومنها فإن الحد العام $ح_ن$ = ٥ + (ن − ١) × ٢

، $ح_٥$ = ٥ + ٤ × ٢ = ١٣ ، $ح_{١٢}$ = ٥ + ١١ × ٢ = ٢٧

ومما سبق فإنه

إذا كانت المتتابعة الحسابية منتهية وعدد حدودها = ن فإنه يرمز لحدها الأخير بالرمز ل

حيث : ل = أ + (ن − ١)ء

وتكون الصورة العامة للمتتابعة الحسابية فى هذه الحالة على الصورة :

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ..... ، ل − ٢ء ، ل − ء ، ل)

ملاحظات هامة

١	لإيجاد رتبة الحد الذى يساوى قيمة معلومة س نضع	$ح_ن$ = س
٢	لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أقل من قيمة معلومة س نضع	$ح_ن$ < س
٣	لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أكبر من قيمة معلومة س نضع	$ح_ن$ > س
٤	لإيجاد رتبة أول حد موجب فى المتتابعة الحسابية نضع	$ح_ن$ > ٠
٥	لإيجاد رتبة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية نضع	$ح_ن$ < ٠

Scanned by CamScanner

مثال ٤

في المتتابعة الحسابية (٩٥ ، ٩٢ ، ٨٩ ، .....) أوجد :

١ قيمة $ح_{٦}$

٢ رتبة الحد الذى قيمته ٦٨

٣ رتبة أول حد سالب.

٤ رتبة أول حد تقل قيمته عن ٢٥

الحل

∵ أ = ٩٥ ، ء = ٩٢ − ٩٥ = −٣

١ $ح_{٦}$ = أ + ٥ء = ٩٥ + ٥ × −٣ = ٨٠

٢ بوضع $ح_{ن}$ = ٦٨

∴ ٩٥ + (ن − ١) × −٣ = ٦٨

∴ ٩٨ − ٣ن = ٦٨

∴ ن = ١٠

∴ أ + (ن − ١)ء = ٦٨

∴ ٩٥ − ٣ن + ٣ = ٦٨

∴ −٣ن = −٣٠

∴ $ح_{١٠}$ = ٦٨

٣ بوضع $ح_{ن}$ < ٠

∴ ٩٥ + (ن − ١) × −٣ < ٠

∴ −٣ن < −٩٨

∴ ن < ٣٢ $\frac{٢}{٣}$

∴ أول حد سالب هو $ح_{٣٣}$

∴ أ + (ن − ١)ء < ٠

∴ ٩٨ − ٣ن < ٠

٤ بوضع $ح_{ن}$ < ٢٥

∴ ٩٥ + (ن − ١) × −٣ < ٢٥

∴ −٣ن < −٧٣

∴ ن > ٢٤ $\frac{١}{٣}$

∴ أ + (ن − ١)ء < ٢٥

∴ ٩٨ − ٣ن < ٢٥

∴ أول حد قيمته تقل عن ٢٥ هو $ح_{٢٥}$

مثال ٥

في المتتابعة الحسابية (−٤٢ ، −٣٩ ، −٣٦ ، ..... ، ٢١)

١ أوجد عدد حدود المتتابعة.

٢ أوجد رتبة وقيمة أول حد موجب.

٣ أوجد قيمة $ح_{٩}$ من النهاية.

٤ هل يوجد حد قيمته −١١ ؟

Scanned by CamScanner

الحـــل

∵ أ = −٤٢ ، د = −٣٩ + ٤٢ = ٣ ، ل = ٢١

١ ∵ ل = أ + (ن − ١) د ∴ ٢١ = −٤٢ + (ن − ١) × ٣

∴ ٢١ = −٤٥ + ٣ن ∴ ٦٦ = ٣ن

∴ ن = ٢٢ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٢٢

٢ بوضع $ح_ن$ > ٠ ∴ أ + (ن − ١) د > ٠

∴ −٤٢ + (ن − ١) × ٣ > ٠ ∴ −٤٥ + ٣ن > ٠

∴ ٣ن > ٤٥ ∴ ن > ١٥

∴ أول حد موجب هو $ح_{١٦}$ ∴ $ح_{١٦}$ = أ + ١٥ د = −٤٢ + ١٥ × ٣ = ٣

٣ بكتابة حدود المتتابعة من النهاية يكون حدها الأول = ٢١ وأساسها = −٣

∴ $ح_٩$ من النهاية = أ + ٨ د = ٢١ + ٨ × −٣ = ٢١ − ٢٤ = −٣

٤ بفرض أن $ح_ن$ = −١١ ∴ أ + (ن − ١) د = −١١

∴ −٤٢ + (ن − ١) × ٣ = −١١ ∴ −٤٥ + ٣ن = −١١

∴ ن = $\frac{١}{٣}$ ١١ ∉ $ص^+$ ∴ لا يوجد فى المتتابعة حد قيمته −١١

مثال ٦

إذا كانت المتتابعة (١٧ ، س ، ..... ، ص ، ٧١) متتابعة حسابية وكان ٣س = ص + ٤

فأوجد قيمة كل من : س ، ص

الحـــل

∵ المتتابعة حسابية. ∴ الأساس = مقدار ثابت

∴ س − ١٧ = ٧١ − ص ∴ س + ص = ٨٨ (١)

، ∵ ٣س = ص + ٤ (معطى) ∴ ٣س − ص = ٤ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) : ∴ ٤س = ٩٢ ∴ س = ٢٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ ص = ٦٥

Scanned by CamScanner

مثال ٧

إذا كان $ح_{٢ن+١}$ من المتتابعة الحسابية (١ ، ٣,٥ ، ٦ ، .....) يساوى $ح_{٥ن-١}$ من المتتابعة الحسابية (٢٣ ، ٢١,٥ ، ٢٠ ، .....) فأوجد : قيمة ن

الحل

بالنسبة للمتتابعة الأولى : أ = ١ ، ء = ٣,٥ − ١ = ٢,٥

∴ $ح_{٢ن+١}$ = أ + (٢ن + ١ − ١) ء = أ + ٢ن ء

∴ $ح_{٢ن+١}$ = ١ + ٢ن × $\frac{٥}{٢}$ = ١ + ٥ن (١)

بالنسبة للمتتابعة الثانية : أ = ٢٣ ، ء = ٢١,٥ − ٢٣ = −١,٥

∴ $ح_{٥ن-١}$ = أ + (٥ن − ١ − ١) ء = أ + (٥ن − ٢) ء

∴ $ح_{٥ن-١}$ = ٢٣ + (٥ن − ٢) (−١,٥)

∴ $ح_{٥ن-١}$ = ٢٣ − ٧,٥ن + ٣ = ٢٦ − ٧,٥ن (٢)

، ∵ $ح_{٢ن+١}$ من المتتابعة الأولى = $ح_{٥ن-١}$ من المتتابعة الثانية.

، من (١) ، (٢) : ∴ ١ + ٥ن = ٢٦ − ٧,٥ن

∴ ١٢,٥ن = ٢٥ ∴ ن = ٢

تعيين المتتابعة الحسابية

* المقصود بتعيين المتتابعة الحسابية هو معرفة كل من حدها الأول وأساسها حتى يمكن تكوينها.

مثال ٨

أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثالث ١١ وحدها السادس ٢٠

الحل

∵ $ح_{٣}$ = ١١

∴ أ + ٢ء = ١١ (١)

، ∵ $ح_{٦}$ = ٢٠

∴ أ + ٥ء = ٢٠ (٢)

لاحظ أن :

* إذا كان : $ح_{س}$ ، $ح_{ص}$ حدين فى متتابعة حسابية حيث س ≠ ص

فإن ء (أساس المتتابعة) = $\frac{ح_{ص} - ح_{س}}{ص - س}$

أى أن : ء = $\frac{ح_{٦} - ح_{٣}}{٦ - ٣}$ = $\frac{٢٠ - ١١}{٦ - ٣}$ = ٣

Scanned by CamScanner

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ٣ء = ٩ ∴ ء = ٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ + ٢ × ٣ = ١١ ∴ أ = ١١ − ٦ = ٥

∴ المتتابعة هى (٥ ، ٨ ، ١١ ، .....)

مثال ٩

متتابعة حسابية فيها $ح_٣ + ح_٤ = ٢$ ، $ح_٦ + ح_٧ + ح_٨ = -٤٥$ ، أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $ح_٣ + ح_٤ = ٢$ ∴ (أ + ٢ء) + (أ + ٣ء) = ٢

∴ ٢أ + ٤ء = ٢ وبالقسمة على ٢ ∴ أ + ٢ء = ١ (١)

، ∵ $ح_٦ + ح_٧ + ح_٨ = -٤٥$ ∴ (أ + ٥ء) + (أ + ٦ء) + (أ + ٧ء) = −٤٥

∴ ٣أ + ١٨ء = −٤٥ وبالقسمة على ٣ : ∴ أ + ٦ء = −١٥ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ ٤ء = −١٦ ∴ ء = −٤

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ − ٨ = ١ ∴ أ = ٩

∴ المتتابعة هى (٩ ، ٥ ، ١ ، .....)

مثال ١٠

متتابعة حسابية مجموع حديها الرابع والخامس ٢٢ والنسبة بين حديها التاسع والرابع عشر ٢ : ٣ أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $ح_٤ + ح_٥ = ٢٢$ ∴ (أ + ٣ء) + (أ + ٤ء) = ٢٢

∴ ٢أ + ٧ء = ٢٢ (١)

، ∵ $\frac{ح_٩}{ح_{١٤}} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{أ + ٨ء}{أ + ١٣ء} = \frac{٢}{٣}$

∴ ٣أ + ٢٤ء = ٢أ + ٢٦ء ∴ أ = ٢ء (٢)

وبالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ ٤ء + ٧ء = ٢٢

∴ ١١ء = ٢٢ ∴ ء = ٢

وبالتعويض فى (٢) : ∴ أ = ٤ ∴ المتتابعة هى (٤ ، ٦ ، ٨ ، .....)

Scanned by CamScanner

مثال ١١

متتابعة حسابية حدها الثانى خمسة أمثال حدها السادس ، مجموع مربعى حديها الأول والرابع ٤٠٥ فما هى المتتابعة ؟

الحـــل

∵ $ح_١ = ٥ ح_٦$ ∴ $أ + ء = ٥ (أ + ٥ء)$

∴ $-٤أ = ٢٤ء$ ∴ $أ = -٦ء$ (١)

، ∵ $ح_١^٢ + ح_٤^٢ = ٤٠٥$ ∴ $أ^٢ + (أ + ٣ء)^٢ = ٤٠٥$ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) : ∴ $(-٦ء)^٢ + (-٦ء + ٣ء)^٢ = ٤٠٥$

∴ $٣٦ء^٢ + ٩ء^٢ = ٤٠٥$ ∴ $٤٥ء^٢ = ٤٠٥$

∴ $ء^٢ = ٩$ ∴ $ء = \pm ٣$

وبالتعويض فى (١) عن ء = ٣ ∴ $أ = -١٨$

∴ المتتابعة هى (-١٨ ، -١٥ ، -١٢ ، .....)

وبالتعويض فى (١) عن ء = -٣ : ∴ $أ = ١٨$

∴ المتتابعة هى (١٨ ، ١٥ ، ١٢ ، .....)

ملاحظتان

١ إذا علم مجموع ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى يفضل فرضهم على الصورة :

(أ - ء ، أ ، أ + ء)

٢ إذا علم مجموع أربعة أعداد فى تتابع حسابى يفضل فرضهم على الصورة :

(أ - ٣ء ، أ - ء ، أ + ء ، أ + ٣ء)

مثال ١٢

ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٢١ وحاصل ضربها ٢٣١ ، أوجد هذه الأعداد.

الحـــل

بفرض أن الأعداد هى : أ - ء ، أ ، أ + ء

Scanned by CamScanner

∴ (أ − ء) + أ + (أ + ء) = ٢١ ∴ ٣ أ = ٢١ ∴ أ = ٧

، ∵ أ (أ − ء) (أ + ء) = ٢٣١ ∴ أ (أ^{٢} − ء^{٢}) = ٢٣١

وبالتعويض عن أ : ∴ ٧ (٤٩ − ء^{٢}) = ٢٣١ ∴ ٤٩ − ء^{٢} = ٣٣

∴ ء^{٢} = ١٦ ∴ ء = ± ٤

وعندما ء = ٤ ∴ الأعداد هى : ٣ ، ٧ ، ١١

وعندما ء = −٤ ∴ الأعداد هى : ١١ ، ٧ ، ٣

الأوساط الحسابية

الوسط الحسابى لعدد محدود من الأعداد يساوى مجموع تلك الأعداد مقسومًا على عددها.

فمثلًا : الوسط الحسابى للأعداد ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ هو $\frac{٥ + ٧ + ٩ + ١١}{٤}$ = ٨

* **وبالتالى :** الوسط الحسابى للعددين أ ، ب يساوى $\frac{أ + ب}{٢}$ أى نصف مجموعهما.

فمثلًا : الوسط الحسابى للعددين ٤ ، ٦ يساوى $\frac{٤ + ٦}{٢}$ = ٥

تعريف

إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن الحد الأوسط ب يساوى الوسط الحسابى للحدين الآخرين أ ، حـ

أى أن ب = $\frac{أ + حـ}{٢}$ أ، ٢ ب = أ + حـ

مثال ١٣

عددان الفرق بينهما ٣ ووسطهما الحسابى ٧,٥ ، أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العددين هما أ ، ب حيث أ > ب ∴ أ − ب = ٣ (١)

، ∵ $\frac{أ + ب}{٢}$ = ٧,٥ ∴ أ + ب = ١٥ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) ينتج أن : ٢ أ = ١٨ ∴ أ = ٩

وبالتعويض فى (١) : ∴ ب = ٦ ∴ العددان هما ٦ ، ٩

Scanned by CamScanner

مثال ١٤

عددان وسطهما الحسابي ١٣ ، حاصل ضربهما ١٦٨ ، أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العددين هما س ، ص ∴ $\frac{س + ص}{٢}$ = ١٣

∴ س + ص = ٢٦ ∴ ص = ٢٦ − س (١) ، س ص = ١٦٨ (٢)

وبالتعويض من (١) في (٢) : ∴ س (٢٦ − س) = ١٦٨

∴ $س^{٢}$ − ٢٦ س + ١٦٨ = ٠ ∴ (س − ١٢) (س − ١٤) = ٠

∴ س = ١٢ أ، س = ١٤

وبالتعويض في (١) : ∴ ص = ١٤ أ، ص = ١٢ ∴ العددان هما ١٢ ، ١٤

إدخال عدد محدود من الأوساط الحسابية بين عددين

إذا كانت أ ، ب كميتين معلومتين وأريد إدخال ن من الأوساط الحسابية : $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، ... ، $س_{ن}$ بينهما فإنه ينتج لدينا متتابعة حسابية حدها الأول أ وعدد حدودها ن + ٢ وحدها الأخير ب = $ح_{ن+٢}$

وتكون المتتابعة على الصورة : (أ ، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، ... ، $س_{ن}$ ، ب)

مثال ١٥

أدخل أحد عشر وسطًا حسابيًا بين : ٢٥ ، −١١

الحل

بإدخال ١١ وسطًا حسابيًا بين ٢٥ ، −١١ نحصل على متتابعة حسابية مكونة من ١٣ حدًا

حيث أ = ٢٥ ، $ح_{١٣}$ = −١١

∴ −١١ = ٢٥ + ١٢ ء

∴ ١٢ ء = −٣٦ ∴ ء = −٣

∴ الأوساط هي (٢٢ ، ١٩ ، ١٦ ، ... ، −٨)

لاحظ أن :

عند إدخال ن من الأوساط الحسابية بين أ ، ب فإن أساس المتتابعة ء = $\frac{ب - أ}{ن + ١}$

أي أن : ء = $\frac{-١١ - ٢٥}{١٢}$ = −٣

Scanned by CamScanner

ملاحظة

عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل تكون المتتابعة الحسابية هى :

(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ..... ، ل − ٢ء ، ل − ء ، ل) ويكون :

الوسط الأول = $ح_{١}$ = أ + ء ، الوسط الثانى = $ح_{٢}$ = أ + ٢ء وهكذا ...

، الوسط الأخير = ل − ء ، الوسط قبل الأخير = ل − ٢ء وهكذا ...

* مجموع أى وسط ونظيره من الطرف الآخر = أ + ل

أى أن مجموع الوسطين الأول والأخير = أ + ل ومجموع الوسطين الثانى وقبل الأخير = أ + ل

مثال ١٦

إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين العددين ٣٥ ، ٣ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين ١٦ : ٣ فما عدد هذه الأوساط ؟

الحل

نفرض أن المتتابعة (٣٥ ، ٣٥ + ء ، ٣٥ + ٢ء ، ... ، ٣ − ٢ء ، ٣ − ء ، ٣)

∵ $\frac{٣٥ + ٣٥ + ء٢}{٣ + ٣ - ء٢} = \frac{١٦}{٣}$ ∴ $\frac{٧٠ + ء٣}{٦ - ء٣} = \frac{١٦}{٣}$

∴ ٢١٠ + ٩ء = ٩٦ − ٤٨ء ∴ ٥٧ء = −١١٤ ∴ ء = −٢

∵ ل = أ + (ن − ١)ء حيث ل الحد الأخير ، ن عدد حدود المتتابعة.

∴ ٣ = ٣٥ + (ن − ١) × −٢ ∴ ٣ = ٣٥ − ٢ن + ٢

∴ ن = ١٧ حدًا. ∴ عدد الأوساط = ١٧ − ٢ = ١٥ وسطًا.

ملاحظتان

* إذا كان : (أ ، ب ، حـ) فى تتابع حسابى فإن :

١ (أ ± ك ، ب ± ك ، حـ ± ك) فى تتابع حسابى أيضًا.

٢ (أ ك ، ب ك ، حـ ك) فى تتابع حسابى أيضًا.

* إذا كانت ($أ_{١}$ ، $ب_{١}$ ، $حـ_{١}$ ، ...) متتابعة حسابية أساسها ($ء_{١}$)

وكانت ($أ_{٢}$ ، $ب_{٢}$ ، $حـ_{٢}$ ، ...) متتابعة حسابية أساسها ($ء_{٢}$)

فإن : ($أ_{١}$ + $أ_{٢}$ ، $ب_{١}$ + $ب_{٢}$ ، $حـ_{١}$ + $حـ_{٢}$ ، ...) تمثل متتابعة حسابية أساسها ($ء_{١}$ + $ء_{٢}$)

Scanned by CamScanner

تمارين 3

على المتتابعة الحسابية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا تمارين على المتتابعة الحسابية

١ بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية وأوجد الحد العام للمتتابعة الحسابية :

(١) (٩ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ...) (٢) (٤ ، ٧ ، ١٢ ، ١٩ ، ...)

(٣) (-١٢ ، -١٨ ، -٢٤ ، -٣٠ ، -٣٦)

(٤) $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، ...\right)$

(٥) (س ، س + ص ، س + ٢ ص ، ...) (٦) (٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧)

---

٢ بين أى المتتابعات الآتية حسابية واذكر أساسها واكتب الحدود الثلاثة الأولى من كل متتابعة حسابية :

(١) $(ح_ن) = (٥ ن + ٢)$ (٢) $(ح_ن) = \left(\frac{٤ - ٥ ن}{٢}\right)$

(٣) $(ح_ن) = (٣ \times ٧^{ن+١})$ (٤) $(ح_ن) = \left(\frac{ن^٢ - ٢٥}{ن + ٥}\right)$

(٥) $(ح_ن) = \left(٤ + \frac{٣}{ن}\right)$ (٦) $(ح_ن) = \left((٢ ن + ١)^٢\right)$

---

٣ أوجد $ح_ن$ ، $ح_{١٠}$ من المتتابعة الحسابية (٧٢ ، ٦٧ ، ٦٢ ، ...) «٧٧ - ٥ ن ، ٢٧»

---

٤ فى المتتابعة الحسابية (١٢ ، ١٤ ، ١٦ ، ...) أوجد :

(١) قيمة حدها الثامن. (٢) رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢ «٢٦ ، ٤٦»

---

٥ فى المتتابعة الحسابية (٦٣ ، ٥٩ ، ٥٥ ، ... ، -١٣٣) أوجد :

(١) قيمة الحد السابع. (٢) عدد حدود المتتابعة. «٣٩ ، ٥٠»

---

٦ أوجد الحد الأخير فى المتتابعة الحسابية (٣ ، ٨ ، ١٣ ، ...) التى عدد حدودها ٢٥ حدًا. «١٢٣»

---

٧ أوجد $ح_{١٥}$ من النهاية من المتتابعة الحسابية (١٩ ، ١٥ ، ١١ ، ... ، -٦١) «-٥»

Scanned by CamScanner

٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جميع المتتابعات الآتية حسابية ما عدا المتتابعة .....

(أ) (٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ...) (ب) (-١١ ، -١٥ ، -١٩ ، -٢٣ ، ...)

(جـ) $\left(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٥} ، \frac{١}{٦} ، ...\right)$ (د) $\left(\frac{٢١}{٥} ، \frac{١٦}{٥} ، \frac{١١}{٥} ، \frac{٦}{٥} ، ....\right)$

(٢) المتتابعة الحسابية من بين المتتابعات الآتية هى .....

(أ) $(ح_ن) = \left(\frac{ن+١}{ن}\right)$ (ب) $(ح_ن) = \left((ن+١)^٢\right)$

(جـ) $(ح_ن) = \left(\frac{٣}{ن}(ن+٢)\right)$ (د) $(ح_ن) = \left(\frac{ن^٣ - ١}{ن^٢ + ن + ١}\right)$

(٣) إذا كان : ٢أ + ١ ، ٥أ - ١ ، ٦أ + ٣ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

(٤) إذا كانت : (٢٩ ، س ، ... ، ٣س ، ٩٥) متتابعة حسابية

فإن : س = ...

(أ) ٢١ (ب) ٣١ (جـ) ٩٥ (د) ١٢٤

(٥) قيمة الحد الأوسط فى المتتابعة (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ١٢٨) هى .....

(أ) ٢٢ (ب) ٤٣ (جـ) ٦٥ (د) ٢٧٩٥

(٦) المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) حدها النونى يساوى .....

(أ) ٣ن (ب) ٢ن + ١ (جـ) ٥ن - ٢ (د) ٢ن

(٧) متتابعة حسابية حدها الأول = ٥ ، $ح_{ن+١} = ح_ن + ٣$

فإن حدها الخامس = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٠ (جـ) ١٧ (د) ١٩

(٨) إذا كانت : ٣٦ ، أ ، ٢٤ ، ب حدودًا متتالية من متتابعة حسابية

فإن : ب = ...

(أ) ٣٠ (ب) ٣٦ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

Scanned by CamScanner

(٩) متتابعة حسابية عدد حدودها (ن) فإن الحد الذى رتبته (ك) من النهاية هو الحد الذى رتبته ..... من البداية.

(أ) ك (ب) ن − ك (جـ) ن − ك + ١ (د) ن − ك + ٢

(١٠) إذا كان : ($ح_ن$) متتابعة حسابية فإن : $ح_{م+ن} + ح_{م-ن}$ = ...

(أ) صفر (ب) ٢ $ح_م$ (جـ) ٢ $ح_ن$ (د) ٢ م

(١١) إذا كان : ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها $\frac{ح_٤}{ح_٧} = \frac{٢}{٣}$ فإن : $\frac{ح_٦}{ح_٨}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٦}{٧}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

(١٢) فى أى متتابعة حسابية ($ح_ن$) يكون $\frac{ح_{٤٥} + ح_{٥١}}{ح_{٤٨}}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٣) متتابعة حسابية فيها $ح_ن = م^٢$ ، $ح_م = ن^٢$ فإن أساس المتتابعة (ء) = ...

(أ) $م^٢ + ن^٢ - ٢$ (ب) م + ن (جـ) − م − ن (د) − م + ن

(١٤) متتابعة حسابية فيها $ح_م = ن$ ، $ح_ن = م$ فإن : $ح_{م+ن}$ = ...

(أ) م + ن (ب) م + ن + ٣ (جـ) ٢ م − ن (د) صفر

(١٥) فى متتابعة حسابية إذا كان : $ح_{١٧} = ٧٣$ ، $ح_{٧٣} = ١٧$

فإن رتبة الحد الذى قيمته صفر هى .....

(أ) ٥٦ (ب) ٨٩ (جـ) ٩٠ (د) ٩١

(١٦) إذا كان : ($ح_ن$) متتابعة حسابية أساسها (ء) فإن : ء = ...

(أ) $ح_م - ح_ر$ (ب) $\frac{ح_م - ح_ر}{م - ر}$ (جـ) $\frac{ح_م}{ح_ر}$ (د) $ح_{م-ر}$

---

٩ أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فى المتتابعة الحسابية (٣٥ ، ٣١ ، ٢٧ ، ...) «١٠ ، −١»

---

١٠ أوجد رتبة وقيمة أول حد موجب فى المتتابعة الحسابية (−٥١ ، −٤٨ ، −٤٥ ، ...)

«١٩ ، ٣»

Scanned by CamScanner

١١ أوجد رتبة وقيمة آخر حد موجب فى المتتابعة الحسابية (٢٨ ، ٢٥ ، ٢٢ ، ...) «١٠ ، ١»

١٢ أوجد رتبة وقيمة آخر حد سالب فى المتتابعة الحسابية (-٣٩ ، -٣٤ ، -٢٩ ، ...) «٨ ، -٤»

١٣ اكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة $(ح_ن) = (٢ + ٥ن)$ ، ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٧٢ من المتتابعة. أوجد رتبة أول حد قيمته تزيد عن ١٠٠
«(٧ ، ١٢ ، ١٧) ، ١٤ ، ٢٠»

١٤ أوجد رتبة وقيمة أول حد يكون قيمته أصغر من -١٨٠ فى المتتابعة الحسابية (٦٤ ، ٦١ ، ٥٨ ، ...)
«٨٣ ، -١٨٢»

١٥ أوجد عدد الحدود السالبة فى المتتابعة الحسابية (-٤٧ ، -٤٢ ، -٣٧ ، ...) «١٠»

١٦ أوجد عدد الحدود الموجبة فى المتتابعة الحسابية (٧٢ ، ٦٣ ، ٥٤ ، ...) «٨»

١٧ أثبت أنه لا يوجد حد قيمته ١٠٠ فى المتتابعة الحسابية (١٣ ، ١٧ ، ٢١ ، ...)

١٨ $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها : $ح_٣ - ح_٥ = ٦$ ، $ح_٤ = ١٦$ أوجد الحد النونى لهذه المتتابعة ومنه أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فيها. «٢٨ - ٣ن ، $ح_{١٠}$ ، -٢»

١٩ إذا كانت (لو س ، لو ص ، لو ع ، ...) متتابعة حسابية فأثبت أن :
$ص^٢ = س ع$ (حيث س ، ص ، ع كميات موجبة).

٢٠ إذا كانت المتتابعة (١٢ ، س ، ... ، ص ، -٢٤) متتابعة حسابية وكان حدها الأخير ثلاثة أمثال حدها السادس فأوجد قيمة كل من : س ، ص وعدد حدود هذه المتتابعة.
«٨ ، -٢٠ ، ١٠»

٢١ إذا كان $ح_{٣ن-٢}$ من المتتابعة $(١٣ ، ١٤\frac{١}{٤} ، ١٥\frac{١}{٢} ، ...)$ يساوى $ح_{٢ن+١}$ من المتتابعة $(١٩ ، ٢٠\frac{١}{٢} ، ٢٢ ، ...)$ فما قيمة ن؟ «١٣»

Scanned by CamScanner

٢٢ اكتشف الخطأ :

① يعرف أساس المتتابعة الحسابية بأنه الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة

أى أن : $ء = ح_{ن} - ح_{ن-١}$ لكل $ن \in ص^{+}$

② تعطى العلاقة بين $ن$ ، $ح_{ن}$ فى المتتابعة الحسابية كالآتى :

$ح_{ن} = أ ن + ب$ حيث أ ، ب ثابتان ، ب هو أساس المتتابعة فى هذه العلاقة.

ثانيًا تمارين على تعيين المتتابعة الحسابية

١ $(ح_{ن})$ متتابعة حسابية فيها $ح_{٦} = ١٦$ ، $ح_{٢٠} = -٢٦$ أوجد هذه المتتابعة.

«(٣١ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ...)»

---

٢ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها الثامن ١١ ، وحدها العاشر هو المعكوس الجمعى لحدها السابع عشر.

«(٢٥ ، ٢٣ ، ٢١ ، ...)»

---

٣ متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١، مجموع حديها الخامس والتاسع يساوى ٤٠ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته ١٥٢ فى هذه المتتابعة.

«(٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) ، ٥١»

---

٤ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الأول والثالث ٢٢ ومجموع حديها الثالث والرابع ٧

«(١٦ ، ١١ ، ٦ ، ...)»

---

٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثانى والرابع يساوى ٤ ومجموع حدودها السادس والسابع والثامن يساوى ٥٤

«(-٦ ، -٢ ، ٢ ، ...)»

---

٦ $(ح_{ن})$ متتابعة حسابية فيها $ح_{٥} = ٢$ ، $ح_{٧} = ٨$ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة وقيمة أول حد فيها تزيد قيمته عن ١٤٣

«(-١٠ ، -٧ ، -٤ ، ...) ، $ح_{٥٣}$ ، ١٤٦»

---

٧ $(ح_{ن})$ متتابعة حسابية فيها : $ح_{١} - ح_{٦} = ٢٥$ ، $ح_{٧} + ح_{٨} = ٩٥$ أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فيها.

«(٨٠ ، ٧٥ ، ٧٠ ، ...) ، $ح_{١٨}$ ، -٥»

Scanned by CamScanner

٨ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الخامس والعاشر يساوى ٢٢ ، حدها الثامن يساوى ثلاثة أمثال حدها الرابع.

«(-٢ ، ٠ ، ٢ ، ...)»

٩ أوجد المتتابعة الحسابية التى حدها السادس = ٢٠ ، النسبة بين حديها الرابع والعاشر كنسبة ٤ : ٧

«(١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ...)»

١٠ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثانى والخامس ٤ وحاصل ضرب حديها الثالث والسادس ٧ وبين أن هناك متتابعتين.

«(-١ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٧}{٥}$ ، ...) أو (-٣ ، -١ ، ١ ، ...)»

١١ ($ح_ن$) متتابعة حسابية فيها : $ح_٢ + ح_٤ = ٤٢$ ، $ح_٣ \times ح_٥ = ٣١٥$ أوجد هذه المتتابعة.

«(٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...)»

١٢ متتابعة حسابية تزايدية مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ١٥ ومربع حدها الخامس يساوى ٢٢٥ أوجد المتتابعة.

«(٣ ، ٦ ، ٩ ، ...)»

١٣ متتابعة حسابية حدودها موجبة حاصل ضرب حديها الأول والرابع يساوى ٤٥ وحاصل ضرب الحدين الثالث والعاشر يزيد عن حاصل ضرب الحدين الرابع والسابع بمقدار ٢٤ أوجد المتتابعة.

«(٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)»

١٤ متتابعة حسابية عدد حدودها ٢١ حدًا وحدها الأوسط يساوى ٣٢ ومجموع حدودها الثلاثة الأخيرة يساوى ١٧٧ أوجد المتتابعة.

«(٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)»

١٥ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثانى والثالث -٧ ومجموع مربعيهما ٢٩

«(-٨ ، -٥ ، -٢ ، ...) أو (١ ، -٢ ، -٥ ، ...)»

١٦ أربعة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ٣٦ ومجموع مربعاتها ٣٤٤ أوجد هذه الأعداد.

«٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢»

Scanned by CamScanner

١٧ إذا كان مجموع ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية هو ٣٣ وحاصل ضربها ٧٩٢ فما هى الأعداد ؟

«٤ ، ١١ ، ١٨»

١٨ أوجد عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١١٠ ، ٤٥٠ والتى كل منها يقبل القسمة على ١١

«٣٠»

١٩ متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، $ح_{ن}$ = ٣٩ ، $ح_{٢ن}$ = ٧٩

فما قيمة ن ؟ ثم أوجد المتتابعة.

«١٠ ، (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)»

٢٠ متتابعة حسابية منتهية حدها الأول ٧ وكان $ح_{١١}$ من البداية يساوى ٤٧ ، $ح_{١١}$ من النهاية يساوى ٣٩٥ أوجد ($ح_{ن}$)

«(٧ ، ١١ ، ١٥ ، ..... ، ٤٣٥)»

٢١ متتابعة حسابية حدها الأول ٨ ، $ح_{٢ن}$ = ٣ $ح_{ن}$ أوجد المتتابعة.

«(٨ ، ١٦ ، ٢٤ ، ...)»

٢٢ أربعة أعداد فى تتابع حسابى مجموعهم ٤٤ وإذا أضفنا ٣ إلى العدد الثانى كونت الأعداد الأول والثانى والرابع متتابعة حسابية. أوجد الأعداد الأربعة.

«٢ ، ٨ ، ١٤ ، ٢٠»

٢٣ متتابعة حسابية فيها $ح_{س}$ = ص ، $ح_{ص}$ = س ، س + ص = ٨ حيث س ≠ ص

أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذى قيمته صفر

«(٧ ، ٦ ، ٥ ، ...) ، ٨»

٢٤ إذا كونت (س ، ص ، ع) متتابعة حسابية

فأثبت أن : (٣ س + ١ ، ٣ ص + ١ ، ٣ ع + ١) تكون متتابعة حسابية أيضًا.

ثالثًا تمارين على الأوساط الحسابية

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى أى متتابعة حسابية الوسط الخامس هو الحد .....

(أ) الخامس. (ب) الرابع. (جـ) العاشر. (د) السادس.

(٢) الوسط الحسابى للعددين ٨ ، ١٢ هو .....

(أ) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ٢٠ (د) ١٠

(٣) إذا كان الوسط الحسابى للعددين : س ، ٢٦ هو ٢١ فإن : س = ...

(أ) ٢٦ (ب) ١٦ (جـ) ٤٢ (د) ٢١

Scanned by CamScanner

④ إذا كان س < ٠ ، وكان (٧ س ، ٨ ، س^{٢} − ٢) فى تتابع حسابى فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) −٩ (جـ) −٢ (د) −٧

⑤ إذا كان ص هو الوسط الحسابى بين س ، ع فإن : س + ع = ...

(أ) ٢ ص (ب) ص (جـ) $\frac{ص}{٢}$ (د) ص^{٢}

⑥ إذا كانت : (أ^{٢} ، ب^{٢} ، حـ^{٢}) فى تتابع حسابى فإن : ب^{٢} = ...

(أ) أ^{٢} + حـ^{٢} (ب) ٢ (أ^{٢} + حـ^{٢})

(جـ) $\frac{أ^{٢} + حـ^{٢}}{٢}$ (د) $\sqrt{أ^{٢} + حـ^{٢}}$

⑦ عند إدخال عدة أوساط حسابية بين أ ، ل يكون الوسط الأخير = ...
(حيث ء أساس المتتابعة الناتجة)

(أ) ل − ء (ب) ل (جـ) ل − ٢ء (د) ل + ء

⑧ إذا كان : أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص

فإن : $\frac{ص - س}{ب - أ}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٦

⑨ إذا كانت : (ح$_{ن}$) متتابعة حسابية حيث : ح$_{ن}$ = ٣ ن − ٢ فإن الوسط الحسابى بين ح$_{٥}$ ، ح$_{١١}$ يساوى .....

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٢٢ (د) ٢٦

⑩ إذا كانت (١ ، س ، ص) فى تتابع حسابى وكان : ص^{٢} = س ، س ≠ ص ≠ ١

فإن : ص = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) − $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{-١}{٢}$

⑪ إذا كانت : (س ، ٤ س + ١ ، س + ٢ ص ، ٣ ص + ٢) فى تتابع حسابى

فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) −٧ (د) ٧

⑫ إذا كان (أ ، ب ، حـ ، ء ، ...) متتابعة حسابية وكان : ب = ٨ فإن الوسط الحسابى للأعداد أ ، ب ، حـ يساوى .....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٢٤

٢ عددان الفرق بينهما ٥ ووسطهما الحسابى ٦,٥ أوجد العددين. «٩ ، ٤»

Scanned by CamScanner

٣ عددان يزيد أحدهما عن ضعف الآخر بمقدار ٢ فإذا كان وسطهما الحسابى $١٤\frac{١}{٢}$ فأوجد هذين العددين. «٩ ، ٢٠»

٤ عددان النسبة بينهما = ٣ : ١٠ ووسطهما الحسابى = ١٣ أوجد العددين. «٦ ، ٢٠»

٥ إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب هو ٨ ، الوسط الحسابى بين ٤ أ ، ٢ ب هو ٢٠ فأوجد قيمة كل من : أ ، ب «٤ ، ١٢»

٦ عددان وسطهما الحسابى ٢٣ ، حاصل ضربهما ٤٩٣ فما هما العددان ؟ «٢٩ ، ١٧»

٧ إذا كان الوسط الحسابى بين عددين هو ١١ ، الوسط الحسابى بين مربعيهما هو ١٢٥ فما هما العددان ؟ «٩ ، ١٣»

٨ أدخل ١٦ وسطًا حسابيًا بين ٢٧ ، −٢٤ «(٢٤ ، ٢١ ، ... ، −٢١)»

٩ أدخل ٨ أوساط حسابية بين لو ٢ ، لو ١٠٢٤ «(٢ لو ٢ ، ٣ لو ٢ ، ... ، ٩ لو ٢)»

١٠ إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ١ ، ١٧ وكان الوسط السابع يساوى ثلاثة أمثال الوسط الثانى. أوجد عدد هذه الأوساط. «٧»

١١ متتابعة حسابية حدها التاسع يساوى ٢٥ ، الوسط الحسابى بين حديها الثالث والخامس هو ١٠ أوجد هذه المتتابعة. «(١ ، ٤ ، ٧ ، ...)»

١٢ أدخلت عدة أوساط حسابية بين ٨ ، ٦٢ فكان مجموع الوسطين الثانى والسادس = ٤٠ أوجد عدد الأوساط. «١٧»

١٣ أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها الوسط الحسابى بين حديها الثالث والسابع هو ١٩ ، حدها العاشر يزيد عن ضعف حدها الرابع بمقدار ٢ «(٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ...)»

١٤ إذا كان مجموع الوسطين الثانى والرابع من متتابعة حسابية يساوى ١٢ ، والوسط السابع يزيد عن الوسط الثالث بمقدار ٤ فما هى المتتابعة ؟ «(٣ ، ٤ ، ٥ ، ...)»

Scanned by CamScanner

١٥ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢ ، ٤٧ و كانت النسبة بين الوسط الثانى والوسط الأخير كنسبة ٢ : ١١ أوجد عدد الأوساط.

١٤٠

١٦ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٢٠ ، ١٧٠ وكان مجموع الوسطين الخامس عشر والعشرين خمسة أمثال الوسط الخامس فما عدد هذه الأوساط ؟

٢٤٠

١٧ إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين ٦ ، ٣٦ وكانت نسبة مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين كنسبة ١ : ٣ فما عدد هذه الأوساط ؟

٩٠

١٨ تفكير إبداعى : إذا كان ل ، م وسطين حسابيين بين س ، ص حيث : ل > م

فأثبت أن : ل − م = $\frac{١}{٣}$ (س − ص)

١٩ إذا كان : أ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى برهن أن : $\frac{١}{ب حـ}$ ، $\frac{١}{أ حـ}$ ، $\frac{١}{أ ب}$ فى تتابع حسابى أيضًا.

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان الحد الأخير من متتابعة حسابية عشرة أمثال حدها الأول وحدها قبل الأخير يساوى مجموع حديها الرابع والخامس فإن : $\frac{ح_{٦}}{ح_{٣}}$ = ...

(أ) ٣ء (ب) ٢ (جـ) ٢ء (د) $\frac{٥}{٢}$

(٢) إذا كان : ء$_{١}$ هو أساس المتتابعة الحسابية (أ ، س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، ... ، س$_{٥}$ ، ب) وكان : ء$_{٢}$ هو أساس المتتابعة الحسابية (أ ، ص$_{١}$ ، ص$_{٢}$ ، ... ، ص$_{٧}$ ، ب)

فإن : $\frac{ء_{١}}{ء_{٢}}$ = ...

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٧}{٥}$

(٣) إذا كانت : (أ ، ب ، حـ ، ٢٠ ، ك ، هـ ، و) تكون متتابعة حسابية

فإن : أ + ب + حـ + ك + هـ + و = ...

(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

Scanned by CamScanner

④ إذا كان : س ، ص ، ع ثلاثة حدود متتالية فى متتابعة حسابية

فإن : (س + ٢ ص − ع) (٢ ص + ع − س) (ع + س − ص) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ س ص ع (ب) س ص ع (جـ) ٢ س ص ع (د) ٤ س ص ع

⑤ إذا كان حجم متوازى المستطيلات يساوى ١٠٥ سم^{٣} وأبعاده الثلاثة فى تتابع حسابى ومجموع أبعاده يساوى ١٥ سم فإن أكبر أبعاد المتوازى يساوى ..... سم.

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

⑥ إذا كان : (أ ، ب ، حـ ، ك ، هـ) متتابعة حسابية

فإن : أ − ٤ ب + ٦ حـ − ٤ ك + هـ = ...

(أ) ب + حـ (ب) ك − ب (جـ) صفر (د) ٣

⑦ إذا كانت : $\left(\frac{١}{ب+حـ} ، \frac{١}{حـ+أ} ، \frac{١}{أ+ب}\right)$ متتابعة حسابية فإن

أى مما يأتى فى تتابع حسابى أيضًا ؟

(أ) ب^{٢} ، حـ^{٢} ، أ^{٢} (ب) أ^{٢} ، ب^{٢} ، حـ^{٢}

(جـ) حـ^{٢} ، أ^{٢} ، ب^{٢} (د) ب^{٢} ، أ^{٢} ، حـ^{٢}

⑧ إذا أدخلنا ثلاث أوساط حسابية بين س ، ص فإن هذه الأوساط تكون .....

(أ) $\frac{ص - س}{٤}$ ، $\frac{ص - س}{٣}$ ، $\frac{ص - س}{٢}$

(ب) $\frac{٣ س + ص}{٤}$ ، $\frac{س + ص}{٢}$ ، $\frac{س + ٣ ص}{٤}$

(جـ) $\frac{ص - س}{٤}$ ، $\frac{ص - س}{٢}$ ، $\frac{ص + س}{٢}$

(د) − $\frac{٣ س + ص}{٤}$ ، $\frac{س + ص}{٢}$ ، − $\frac{س + ٣ ص}{٤}$

⑨ متتابعة حسابية حدودها أعداد صحيحة وأساسها ٢ < ء < ٧ إذا كان أحد حدودها يساوى ١١٥ ، وحد آخر فيها يساوى ١٦٦ فإن أساسها = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

Scanned by CamScanner

(١٠) إذا كان : لو$_{٢}$ ٢ ، لو$_{٢}$ (٢^{س} − ٥) ، لو$_{٢}$ (٢^{س} − $\frac{٧}{٢}$) فى تتابع حسابى فإن : س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١١) إذا كان : $\frac{أ^{ن+٢} + ب^{ن+٢}}{أ^{ن+١} + ب^{ن+١}}$ وسط حسابى بين أ ، ب فإن : ن = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) −٢ (د) صفر

(٢١) (ح$_{ن}$) متتابعة حسابية حيث ح$_{ن}$ ≠ صفر أثبت أن :

$$\frac{١}{ح_{١} ح_{٢}} + \frac{١}{ح_{٢} ح_{٣}} + ... + \frac{١}{ح_{ن-١} ح_{ن}} = \frac{ن-١}{ح_{١} ح_{ن}}$$

رابعًا تطبيقات على المتتابعة الحسابية

(١) **الربط بالهندسة :** أ ب حـ ء شكل رباعى قياسات زواياه فى تتابع حسابى فإذا كانت : جا أ + جا ء = ١ أوجد قياس كل من زوايا الشكل الرباعى. «٣٠° ، ٧٠° ، ١١٠° ، ١٥٠°»

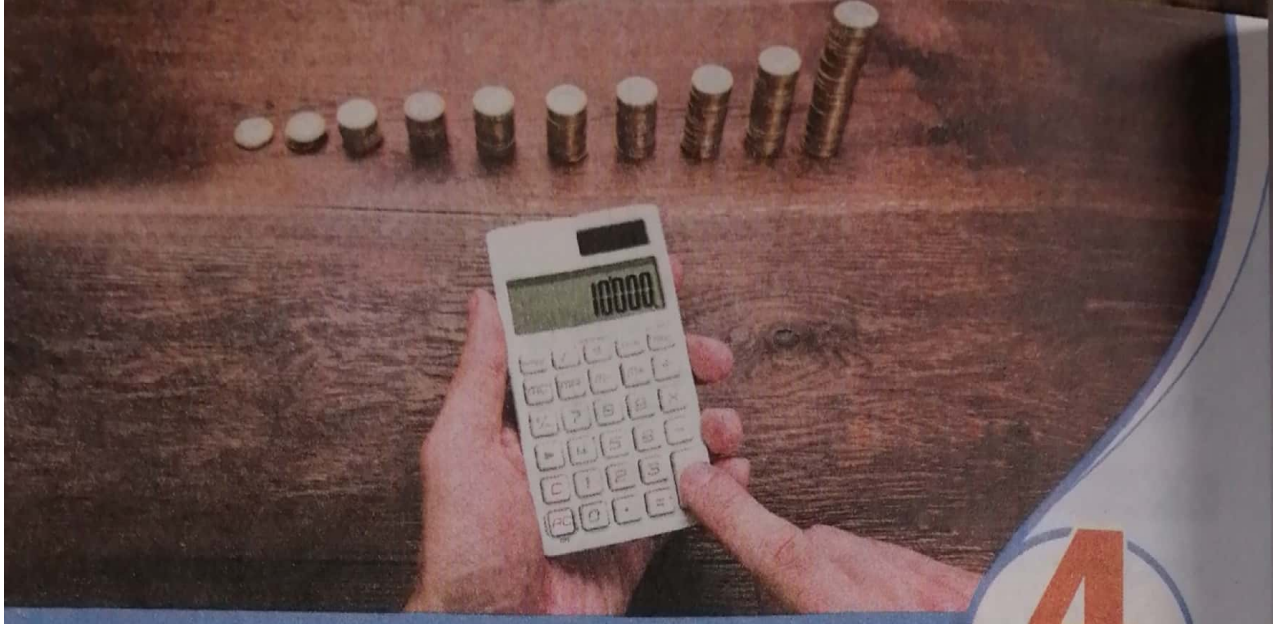
(٢) **الربط بالهندسة :** أوجد قياس كل من زوايا المثلث الذى قياس إحدى زواياه هو الوسط الحسابى بين قياسى الزاويتين الأخريين والفرق بين قياسى الزاويتين الصغرى والكبرى يساوى ٨٠° «٢٠° ، ٦٠° ، ١٠٠°»

(٣) **الربط بالهندسة :** أوجد النسبة بين أطوال أضلاع Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه أ هو الوسط الحسابى بين ب ، حـ «٣ : ٥ : ٤»

(٤) **الربط بالفيزياء :** بدأ كريم فى قيادة دراجته البخارية من أعلى نقطة فى منحدر فقطع فى الثانية الأولى ١٠٠ سم وفى كل ثانية تالية بعد ذلك كان يقطع مسافة تزيد عن المسافة السابقة لها مباشرة بمقدار ١٢٠ سم أوجد المسافة التى يقطعها فى الثانية العاشرة. «١١٨٠ سم»

(٥) **الربط بالتجارة :** اشترى رجل دراجة بخارية واتفق مع البائع أن يسدد ثمنها على أقساط شهرية تكون متتابعة حسابية حدها النونى هو ١٢٠ ن + ٨٠ ، فإذا كان القسط الأخير هو ١٤٠٠ جنيه. أوجد عدد هذه الأقساط. «١١»

Scanned by CamScanner



الدرس 4

المتسلسلات الحسابيــة

المتسلسلة الحسابية

* هى المتسلسلة الناتجة من عملية جمع حدود متتابعة حسابية.

أى أنه : لأى متتابعة حسابية (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، .....)

حدها الأول = أ وأساسها = ء وحدها العام (النونى) $ح_ن$ = أ + (ن − ١) ء

تسمى المتسلسلة أ + (أ + ء) + (أ + ٢ء) + (أ + ٣ء) + ... متسلسلة حسابية ويكون مجموع ن

حدًا من حدود المتتابعة الحسابية = $\sum_{ر=١}^{ن}$ (أ + (ر − ١) ء)

مثال ١

أوجد قيمة : ١ + ٥ + ٩ + ١٣ + ... + ٣٧

الحــل

∵ (١ ، ٥ ، ٩ ، ١٣ ، .... ، ٣٧) هى متتابعة حسابية حدها الأول أ = ١

وأساسها ء = ٤

، ∵ الحد العام للمتتابعة $ح_ن$ = أ + (ن − ١) ء = ١ + (ن − ١) × ٤

= ١ + ٤ن − ٤ = ٤ن − ٣

نوجد عدد الحدود بوضع $ح_ن$ = ٣٧ ∴ ٤ن − ٣ = ٣٧ ∴ ن = ١٠

∴ عدد حدود المتتابعة = ١٠ حدود

Scanned by CamScanner

$\therefore$ ١ + ٥ + ٩ + ١٣ + ... + ٣٧ = $\sum_{\text{ر}=١}^{١٠}$ (٤ ر − ٣) = $\sum_{\text{ر}=١}^{١٠}$ ٤ ر − $\sum_{\text{ر}=١}^{١٠}$ ٣

= ٤ × $\frac{١٠ \times (١ + ١٠)}{٢}$ − ٣ × ١٠ = ٢٢٠ − ٣٠ = ١٩٠

مثال ٢

أوجد مجموع ١٠ حدود متتالية من المتتابعة ($ح_{ن}$) = (٣ ن + ٢) بدءًا من حدها الخامس.

الحـــل

$\because$ الحد النونى للمتتابعة $ح_{ن}$ = ٣ ن + ٢ مقدار جبرى من الدرجة الأولى فى ن

$\therefore$ المتتابعة حسابية وأساسها ء = ٣ ، حدها الأول $ح_{١}$ = ٣ (١) + ٢ = ٥

$\therefore$ مجموع ١٠ حدود بدءًا من حدها الخامس

= $ح_{٥}$ + $ح_{٦}$ + $ح_{٧}$ + ... + $ح_{١٤}$

= $\sum_{\text{ر}=٥}^{١٤}$ (٣ ر + ٢) = $\sum_{\text{ر}=١}^{١٤}$ (٣ ر + ٢) − $\sum_{\text{ر}=١}^{٤}$ (٣ ر + ٢)

= ($\sum_{\text{ر}=١}^{١٤}$ ٣ ر + $\sum_{\text{ر}=١}^{١٤}$ ٢) − ($\sum_{\text{ر}=١}^{٤}$ ٣ ر + $\sum_{\text{ر}=١}^{٤}$ ٢)

= (٣ × $\frac{١٤ \times ١٥}{٢}$ + ٢ × ١٤) − (٣ × $\frac{٤ \times ٥}{٢}$ + ٢ × ٤)

= (٣١٥ + ٢٨) − (٣٠ + ٨) = ٣٠٥

مجموع المتتابعة الحسابية

١ مجموع المتتابعة الحسابية بمعلومية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل)

مجموع متتابعة حسابية حدها الأول أ وحدها الأخير ل وعدد حدودها ن هو $ح_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

استنتاج القانون

نفرض أن المتتابعة هى : (أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، ... ، ل − ٢ء ، ل − ء ، ل)

$\therefore$ $ح_{ن}$ = أ + (أ + ء) + (أ + ٢ء) + ... + (ل − ٢ء) + (ل − ء) + ل (١)

وبكتابة الطرف الأيسر فى المعادلة (١) معكوسًا

$\therefore$ $ح_{ن}$ = ل + (ل − ء) + (ل − ٢ء) + ... + (أ + ٢ء) + (أ + ء) + أ (٢)

Scanned by CamScanner

وبجمع (١) ، (٢) :

$\therefore$ ٢ $ح_ن$ = (أ + ل) + (أ + ل) + (أ + ل) + ... + (أ + ل) + (أ + ل) = ن (أ + ل)

$\therefore$ $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

٢ مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ء)

مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول أ ، أساسها ء هو :

$ح_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

استنتاج القانون

$\because$ ل = أ + (ن − ١) ء (١) ، $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل) (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

$\therefore$ $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ [أ + أ + (ن − ١) ء] $\therefore$ $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

ملاحظة

يمكن استنتاج القانون $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء] باستخدام الرمز $\sum$ كما يلى :

$\because$ الحد العام (النونى) للمتتابعة الحسابية $ح_ن$ = أ + (ن − ١) ء

$\therefore$ مجموع ن حدًا الأولى منها $ح_ن = \sum_{ر=١}^{ن}$ (أ + (ر − ١) ء)

$= \sum_{ر=١}^{ن}$ (أ + ء ر − ء)

$= \sum_{ر=١}^{ن}$ ((أ − ء) + ء ر)

$= \sum_{ر=١}^{ن}$ (أ − ء) + $\sum_{ر=١}^{ن}$ ء ر

$= (أ - ء)\, ن + ء \times \frac{ن(ن + ١)}{٢}$

$= \frac{ن}{٢}$ [٢ (أ − ء) + ء (ن + ١)]

$= \frac{ن}{٢}$ [٢ أ − ٢ ء + ء ن + ء]

$= \frac{ن}{٢}$ [٢ أ + ء ن − ء]

$= \frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

Scanned by CamScanner

مثال ٣

أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية التى حدها الأول ٣ وحدها الأخير ٢١ وعدد حدودها ١٠

الحـــل

أ = ٣ ، ل = ٢١ ، ن = ١٠ ∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢}(أ + ل)$

∴ $ح_{١٠} = \frac{١٠}{٢}(٣ + ٢١) = ٥ \times ٢٤ = ١٢٠$

مثال ٤

فى المتسلسلة الحسابية : (٢٤ + ٢١ + ١٨ + ...) أوجد مجموع ٨ حدود الأولى منها.

الحـــل

أ = ٢٤ ، ء = ٢١ − ٢٤ = −٣ ، ن = ٨

∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)ء]$

∴ $ح_٨ = \frac{٨}{٢}[٢ \times ٢٤ + ٧ \times -٣] = ٤[٤٨ - ٢١] = ٤ \times ٢٧ = ١٠٨$

ملاحظات

١ لإيجاد المجموع $ح_ن$ يلزم معرفة عدد الحدود ن وإن لم تكن معلومة نوجدها من القانون
ل = أ + (ن − ١)ء

٢ لإيجاد المجموع ابتداءً من حد معين نوجد قيمة هذا الحد ونعوض عنه بدلاً من أ فى القانون.

٣ $ح_{١٠} - ح_٩ = ح_{١٠}$ ، $ح_{١٣} - ح_{١٢} = ح_{١٣}$ ، ... وهكذا
أى أن : $ح_ن - ح_{ن-١} = ح_ن$ لكل ن > ١

٤ عدد الحدود التى تجعل المجموع أكبر ما يمكن = عدد الحدود (الموجبة أو غير سالبة).

٥ عدد الحدود التى تجعل المجموع أصغر ما يمكن = عدد الحدود (السالبة أو غير موجبة).

٦ لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع موجبًا نضع $ح_ن > ٠$

٧ لإيجاد عدد الحدود التى تجعل المجموع سالبًا نضع $ح_ن < ٠$

٨ مجموع عدد (ن) حدًا من متتابعة حسابية هو دالة من الدرجة الثانية فى ن

Scanned by CamScanner

مثال ٥

أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية (١٣ ، ٢٢ ، ٣١ ، ... ، ١٣٩)

الحـــل

أ = ١٣ ، ء = ٢٢ − ١٣ = ٩ ، ل = ١٣٩

نوجد عدد الحدود ∵ ل = أ + (ن − ١) ء ∴ ١٣٩ = ١٣ + (ن − ١) × ٩

∴ ١٢٦ = ٩ (ن − ١) ∴ ن − ١ = ١٤ ∴ ن = ١٥

∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل) ∴ $ح_{١٥} = \frac{١٥}{٢}$ (١٣ + ١٣٩) = ١١٤٠

مثال ٦

أوجد مجموع الخمسة عشر حدًا الأولى من المتتابعة $(ح_ن)$ = (٥ ن − ٣)

الحـــل

∵ $ح_ن$ = ٥ ن − ٣ مقدار من الدرجة الأولى فى ن ∴ المتتابعة حسابية وأساسها = ٥

∴ أ = $ح_١$ = ٥ × ١ − ٣ = ٢ ، ء = ٥ ، ن = ١٥

∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

∴ $ح_{١٥} = \frac{١٥}{٢}$ [٢ × ٢ + ١٤ × ٥] = ٥٥٥

مثال ٧

أوجد مجموع عشرة حدود من المتتابعة الحسابية (٣ ، ٧ ، ١١ ، ...) ابتداء من الحد الثامن.

الحـــل

∵ $ح_٨$ = أ + ٧ء = ٣ + ٧ × ٤ = ٣١

∴ $ح_{١٠}$ ابتداءً من $ح_٨$ = $\frac{١٠}{٢}$ [٢ $ح_٨$ + ٩ء] = ٥ [٢ × ٣١ + ٩ × ٤] = ٤٩٠

Scanned by CamScanner

مثال ٨ كم حدًا يلزم أخذه من حدود المتتابعة الحسابية (٣٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها مساويًا ١٣٥ ؟ ثم علل وجود جوابين.

الحل

أ = ٣٥ ، ء = −٥ ، $ح_ن$ = ١٣٥

∴ ١٣٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ × ٣٥ + (ن − ١) × −٥]

∴ ٢٧٠ = ن [٧٥ − ٥ ن]

∴ ٥ $ن^٢$ − ٧٥ ن + ٢٧٠ = ٠

∴ (ن − ٩) (ن − ٦) = ٠

∴ $ح_ن$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) ء]

∴ ١٣٥ = $\frac{ن}{٢}$ [٧٠ − ٥ ن + ٥]

∴ ٢٧٠ = ٧٥ ن − ٥ $ن^٢$

∴ $ن^٢$ − ١٥ ن + ٥٤ = ٠

∴ ن = ٦ أ، ن = ٩

أى أن مجموع الستة حدود الأولى = مجموع التسعة حدود الأولى.

وهذا يعنى أن مجموع الحدود ابتداءً من $ح_٧$ إلى $ح_٩$ = صفر

مثال ٩ أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها $ح_١$ = ١٢ ، $ح_ن$ = ٧٨ ، $ح_ن$ = ١٠٣٥ حيث ن عدد حدودها.

الحل

∵ $ح_١$ = ١٢ ∴ أ = ١٢

، ∵ $ح_ن$ = ٧٨ ∴ ل = ٧٨

، ∵ $ح_ن$ = ١٠٣٥ ∴ $\frac{ن}{٢}$ [أ + ل] = ١٠٣٥

∴ $\frac{ن}{٢}$ [١٢ + ٧٨] = ١٠٣٥ ∴ $\frac{ن}{٢}$ × ٩٠ = ١٠٣٥

∴ ن = ٢٣ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٢٣ حدًا.

∴ $ح_{٢٣}$ = ٧٨ ∴ أ + ٢٢ ء = ٧٨

∴ ١٢ + ٢٢ ء = ٧٨ ∴ ٢٢ ء = ٦٦

∴ ء = ٣ ∴ المتتابعة الحسابية هى : (١٢ ، ١٥ ، ١٨ ، .... ، ٧٨)

Scanned by CamScanner

مثال ١٠

أوجد أكبر مجموع للمتتابعة الحسابية (٤٥ ، ٤١ ، ٣٧ ، ...)

الحـــل

∵ أكبر مجموع للمتتابعة = مجموع الحدود الموجبة فقط

لذلك نوجد عدد الحدود الموجبة بوضع $ح_ن > ٠$

∴ أ + (ن − ١) ء > ٠ ∴ ٤٥ + (ن − ١) × −٤ > ٠ ∴ ٤٥ − ٤ن + ٤ > ٠

∴ ٤٩ − ٤ن > ٠ ∴ ٤ن < ٤٩ ∴ ن < $١٢\frac{١}{٤}$

∴ ن = ١٢ ∴ عدد الحدود الموجبة = ١٢ حدًا.

∴ أكبر مجموع للمتتابعة = $ح_{١٢}$ = $\frac{١٢}{٢}$ [٢ × ٤٥ + ١١ × −٤] = ٢٧٦

مثال ١١

أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢٢ ، ١٩ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا.

الحـــل

أ = ٢٥ ، ء = −٣

لإيجاد أصغر عدد من الحدود يلزم أخذها ليكون المجموع سالبًا نضع $ح_ن < ٠$

∴ $\frac{ن}{٢}$ [٢أ + (ن − ١) ء] < ٠ ∴ ٢أ + (ن − ١) ء < ٠

∴ ٢ × ٢٥ + (ن − ١) × −٣ < ٠ ∴ ٥٠ − ٣ن + ٣ < ٠

∴ ٥٣ − ٣ن < ٠ ∴ ٣ن > ٥٣

∴ ن > $١٧\frac{٢}{٣}$ ∴ ن = ١٨

∴ أصغر عدد من الحدود يلزم أخذها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا = ١٨ حدًا.

Scanned by CamScanner

مثال ١٢

متتابعة حسابية مجموع حديها الثانى والثالث = ١٣ ، مجموع العشرين حدًا الأولى منها ٦١٠ أوجد المتتابعة واحسب عدد الحدود التى يلزم أخذها ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ١٥٥

الحل

∵ $ح_٢ + ح_٣ = ١٣$ ∴ $(أ + ء) + (أ + ٢ء) = ١٣$

∴ $٢أ + ٣ء = ١٣$ (١)

، ∵ $ح_{٢٠} = ٦١٠$ ∴ $\frac{٢٠}{٢}[٢أ + ١٩ء] = ٦١٠$

∴ $٢أ + ١٩ء = ٦١$ (٢)

وبطرح (١) من (٢) : ∴ $١٦ء = ٤٨$ ∴ $ء = ٣$

وبالتعويض فى (١) : ∴ $أ = ٢$ ∴ المتتابعة هى (٢ ، ٥ ، ٨ ، ...)

∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢}[٢أ + (ن - ١)ء]$ ∴ $١٥٥ = \frac{ن}{٢}[٢ \times ٢ + (ن - ١) \times ٣]$

∴ $١٥٥ \times ٢ = ن[٣ن + ١]$ ∴ $٣ن^٢ + ن - ٣١٠ = ٠$

∴ $(ن - ١٠)(٣ن + ٣١) = ٠$ ∴ $ن = ١٠$ أ، $ن = \frac{-٣١}{٣} \notin ص^+$ (مرفوض)

∴ عدد الحدود الذى يجعل المجموع مساويًا ١٥٥ هو ١٠ حدود.

مثال ١٣

أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع الحدود العشرة الأولى منها ١٢٠ ومجموع الحدود الستة التالية لها ١٦٨

الحل

∵ $ح_{١٠}$ الأولى = ١٢٠ ∴ $\frac{١٠}{٢}[٢أ + ٩ء] = ١٢٠$

∴ $٢أ + ٩ء = ٢٤$ (١)

، ∵ $ح_{١٦} = ١٢٠ + ١٦٨ = ٢٨٨$ ∴ $\frac{١٦}{٢}[٢أ + ١٥ء] = ٢٨٨$

∴ $٢أ + ١٥ء = ٣٦$ (٢)

Scanned by CamScanner

وبطرح (١) من (٢) :

∴ ٦ء = ١٢ ∴ ء = ٢

وبالتعويض فى (١) :

∴ أ = ٣ ∴ المتتابعة هى (٣ ، ٥ ، ٧ ، ...)

مثال ١٤

أوجد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ والتى لا تقبل القسمة على ٧

الحل

لإيجاد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ والتى لا تقبل القسمة على ٧ نتبع الآتى :

١ نحسب مجموع جميع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠

وهى (١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ... ، ٩٩) متتابعة حسابية فيها : أ = ١١ ، ء = ١ ، ل = ٩٩

∵ ل = أ + (ن − ١) ء ∴ ٩٩ = ١١ + (ن − ١) × ١

∴ ٩٩ = ن + ١٠ ∴ ن = ٨٩

∵ $ح_ن = \frac{ن}{٢}$ (أ + ل) ∴ $ح_{٨٩} = \frac{٨٩}{٢}$ (١١ + ٩٩) = ٤٨٩٥

٢ نحسب مجموع جميع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠ والتى تقبل القسمة على ٧ وهى (١٤ ، ٢١ ، ٢٨ ، ... ، ٩٨) متتابعة حسابية فيها :

أ = ١٤ ، ء = ٧ ، ل = ٩٨

∵ ل = أ + (ن − ١) ء ∴ ٩٨ = ١٤ + (ن − ١) × ٧ ∴ ٩٨ = ٧ + ٧ ن

∴ ن = ١٣ ∴ $ح_{١٣} = \frac{١٣}{٢}$ (١٤ + ٩٨) = ٧٢٨

، من ١ ، ٢ :

∴ مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠ ، ١٠٠

والتى لا تقبل القسمة على ٧ = ٤٨٩٥ − ٧٢٨ = ٤١٦٧

Scanned by CamScanner

مثال ١٥

إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية يعطى بالقانون : $ح_ن = ن(٣ن + ٢)$ فأوجد المتتابعة ثم أوجد حدها التاسع.

الحل

∵ $ح_ن = ن(٣ن + ٢)$

، بوضع ن = ١ ∴ $ح_١ = ١ \times (٣ \times ١ + ٢) = ٥$ ∴ $ح_١ = ٥$

، بوضع ن = ٢

∴ $ح_٢ = ٢ \times (٣ \times ٢ + ٢) = ١٦$ ∴ $ح_١ + ح_٢ = ١٦$

∴ $ح_٢ = ١٦ - ٥ = ١١$

، بوضع ن = ٣ ∴ $ح_٣ = ٣ \times (٣ \times ٣ + ٢) = ٣٣$

∴ $ح_١ + ح_٢ + ح_٣ = ٣٣$ ولكن $ح_١ + ح_٢ = ١٦$ ∴ $ح_٣ = ٣٣ - ١٦ = ١٧$

∴ المتتابعة هى (٥ ، ١١ ، ١٧ ، ...) ∴ $ح_٩ = أ + ٨ء = ٥ + ٨ \times ٦ = ٥٣$

حل آخر :

∵ لكل ن > ١ نجد أن : $ح_ن = ح_ن - ح_{ن-١} = ن(٣ن + ٢) - (ن - ١)(٣(ن - ١) + ٢)$

$= ٣ن^٢ + ٢ن - (ن - ١)(٣ن - ٣ + ٢)$

$= ٣ن^٢ + ٢ن - (ن - ١)(٣ن - ١)$

$= ٣ن^٢ + ٢ن - ٣ن^٢ + ٤ن - ١ = ٦ن - ١$

، ∵ $ح_١ = ٥$ ∴ $ح_١ = ٥$

∴ المتتابعة هى $(ح_ن) = (٦ن - ١) = (٥ ، ١١ ، ١٧ ، ...)$

، $ح_٩ = ح_٩ - ح_٨ = ٩(٣ \times ٩ + ٢) - ٨(٣ \times ٨ + ٢) = ٥٣$

مثال ١٦

وفر رجل فى نهاية سنة ما مبلغ ٧٥٠٠ جنيه ثم أخذ يزيد ما يوفره فى كل سنة بمقدار ١٥٠٠ جنيه عن السنة السابقة لها. أوجد :

١ مقدار ما يوفره الرجل فى السنة السابعة عشر.

٢ جملة ما يوفره الرجل فى ١٧ عامًا.

Scanned by CamScanner

الحل

المبالغ التى يوفرها الرجل فى نهاية كل سنة تكون المتتابعة الحسابية

(٧٥٠٠ ، ٩٠٠٠ ، ١٠٥٠٠ ، ...) التى حدها الأول = ٧٥٠٠ وأساسها = ١٥٠٠

١ ما يوفره الرجل فى السنة السابعة عشر = $ح_{١٧}$ من هذه المتتابعة = أ + ١٦ ء

= ٧٥٠٠ + ١٦ × ١٥٠٠ = ٣١٥٠٠ جنيه

٢ جملة ما يوفره الرجل فى ١٧ عامًا = مجموع ١٧ حدًا الأولى من هذه المتتابعة

= $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل) حيث ل = $ح_{١٧}$ = ٣١٥٠٠ جنيه

= $\frac{١٧}{٢}$ (٧٥٠٠ + ٣١٥٠٠) = $\frac{١٧}{٢}$ × ٣٩٠٠٠

= ٣٣١٥٠٠ جنيه.

مثال ١٧

فى مسابقة لإحدى شركات المياه الغازية وضعت ٢٤ زجاجة على خط مستقيم واحد والمسافة بين كل زجاجة وأخرى ٥ أمتار ووضع صندوق مجاور للزجاجة الأولى، فإذا قام متسابق بجمع هذه الزجاجات واحدة تلو الأخرى ثم وضعها فى الصندوق دون تحريكه فأوجد المسافة التى قطعها المتسابق حتى أتم جمع الزجاجات كلها.

الحل

المتسابق يضع الزجاجة الأولى فى الصندوق دون قطع أى مسافة لأنها مجاورة للصندوق ثم يمشى ٥ أمتار حتى يصل إلى الزجاجة الثانية ويعود نفس المسافة ليضعها فى الصندوق ثم يمشى عشرة أمتار حتى يصل إلى الزجاجة الثالثة ويعود نفس المسافة ليضعها فى الصندوق وهكذا...

مجموع المسافات التى يمشيها = ٢ × ٥ + ٢ × ١٠ + ٢ × ١٥ + ... إلى ٢٣ حدًا

= ٢ (٥ + ١٠ + ١٥ + ... إلى ٢٣ حدًا)

= ٢ × مجموع ٢٣ حدًا من متتابعة حسابية حدها الأول ٥ وأساسها ٥

= ٢ × $\frac{٢٣}{٢}$ [٢ × ٥ + ٢٢ × ٥] = ٢٣ (١٠ + ١١٠)

= ٢٣ × ١٢٠ = ٢٧٦٠ مترًا.

Scanned by CamScanner

تمارين 4

على المتسلسلات الحسابية

/ ختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ في المتتابعة الحسابية (٥ ، ٨ ، ١١ ، ...) أوجد

(١) مجموع ٢٠ حدًا الأولى منها. «٦٧٠»

(٢) مجموع ١٠ حدود من حدودها ابتداءً من الحد السابع. «٣٦٥»

(٣) مجموع حدود المتتابعة بدءًا من $ح_{١٠}$ إلى $ح_{٢٠}$. «٥١٧»

---

٢ أوجد مجموع حدود كل من المتسلسلات الحسابية الآتية :

(١) ٢ + ٥ + ٨ + ... + ٦٢ «٦٧٢»

(٢) ٨٩ + ٨٥ + ٨١ + ... + ٣٣ «٩١٥»

(٣) $\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} + \frac{٥}{٢} + ... + \frac{١٣}{٢}$ «٢٤,٥»

---

٣ أوجد :

(١) مجموع ٣٠ حدًا الأولى من المتتابعة ($ح_{ن}$) حيث $ح_{ن} = ٢ن + ٣$ «١٠٢٠»

(٢) مجموع ٣٠ حدًا متتالية من المتتابعة (٢ن − ١) ابتداءً من $ح_{١٥}$ «١٧٤٠»

(٣) مجموع الثمانية حدود الأولى من المتتابعة الحسابية التى حدها الرابع ٢ وحدها السابع $\frac{١}{٤}$ «$١٣\frac{٢}{٣}$»

(٤) مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ٨٠) «١١٠٧»

(٥) مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٣ ، ١٠٠٠ وكل منها يقبل القسمة على ٧ «٧١٠٧١»

(٦) مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠٠ ، ١٧٠ والتى لا يقبل كل منها القسمة على ٣ «٦٢١٠»

(٧) مجموع الحدود الفردية الرتبة من حدود المتتابعة الحسابية (٢ ، ٥ ، ٨ ، ... ، ١١٠) «١٠٦٤»

Scanned by CamScanner

⑧ مجموع النصف الأخير من حدود المتتابعة الحسابية (٨ ، ١١ ، ١٤ ، ... ، ٧١) «٦١٦»

⑨ مجموع الثلث الأخير من حدود المتتابعة الحسابية (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ... ، -١٢٧) «-١٣٣٩»

---

٤ أثبت أن :

① $\frac{\text{٢ + ٦ + ١٠ + ... إلى ٧٥ حدًا}}{\text{٣ + ٩ + ١٥ + ... + ٢٩٧}} = \frac{٣}{٢}$

② $\frac{\text{١ + ٣ + ٥ + ... إلى ن من الحدود}}{\text{٢ + ٤ + ٦ + ... إلى ن من الحدود}} = \frac{ن}{ن + ١}$

---

٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① قيمة المتسلسلة الحسابية $\sum_{ر=١}^{٥} (٢ ر + ١)$ تساوى .....

(أ) ٢٥ (ب) ٣٠ (جـ) ٣٥ (د) ٤٠

② قيمة المتسلسلة : ٤ + ٩ + ١٤ + ... + (٥ ن − ١) باستخدام رمز التجميع هى .....

(أ) $\sum_{ر=٤}^{ن} (٥ ر - ١)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ ر + ١)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{ن} (٥ ر - ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٥ن - ١} (٣ ر + ١)$

③ قيمة المتسلسلة : ٧ + ١٢ + ١٧ + ٢٢ باستخدام رمز التجميع هى .....

(أ) $\sum_{ر=١}^{٤} (٥ ر + ٢)$ (ب) $\sum_{ر=١}^{٤} (٤ ر + ٣)$

(جـ) $\sum_{ر=١}^{٤} (٧ ر + ١)$ (د) $\sum_{ر=١}^{٤} (٣ ر + ٤)$

④ مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٣ ، ٥ ، ٧ ، ... ، (٢ ن + ١)) ابتداءً من حدها الأول يساوى .....

(أ) ن (ن + ١) (ب) ن (ن + ٢)

(جـ) ن (ن + ٥) (د) ن (ن + ٢) (ن + ٣)

Scanned by CamScanner

⑤ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التى هى أكبر من ١٠ وأقل من ٣٠ يساوى .....

(أ) ١٠٠ (ب) ١٥٠ (جـ) ٢٠٠ (د) ٢٥٠

⑥ مجموع الأعداد الطبيعية التى تقبل القسمة على ٣ ومحصورة بين ٣٠ ، ٥٠ يساوى .....

(أ) ٨١ (ب) ٢٤٣ (جـ) ٣٤٣ (د) ٥١٢

⑦ متتابعة حسابية مكونة من ٢٧ حدًا وحدها الأوسط ٤١ فإن مجموع حدود هذه المتتابعة = ...

(أ) ٥٥٣,٥ (ب) ١١٠٧ (جـ) ٢٢١٤ (د) ٦٨

⑧ إذا كان : $(ح_{ن})$ متتابعة حسابية فيها $ح_{ن} = ٨١ - ٢ن$

فإن : $ح_{٨٠}$ الأولى = ...

(أ) صفر (ب) ٨١ (جـ) -٨١ (د) -١٦٢

⑨ متتابعة حسابية فيها $ح_{٥} - ح_{٤} = ٢٠$ ، $ح_{٨} - ح_{٧} = ٢٩$

فإن : $ح_{٥١}$ = ...

(أ) ٤٩ (ب) ٩٨ (جـ) ١٥٥ (د) ١٥٨

⑩ عند إدخال «ن» وسطًا حسابيًا بين ٣ ، ٥١ فإن مجموع المتتابعة الحسابية الناتجة يساوى .....

(أ) ٢٧ (ن − ٢) (ب) ٢٧ (ن − ١) (جـ) ٢٧ (ن + ١) (د) ٢٧ (ن + ٢)

⑪ متتابعة حسابية حدها الأول = ٣ ، وحدها الأخير = ٣٩ ومجموع حدودها = ٢١٠ فإن عدد حدودها = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) ١٥

---

٦ أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الحسابية (١ ، ٣ ، ٥ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساويًا ٤٠٠ «٢٠»

---

٧ أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧ ، ٢٤ ، ٢١ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليتلاشى المجموع. «١٩»

Scanned by CamScanner

٨ كم حدًا يلزم أخذه من المتتابعة الحسابية (٤٠ ، ٣٦ ، ٣٢ ، ...) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموعها ٢٠٨ ؟ فسر معنى الجوابين. «٨ أ ، ١٣»

---

٩ إذا كان مجموع ن حدًا الأولى من متتابعة حسابية يتعين بالقانون :

$ح_ن = ٢ن(٧ - ن)$ فأوجد :

(١) $ح_٧$

(٢) عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة ابتداءً من الحد الأول حتى يكون المجموع مساويًا -٢٤٠ «-١٢ ، ١٥»

---

١٠ أوجد أكبر مجموع لحدود المتتابعة الحسابية (٣٣ ، ٣١ ، ٢٩ ، ...) «٢٨٩»

---

١١ أوجد أصغر مجموع للمتتابعة الحسابية (-٢٤ ، -٢٠ ، -١٦ ، ...) «-٨٤»

---

١٢ أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٨٩ ، ٨١ ، ٧٣ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا. «٢٤»

---

١٣ أوجد أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٢٥ ، ٢١ ، ١٧ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع موجبًا. «١٣»

---

١٤ فى المتتابعة الحسابية (-١١٥ ، -١٠٩ ، -١٠٣ ، ...) أوجد :

(١) رتبة أول حد موجب.

(٢) أقل عدد من حدودها ابتداءً من الحد الأول يعطى مجموعًا موجبًا. «٢١ ، ٤٠»

---

١٥ فى المتتابعة $(ح_ن)$ = (٣٢ ، ٢٨ ، ٢٤ ، ...)

(١) أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فيها.

(٢) أوجد أكبر عدد من الحدود التى تجعل المجموع أكبر من الصفر. «$ح_{١٠}$ ، -٤ ، ١٦»

---

١٦ أوجد رتبة أول حد سالب من حدود المتتابعة (١٥٢ - ٩ن) ، ثم أوجد أكبر مجموع يمكن الحصول عليه من حدود هذه المتتابعة. «١٧ ، ١٢٠٨»

Scanned by CamScanner

١٧ أوجد المتتابعة الحسابية التى فيها :

① $ح_١ = ٢٣$ ، $ح_ن = ٨٦$ ، $حـ_ن = ٥٤٥$ «(٢٣ ، ٣٠ ، ٣٧ ، ... ، ٨٦)»

② $ح_١ = ١٧$ ، $ح_ن = -٩٥$ ، $حـ_ن = -٥٨٥$ «(١٧ ، ٩ ، ١ ، ... ، -٩٥)»

١٨ أدخل ٢٨ وسطًا حسابيًا بين ٤ ، ٩١ ثم أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية الناتجة. «١٤٢٥»

١٩ أدخل ١٧ وسطًا حسابيًا بين ٤٢ ، -١٢ ثم أوجد رتبة أول حد سالب ومجموع حدود المتتابعة. «١٦ ، ٢٨٥»

٢٠ إذا كان الحد السادس من متتابعة حسابية يساوى ١٦ والحد الثامن عشر يساوى -٢٠ أوجد هذه المتتابعة ثم أوجد مجموع حدودها الموجبة فقط. «(٣١ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ...) ، ١٧٦»

٢١ $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها $ح_٢ + ح_٣ = ١٢$ ، $ح_{١٠} = ٢١$ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى منها. «(٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) ، ٤٤٠»

٢٢ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع حديها الثالث والخامس ٢٢ وينقص حدها الرابع عن حدها السابع بمقدار ٩ ثم أوجد مجموع ٢٥ حدًا الأولى منها. «(٢ ، ٥ ، ٨ ، ...) ، ٩٥٠»

٢٣ متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والأخير ٢٦ ، ومجموع حدودها ٤٦٨ ، أوجد عدد حدودها وإذا كان حدها العاشر يساوى ٤٧ فأوجد المتتابعة. «٣٦ ، (٨٣ ، ٧٩ ، ٧٥ ، ...)»

٢٤ متتابعة حسابية حدها الثانى = ١٣ ، ومجموع العشرة حدود الأولى منها = ٢٣٥ أوجد المتتابعة. «(١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ...)»

٢٥ متتابعة حسابية فيها $ح_١ + ح_٢ = ٢٢٢$ ومجموع العشرة حدود الأولى منها ١٠٣٠ أوجد المتتابعة ثم أوجد أقل عدد من الحدود يلزم أخذه ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع سالبًا. «(١١٢ ، ١١٠ ، ١٠٨ ، ...) ، ١١٤»

Scanned by CamScanner

٢٦ متتابعة حسابية حدها الأول ٢٩ وحدها الثانى يساوى خمسة أمثال حدها السابع أوجد المتتابعة ثم أوجد عدد الحدود التى يجب أخذها بدءًا من حدها الأول حتى يكون المجموع أكبر ما يمكن. «(٢٩ ، ٢٥ ، ٢١ ، ...) ، ٨»

---

٢٧ متتابعة حسابية حدها العشرون يساوى ٤١ ، ويزيد مجموع حديها الثالث والسادس عن حدها التاسع بمقدار الوحدة. أوجد المتتابعة وعدد الحدود اللازم أخذها منها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٤٤٠ «(٣ ، ٥ ، ٧ ، ...) ، ٢٠»

---

٢٨ متتابعة حسابية حدها الأول يزيد عن ضعف حدها الخامس بمقدار ٢ والوسط الحسابى لحديها الثالث والسادس يساوى ١٦ ، فما هى المتتابعة ؟ وكم حدًّا يلزم أخذها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع مساويًا الصفر ؟ «(٣٠ ، ٢٦ ، ٢٢ ، ...) ، ١٦»

---

٢٩ متتابعة حسابية حدودها موجبة ، مجموع الثلاثة حدود الأولى منها يساوى ٣٠ ، وحاصل ضرب حديها الثالث والرابع يساوى ٣٠٠. أوجد هذه المتتابعة ، ثم أوجد مجموع الخمسة عشر حدًا الأولى منها. «(٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ...) ، ٦٠٠»

---

٣٠ إذا كان مجموع الأحد عشر حدًا الأولى من متتابعة حسابية ٣٠٨ وحاصل ضرب حديها الثانى والسادس ٢٢٤ أوجد المتتابعة. «(٣ ، ٨ ، ١٣ ، ...)»

---

٣١ إذا كان مجموع العشرين حدًا الأولى من متتابعة حسابية يساوى ٨٦٠ ومجموع حديها الثالث والرابع يزيد عن حدها السادس بمقدار ٥ أوجد المتتابعة. «(٥ ، ٩ ، ١٣ ، ...)»

---

٣٢ مجموع الحدين الثالث والخامس من متتابعة حسابية تزايدية يساوى ٢٤ ومربع حدها السادس يساوى ٣٢٤ أوجد المتتابعة ، ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى منها. «(٣ ، ٦ ، ٩ ، ...) ، ٦٣٠»

---

٣٣ أوجد المتتابعة الحسابية التى مجموع العشرين حدًا الأولى منها = ٨٢٠ والوسط الحسابى لحديها الرابع والسابع = ٢١ «(٣ ، ٧ ، ١١ ، ...)»

---

٣٤ متتابعة حسابية حدها الثانى = ٢٣ ، وحدها قبل الأخير = ٩٧ ومجموع حدودها ٢٤٠٠ أوجد المتتابعة. «(٢١ ، ٢٣ ، ٢٥ ، ...)»

Scanned by CamScanner

٣٥ متتابعة حسابية فيها $ح_{٤}$ = ٢٤ ، النسبة بين مجموع الخمسة حدود الأولى منها إلى مجموع الخمسة حدود التالية لها كنسبة ١ : ٢ ، أوجد هذه المتتابعة.

«(١٢ ، ١٦ ، ٢٠ ، ...)»

٣٦ متتابعة حسابية فيها $ح_{٣٦}$ = ٠ ، إذا كان مجموع ن حدًا الأولى منها = ضعف مجموع الخمسة حدود الأولى منها ، أوجد قيمة ن

«١١ أ ، ٦٠»

٣٧ إذا أدخل ن وسطًا حسابيًا بين ١ ، ٣١ وكانت نسبة الوسط السابع إلى الوسط الأخير كنسبة $\frac{١٥}{٢٩}$ فما عدد الأوساط ؟ وما مجموع المتتابعة ؟

«١٤ ، ٢٥٦»

٣٨ متتابعة حسابية مجموع السبعة حدود الأولى منها = ٢٤٥ ومجموع السبعة حدود التالية لها = ٩٨ أوجد المتتابعة.

«(٤٤ ، ٤١ ، ٣٨ ، ...)»

٣٩ متتابعة حسابية أساسها ٢ ومجموع ن من حدودها الأولى ٣٢٠ ، مجموع ٢ ن من حدودها الأولى ١١٥٢ أوجد المتتابعة وأوجد عدد الحدود اللازم أخذها ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع ٧٢٥

«(٥ ، ٧ ، ٩ ، ...) ، ٢٥»

٤٠ كم حدًا يلزم أخذه ابتداءً من الحد الأول للمتتابعة $(ح_{ن})$ = (٤ ن + ٢) حتى يكون مجموع الثلث الأخير منها مساويًا أربعة أمثال مجموع الثلث الأول ؟

«١٨»

٤١ متتابعة حسابية مكونة من ٣٣ حدًا ، مجموع الأحد عشر حدًا الأولى منها يساوى ٢٦٤ ومجموع الأحد عشر حدًا الأخيرة منها يساوى ٣٣٠ ، أوجد مجموع حدود المتتابعة ثم أوجد مجموع الخمسة حدود الوسطى منها.

«٨٩١ ، ١٣٥»

٤٢ اكتشف الخطأ :

(١) لإيجاد أكبر مجموع للمتتابعة الحسابية نوجد عدد حدودها الموجبة وذلك بوضع $ح_{ن}$ > ٠ لإيجاد قيمة ن ، ومن ثم نوجد أكبر مجموع.

(٢) لإيجاد أصغر مجموع للمتتابعة الحسابية نوجد عدد حدودها السالبة وذلك بوضع $ح_{ن}$ < ٠ لإيجاد قيمة ن ومن ثم نوجد أصغر مجموع.

(٣) لإيجاد عدد حدود المتتابعة الحسابية الذى يتلاشى عنده المجموع نضع $ح_{ن}$ = ٠ فيكون أ + (ن − ١) ء = ٠ [حيث ن ≠ ٠] ومن ذلك نوجد عدد الحدود.

Scanned by CamScanner

④ إذا كان مجموع $ن$ حدًا الأولى من حدود متتابعة حسابية يعطى بالعلاقة

$ح_ن = \frac{ن}{٢}(٣ن + ٥)$ فإن : $ح_ن = ح_{ن+١} - ح_ن$

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٤٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا أُدخلت $ن$ من الأوساط الحسابية بين عددين $أ$ ، $ب$ فإن مجموع هذه الأوساط يساوى .....

(أ) $\frac{أ+ب}{٢}$ (ب) $ن\left(\frac{أ+ب}{٢}\right)$ (جـ) $ن(أ - ب)$ (د) $\frac{ن}{٢}(ب - أ)$

② إذا كان : $ح_ن = \frac{١}{ن+١}$ ، $حَ_ن = \frac{ن}{١ - ح_ن}$

فإن : $حَ_١ + حَ_٢ + ... + حَ_ن =$ .....

(أ) $ن(ن+٣)$ (ب) $\frac{ن}{٢}(ن+٢)$ (جـ) $\frac{ن}{٢}(ن+٣)$ (د) $\frac{ن}{٢}(ن+١)$

③ إذا كان $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فيها : $ح_١ + ح_٥ + ح_{١٠} + ح_{١٦} = ٦٤$

فإن مجموع ١٥ حدًا الأولى = ...

(أ) ١٢٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢٤٠ (د) ٣٦٠

④ متتابعة حسابية فيها $\frac{ح_م}{ح_ن} = \frac{م^٢}{ن^٢}$ حيث $م \neq ن$ فإن : $\frac{ح_م}{ح_ن} =$ .....

(أ) $\frac{م-١}{ن-١}$ (ب) $\frac{ن-١}{م-١}$ (جـ) $\frac{٢م-١}{٢ن-١}$ (د) $\frac{٢ن-١}{٢م-١}$

⑤ إذا كان $(ح_ن)$ متتابعة حسابية فإن المقدار :

$(ح_١^٢ - ح_٢^٢ + ح_٣^٢ - ح_٤^٢ + ح_٥^٢ - ح_٦^٢ + ... + ح_{٢ن-١}^٢ - ح_{٢ن}^٢)$

يساوى .....

(أ) $-ن ح_{٢ن}$ (ب) $-٤ح_{٢ن}$ (جـ) $ح_{٢ن} - ح_ن$ (د) $ح_{٢ن}^٢ - ح_ن^٢$

⑥ إذا كان $ح_ن$ مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة حسابية وكان : $ح_{٢ن} = ٣ح_ن$

فإن : $ح_{٣ن} : ح_ن =$ .....

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

Scanned by CamScanner

تطبيقات عملية على المتتابعة الحسابية

١ مسرح به ٢٥ صفًا من الكراسى ، يحتوى الصف الأول على ٢٠ كرسيًا ، ويحتوى الصف الثانى على ٢٢ كرسيًا ويحتوى الصف الثالث على ٢٤ كرسيًا وهكذا ، أوجد عدد الكراسى فى جميع صفوف المسرح.

«١١٠٠ كرسى»

٢ **ادخار :** يدخر زياد من عمله اليومى ١٥ جنيهًا ، فإذا كان يدخر فى كل يوم مبلغًا يزيد بمقدار جنيهين عن اليوم السابق له مباشرة. فأوجد مجموع ما يدخره خلال ١٥ يومًا.

«٤٣٥ جنيهًا»

٣ **الربط بالتجارة :** اقترض رجل مبلغًا من المال ، واتفق على أن يقوم بسداده على ١٠ أقساط ، يبدأ القسط الأول بمبلغ ٥٠٠ جنيه ، وكل قسط تالٍ يزيد عن القسط السابق له مباشرة بـ ٢٠٠ جنيه ، فما قيمة القرض ؟

«١٤٠٠٠ جنيه»

٤ شخص مدين بمبلغ ٤٨٠٠٠ جنيه قرر أن يسدد دينه على عشرين قسطًا سنويًا تكون متتابعة حسابية وبعد أن دفع ٥ أقساط توفى وعليه $\frac{٤}{٥}$ الدين فكم كان مقدار القسط الأول ؟

«١٧٩٢ جنيهًا»

٥ فى إحدى المسابقات المدرسية وضعت ٢١ ثمرة على خط مستقيم واحد والمسافة بين كل ثمرة وأخرى متران ووضع صندوق مجاور للثمرة الأولى فإذا قام متسابق بجمع هذه الثمار واحدة تلو الأخرى ثم وضعها فى الصندوق دون تحريك الصندوق فأوجد المسافة التى قطعها المتسابق حتى أتم جمع الثمار كلها.

«٨٤٠ مترًا»

٦ **الربط بالرياضة :** يستعد كريم لسباق المسافات الطويلة ، فقرر أن يتدرب على الجرى مسافة ٤ كيلومترات فى اليوم الأول ثم يقوم بزيادة المسافة بمقدار نصف كيلومتر واحد يوميًا.

(١) أوجد المسافة التى يقطعها كريم فى اليوم السابع.

(٢) أوجد مجموع المسافات التى يقطعها كريم فى الأسبوع الأول (الأسبوع سبعة أيام).

(٣) إذا استمر كريم فى التدريب على هذا النمط دون انقطاع فما عدد الأيام التى يقطع خلالها مسافة ٨١ كيلومترًا ؟

«٧ كم ، $٣٨\frac{١}{٢}$ كم ، ١٢ يومًا»

Scanned by CamScanner

٧ **الربط بالفيزياء :** سقط جسم من ارتفاع ٤٩٠ مترًا تحت تأثير الجاذبية الأرضية ، وبفرض إهمال مقاومة الهواء فإنه يقطع مسافة ٤,٩ أمتار فى الثانية الأولى ، ١٤,٧ متر فى الثانية الثانية ، ٢٤,٥ متر فى الثانية الثالثة وهكذا ، أوجد :

(١) المسافة التى يقطعها الجسم فى الثانية السادسة.

(٢) مجموع المسافات المقطوعة فى الثوانى الثمان الأولى.

(٣) متى يصل الجسم إلى سطح الأرض. «٥٣,٩ م ، ٣١٣,٦ م ، ١٠ ث»

---

٨ يودع رجل مبلغًا ثابتًا فى بداية كل شهر فى بنك يعطى فائدة بسيطة قدرها ١٠٪ فى السنة وفى نهاية العام حسب له البنك الفوائد فكانت ١١٧ جنيهًا فكم المبلغ الذى كان يودعه الرجل شهريًا ؟ «١٨٠ جنيهًا»

---

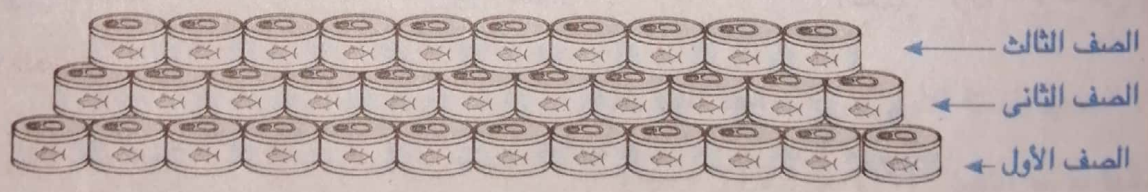
٩ اشترى رجل شقة تمليك بمبلغ ١٦٤٠٠٠ جنيه ودفع من ثمنها فورًا ٦٨٠٠٠ جنيه واتفق مع البائع على أن يدفع له باقى الثمن على أقساط شهرية تكون متتابعة حسابية حدها النونى يساوى ٤٠٠ ن + ٦٠٠ أوجد عدد الأقساط. «٢٠»

---

١٠ حوض يتسع ٦٢٥ لتر مركب عليه صنبور يصب ماء فى الحوض بمعدل ٤٠ لتر فى الساعة الأولى وبزيادة قدرها ٥ لترات فى كل ساعة عن الساعة التى قبلها فبعد كم ساعة يمتلئ الحوض ؟ «١٠»

---

١١ يمتلك كريم محلًا تجاريًا للسلع الغذائية ويقوم بترتيب علب التونة فى صفوف بحيث يضع فى الصف السفلى ١٢ علبة والصف الذى يليه ١١ علبة والصف الذى يليه ١٠ علب وهكذا



(١) أوجد عدد علب التونة فى الصف السابع.

(٢) فى أى صف تكون علب التونة ٣ علب ؟

(٣) أوجد عدد علب التونة بدءًا من الصف الأول وحتى الصف الأخير الذى يحتوى على علبة واحدة. «٦ ، ١٠ ، ٧٨»

Scanned by CamScanner

الدرس 5

المتتابعة الهندسية

تعريف

تسمى المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن \neq ٠$ متتابعة هندسية إذا كان :

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = (مقدارًا ثابتًا) لكل $ن \in ص^+$

وهذا المقدار الثابت يسمى أساس المتتابعة الهندسية ويرمز له بالرمز ر

أى أن : ر (أساس المتتابعة الهندسية) = $\frac{\text{أى حد فيها}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

مثال ١

بين أى المتتابعات الآتية تكون متتابعة هندسية وأوجد أساسها :

١ $(ح_ن) = (٢ \times ٥^{ن-١})$ ٢ $(ح_ن) = (٣ن^٣)$ ٣ $(ح_ن) = (لو ٣ + ن لو ٢)$

الحل

١ $\because ح_ن = ٢ \times ٥^{ن-١}$ ، $ح_{ن+١} = ٢ \times ٥^{(ن+١)-١} = ٢ \times ٥^ن$

$\therefore \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢ \times ٥^ن}{٢ \times ٥^{ن-١}} = ٥$ = مقدار ثابت.

$\therefore (ح_ن) = (٢ \times ٥^{ن-١})$ متتابعة هندسية أساسها ر = ٥

Scanned by CamScanner

٢ ∵ $ح_ن = ٣ن^٣$ ، $ح_{ن+١} = ٣(ن+١)^٣$

∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٣(ن+١)^٣}{٣ن^٣} = \left(\frac{ن+١}{ن}\right)^٣ \neq$ مقدار ثابت.

∴ $(ح_ن) = (٣ن^٣)$ ليست متتابعة هندسية.

٣ ∵ $ح_ن = لو ٣ + ن لو ٢ = لو ٣ + لو ٢^ن = لو (٣ \times ٢^ن)$

∴ $ح_{ن+١} = لو (٣ \times ٢^{ن+١})$ ∴ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{لو (٣ \times ٢^{ن+١})}{لو (٣ \times ٢^ن)} \neq$ مقدار ثابت.

∴ $(ح_ن) = (لو ٣ + ن لو ٢)$ ليست متتابعة هندسية.

التمثيل البيانى للمتتابعة الهندسية

مثال ٢

أثبت أن المتتابعة : $(ح_ن) = \left(\frac{١}{٨} \times ٢^ن\right)$ متتابعة هندسية ثم أوجد الستة حدود الأولى منها ومثلها بيانيًا.

الحل

∵ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{\frac{١}{٨} \times ٢^{ن+١}}{\frac{١}{٨} \times ٢^ن} = ٢^{ن+١-ن} = ٢ =$ مقدار ثابت.

∴ المتتابعة $(ح_ن) = \left(\frac{١}{٨} \times ٢^ن\right)$ متتابعة هندسية وأساسها ر = ٢

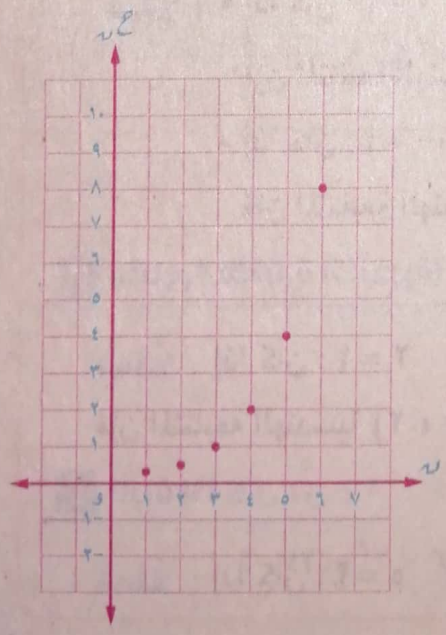
، ∵ $ح_١ = \frac{١}{٨} \times ٢ = \frac{١}{٤}$ ، $ح_٢ = \frac{١}{٨} \times ٢^٢ = \frac{١}{٢}$

، $ح_٣ = \frac{١}{٨} \times ٢^٣ = ١$ ، $ح_٤ = \frac{١}{٨} \times ٢^٤ = ٢$

، $ح_٥ = \frac{١}{٨} \times ٢^٥ = ٤$ ، $ح_٦ = \frac{١}{٨} \times ٢^٦ = ٨$

∴ الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية يمثلها بيانيًا النقط : $\left(١ ، \frac{١}{٤}\right)$ ، $\left(٢ ، \frac{١}{٢}\right)$ ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ٤) ، (٦ ، ٨)

وهى نقط لا تقع على استقامة واحدة كما فى المتتابعة الحسابية.



Scanned by CamScanner

لاحظ أنه :

يمكن إيجاد كل حد من حدود المتتابعة بدءًا من حدها الثانى بضرب أســاس المتتابعة ر فى الحد السابق له مباشرة ففى المثال السابق : $ح_١ = \frac{١}{٤}$ ، ر = ٢

$\therefore ح_٢ = \frac{١}{٤} \times ٢ = \frac{١}{٢}$ ، $ح_٣ = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١$ ، $ح_٤ = ١ \times ٢ = ٢$ وهكذا...

لاحظ أن :

المتتابعة الهندسية يمثلها بيانيًا نقط منفصلة تقع على منحنى دالة أسية وليس دالة من الدرجة الأولى كما فى المتتابعة الحسابية.

ملاحظـات

المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = أ وأساسها = ر حيث ر ≠ ٠ تكون :

١ تزايدية إذا كان : ر > ١ ، أ > ٠ أو ٠ < ر < ١ ، أ < ٠

فمثلًا : • إذا كان : أ = ٣ ، ر = ٢

فإن المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...) تزايدية.

• إذا كان : أ = −٦ ، ر = $\frac{١}{٣}$

فإن المتتابعة الهندسية (−٦ ، −٢ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $-\frac{٢}{٩}$ ، ...) تزايدية.

٢ تناقصية إذا كان : ٠ < ر < ١ ، أ > ٠ أو ر > ١ ، أ < ٠

فمثلًا : • إذا كان : أ = ٢ ، ر = $\frac{١}{٢}$

فإن المتتابعة الهندسية (٢ ، ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ...) تناقصية.

• إذا كان : أ = −٢ ، ر = ٣

فإن المتتابعة الهندسية (−٢ ، −٦ ، −١٨ ، −٥٤ ، ...) تناقصية.

٣ متناوبة الإشارة (تذبذبية) إذا كان : ر < ٠

فمثلًا : إذا كان : أ = ٣ ، ر = −٢

فإن المتتابعة الهندسية (٣ ، −٦ ، ١٢ ، −٢٤ ، ...) متناوبة الإشارة.

٤ ثابتة إذا كان : ر = ١

فمثلًا : إذا كان : أ = ٥ ، ر = ١ فإن المتتابعة (٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ ، ...) ثابتة.

Scanned by CamScanner

الحد العام (النونى) للمتتابعة الهندسية

إذا كانت ($ح_ن$) متتابعة هندسية حدها الأول = أ ، أساسها = ر

فإن حدها العام يكون على الصورة $\boxed{ح_ن = أ ر^{ن-١}}$ حيث ن رتبة الحد.

الصورة العامة للمتتابعة الهندسية

بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... فى القانون السابق نحصل على الصورة العامة للمتتابعة الهندسية

وهى : $\boxed{(أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{٣} ، ...)}$

حيث نلاحظ أن : $ح_١ = أ$ ، $ح_٢ = أ ر$ ، $ح_٣ = أ ر^{٢}$ ، ...

أى أن : أس ر فى أى حد من حدود المتتابعة الهندسية يقل بمقدار الواحد الصحيح عن رتبة هذا الحد (أى ترتيبه)

ملاحظة

إذا كانت المتتابعة الهندسية منتهية وعدد حدودها = ن

فإنه يرمز لحدها الأخير بالرمز ل حيث $\boxed{ل = أ ر^{ن-١}}$ حيث ن عدد الحدود

وتكون الصورة العامة المتتابعة الهندسية فى هذه الحالة على الصورة :

$(أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، ... ، أ ر^{ن-١})$ أ، $(أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، ... ، \frac{ل}{ر^{٢}} ، \frac{ل}{ر} ، ل)$

مثال ٣

أوجد $ح_٦$ ، $ح_{١٠}$ من المتتابعة الهندسية (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ...)

الحل

أ = ٦ ، ر = $\frac{١٢}{٦}$ = ٢

∴ $ح_٦ = أ ر^{٥} = ٦ \times ٢^{٥} = ١٩٢$ ، $ح_{١٠} = أ ر^{٩} = ٦ \times ٢^{٩} = ٣٠٧٢$

Scanned by CamScanner

مثال ٤

إذا كان $\frac{١}{٢٤٣}$ هو أحد حدود المتتابعة الهندسية (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ...) فما رتبة هذا الحد ؟

الحل

أ = ٢٧ ، ر = $\frac{٩}{٢٧}$ = $\frac{١}{٣}$

∵ $ح_ن$ = أ $ر^{ن-١}$

∴ $\frac{١}{٣}$ × $\frac{١}{٣^{٥}}$ = $(\frac{١}{٣})^{ن-١}$

∴ ن = ٩

∴ $\frac{١}{٢٤٣}$ ٢٧ $(\frac{١}{٣})^{ن-١}$

∴ $(\frac{١}{٣})^{٨}$ = $(\frac{١}{٣})^{ن-١}$

∴ ن − ١ = ٨

∴ $\frac{١}{٢٧}$ × $\frac{١}{٢٤٣}$ = $(\frac{١}{٣})^{ن-١}$

∴ الحد الذى قيمته $\frac{١}{٢٤٣}$ هو $ح_{٩}$

تعيين المتتابعة الهندسية

تتعين المتتابعة الهندسية متى علم حدها الأول (أ) وأساسها (ر)

مثال ٥

متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى ١٢ وحدها الثامن يساوى ٣٨٤ أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $ح_{٣}$ = ١٢ ∴ أ $ر^{٢}$ = ١٢ (١)

، ∵ $ح_{٨}$ = ٣٨٤ ∴ أ $ر^{٧}$ = ٣٨٤ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{أ ر^{٧}}{أ ر^{٢}}$ = $\frac{٣٨٤}{١٢}$

∴ $ر^{٥}$ = ٣٢ ∴ $ر^{٥}$ = $٢^{٥}$

∴ ر = ٢ ، وبالتعويض فى (١) : ∴ أ = ٣ ∴ المتتابعة هى (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...)

لاحظ أن :

إذا كان : $ح_{س}$ ، $ح_{ص}$ حدين فى متتابعة هندسية

فإن : $ر^{س - ص}$ = $\frac{ح_{س}}{ح_{ص}}$

تذكر أن :

١ فرق المربعين : ١ − $ر^{٢}$ = (١ − ر) (١ + ر)

٢ فرق المكعبين : ١ − $ر^{٣}$ = (١ − ر) (١ + ر + $ر^{٢}$)

٣ مجموع المكعبين : ١ + $ر^{٣}$ = (١ + ر) (١ − ر + $ر^{٢}$)

٤ ١ + $ر^{٢}$ + $ر^{٤}$ = (١ − ر + $ر^{٢}$) (١ + ر + $ر^{٢}$)

Scanned by CamScanner

مثال ٦

متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثانى ٧٢ ومجموع حديها الثالث والرابع ٨ ، أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $ح_١ + ح_٢ = ٧٢$ ∴ $أ + أر = ٧٢$ ∴ $أ(١ + ر) = ٧٢$ (١)

، $ح_٣ + ح_٤ = ٨$ ∴ $أر^٢ + أر^٣ = ٨$ ∴ $أر^٢(١ + ر) = ٨$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{أر^٢(١ + ر)}{أ(١ + ر)} = \frac{٨}{٧٢}$ ∴ $ر^٢ = \frac{١}{٩}$ ∴ $ر = \pm\frac{١}{٣}$

بالتعويض فى (١) عن $ر = \frac{١}{٣}$: ∴ $أ\left(١ + \frac{١}{٣}\right) = ٧٢$ ∴ $أ = ٥٤$

وبالتعويض فى (١) عن $ر = -\frac{١}{٣}$: ∴ $أ\left(١ - \frac{١}{٣}\right) = ٧٢$ ∴ $أ = ١٠٨$

∴ المتتابعة هى (٥٤ ، ١٨ ، ٦ ، ...) أ، (١٠٨ ، -٣٦ ، ١٢ ، ...)

مثال ٧

متتابعة هندسية حدودها موجبة ، حدها الخامس يزيد عن حدها الرابع بمقدار ٢٧ ، حدها الرابع يزيد عن حدها الثانى بمقدار ٣٠ ، أوجد هذه المتتابعة.

الحل

∵ $ح_٥ - ح_٤ = ٢٧$ ∴ $أر^٤ - أر^٣ = ٢٧$ ∴ $أر^٣(ر - ١) = ٢٧$ (١)

، $ح_٤ - ح_٢ = ٣٠$ ∴ $أر^٣ - أر = ٣٠$ ∴ $أر(ر^٢ - ١) = ٣٠$

∴ $أر(ر - ١)(ر + ١) = ٣٠$ (٢)

وبقسمة (١) على (٢) : ∴ $\frac{أر^٣(ر - ١)}{أر(ر - ١)(ر + ١)} = \frac{٢٧}{٣٠}$ ∴ $\frac{ر^٢}{(ر + ١)} = \frac{٩}{١٠}$

∴ $١٠ر^٢ = ٩ر + ٩$ ∴ $١٠ر^٢ - ٩ر - ٩ = ٠$

∴ $(٢ر - ٣)(٥ر + ٣) = ٠$ ∴ $ر = \frac{٣}{٢}$ أ، $ر = \frac{-٣}{٥}$ (مرفوض)

وبالتعويض فى (١) عن $ر = \frac{٣}{٢}$: ∴ $أ \times \frac{٢٧}{٨}\left(\frac{٣}{٢} - ١\right) = ٢٧$

∴ $أ = ١٦$ ∴ المتتابعة هى : (١٦ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ...)

Scanned by CamScanner

مثال ٨

متتابعة هندسية مجموع حدها الخامس وضعف حدها السادس يساوى عشرة أمثال حدها الرابع ، حدها الثالث = ٤٠ ، أوجد المتتابعة.

الحـــل

$\because$ ح$_{٥}$ + ٢ ح$_{٦}$ = ١٠ ح$_{٤}$ $\therefore$ أ ر^{٤} + ٢ أ ر^{٥} = ١٠ أ ر^{٣} وبقسمة الطرفين على أ ر^{٢}

$\therefore$ ر + ٢ ر^{٢} = ١٠ $\therefore$ ٢ ر^{٢} + ر − ١٠ = ٠

$\therefore$ (٢ ر + ٥) (ر − ٢) = ٠ $\therefore$ ر = $\frac{-٥}{٢}$ أ، ر = ٢

، $\because$ ح$_{٣}$ = ٤٠ $\therefore$ أ ر^{٢} = ٤٠

وبالتعويض عن ر = $\frac{-٥}{٢}$: $\therefore$ أ × $\frac{٢٥}{٤}$ = ٤٠ $\therefore$ أ = $\frac{٣٢}{٥}$

$\therefore$ المتتابعة هى ($\frac{٣٢}{٥}$ ، −١٦ ، ٤٠ ، ...)

، وبالتعويض عن ر = ٢ : $\therefore$ أ × ٤ = ٤٠

$\therefore$ أ = ١٠ $\therefore$ المتتابعة هى (١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ...)

مثال ٩

موظف راتبه الشهرى ١٢٠٠ جنيه ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ٦ ٪ زيادة عن راتب السنة السابقة مباشرة فكم يكون راتبه بالجنيه بعد مرور ٦ سنوات ؟

الحـــل

بعد مرور ١ سنة يكون المرتب = ١٢٠٠ + ١٢٠٠ × ٦ ٪

= ١٢٠٠ (١ + ٠,٠٦) = ١٢٠٠ × (١,٠٦)

بعد مرور ٢ سنة يكون المرتب = ١٢٠٠ × (١,٠٦) + ١٢٠٠ × (١,٠٦) × ٦ ٪

= ١٢٠٠ (١,٠٦) [١ + ٦ ٪]

= ١٢٠٠ (١,٠٦)^{٢}

Scanned by CamScanner

∴ المرتبات بعد الزيادة تكون متتابعة هندسية هى

(١٢٠٠ × (١,٠٦) ، ١٢٠٠ × (١,٠٦)^{٢} ، ...)

أى أ = ١٢٠٠ × ١,٠٦ ، ر = ١ + ٦٪

= ١ + ٠,٠٦ = ١,٠٦

∴ المرتب بعد مرور ٦ سنوات

= $ح_{٦}$ (من المتتابعة السابقة) = أ $ر^{٥}$

= ١٢٠٠ × (١,٠٦) × (١,٠٦)^{٥}

= ١٢٠٠ × (١,٠٦)^{٦} ≃ ١٧٠٢ جنيه

حل آخر : المرتب الأصلى والمرتبات بعد الزيادة تكون متتابعة هندسية هى

(١٢٠٠ ، ١٢٠٠ × ١,٠٦ ،

١٢٠٠ × (١,٠٦)^{٢} ، ...)

أى أ = ١٢٠٠ ، ر = ١,٠٦

ويكون المرتب بعد مرور ٦ سنوات = $ح_{٧}$ (من المتتابعة السابقة)

= أ $ر^{٦}$

= ١٢٠٠ × (١,٠٦)^{٦} ≃ ١٧٠٢ جنيه.

ملاحظتان

١ المتتابعة الهندسية فى الحل الأول هى متتابعة المرتبات بعد الزيادة فيكون المرتب بعد مرور ن سنة هو $ح_{ن}$ = أ $ر^{ن-١}$ حيث أ هو المرتب بعد أول زيادة.

٢ المتتابعة الهندسية فى الحل الثانى هى متتابعة تشمل المرتب الأصلى والمرتبات بعد الزيادة فيكون المرتب بعد مرور ن سنة هو $ح_{ن+١}$ = أ $ر^{ن}$ حيث أ هو المرتب قبل أى زيادة.

الأوساط الهندسية

تعريف

إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فإن ب هى الوسط الهندسى بين أ ، حـ ويكون : $\frac{ب}{أ} = \frac{حـ}{ب}$ ومنها $ب^{٢}$ = أ حـ

∴ ب = ± $\sqrt{أ حـ}$

أى أن الوسط الهندسى لكميتين لهما نفس الإشارة (موجبتين معًا أو سالبتين معًا) هو الجذر التربيعى لحاصل ضربهما.

Scanned by CamScanner

فمثلًا :

- الوسط الهندسى للكميتين ٢ ، ٣٢ = $\pm\sqrt{٢ \times ٣٢} = \pm\sqrt{٦٤} = \pm ٨$
- الوسط الهندسى للكميتين $أ^٣ب$ ، $أب^٣ = \pm\sqrt{أ^٣ب \times أب^٣} = \pm\sqrt{أ^٤ب^٤} = \pm أ^٢ب^٢$
- لا يوجد وسط هندسى للعددين −٤ ، ٩ لأنهما مختلفان فى الإشارة.

ملاحظة

(الوسط الهندسى لعدة كميات)

يعرف الوسط الهندسى لعدة كميات موجبة عددها (ن) بأنه الجذر النونى الموجب لحاصل ضرب هذه الكميات جميعًا.

فمثلًا : الوسط الهندسى للكميات الموجبة أ ، ب ، حـ = $\sqrt[٣]{أ ب حـ}$

والوسط الهندسى للأعداد الستة ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٩ ، ٣٦ ، ٣ = $\sqrt[٦]{٢ \times ٤ \times ٦ \times ٩ \times ٣٦ \times ٣}$

$= \sqrt[٦]{٤٦٦٥٦} = ٦$

مثال ١٠

عددان موجبان وسطهما الحسابى = ٥٠ ، وسطهما الهندسى = ٤٠ ، أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العددين هما : س ، ص

∵ الوسط الحسابى = ٥٠ ∴ $\frac{س + ص}{٢}$ = ٥٠ ∴ س + ص = ١٠٠

∴ ص = ١٠٠ − س (١)

، ∵ الوسط الهندسى = ٤٠ ∴ $\sqrt{س ص}$ = ٤٠

∴ س ص = ١٦٠٠ (٢)

وبالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ س (١٠٠ − س) = ١٦٠٠ ∴ $س^٢$ − ١٠٠ س + ١٦٠٠ = ٠

∴ (س − ٢٠) (س − ٨٠) = ٠

∴ س = ٢٠ أ، س = ٨٠ ∴ ص = ٨٠ أ، ص = ٢٠ ∴ العددان هما : ٢٠ ، ٨٠

Scanned by CamScanner

مثال ١١

إذا علم أن : أ − ٢ ، أ − ١ ، ٣أ − ٥ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فما قيمة أ ؟

الحل

∵ أ − ٢ ، أ − ١ ، ٣أ − ٥ حدود متتالية فى متتابعة هندسية.

∴ أ − ١ وسط هندسى بين أ − ٢ ، ٣أ − ٥ ∴ $(أ − ١)^٢ = (أ − ٢)(٣أ − ٥)$

∴ $أ^٢ − ٢أ + ١ = ٣أ^٢ − ١١أ + ١٠$ ∴ $٢أ^٢ − ٩أ + ٩ = ٠$

∴ $(٢أ − ٣)(أ − ٣) = ٠$ ∴ أ = ٣ أ، أ = $\frac{٣}{٢}$

العلاقة بين الوسط الحسابى والوسط الهندسى لعددين

الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.

الإثبات : نفرض أن العددين هما أ ، ب وأن ع وسطهما الحسابى ، هـ وسطهما الهندسى الموجب

∴ ع = $\frac{أ + ب}{٢}$ ، هـ = $\sqrt{أب}$

∴ ع − هـ = $\frac{أ + ب}{٢} - \sqrt{أب} = \frac{أ + ب - ٢\sqrt{أب}}{٢} = \frac{أ - ٢\sqrt{أب} + ب}{٢}$

$= \frac{(\sqrt{أ} - \sqrt{ب})^٢}{٢} > ٠$ (موجب)

∴ ع > هـ وحيث إن الوسط الهندسى الموجب أكبر من الوسط الهندسى السالب.

∴ الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى. (وهو المطلوب)

ملاحظة

بفرض أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية موجبة :

١ إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية فى متتابعة حسابية فإن الوسط الحسابى بين أ ، حـ هو ب ، والوسط الهندسى بين أ ، حـ هو $\sqrt{أحـ}$ وحسب النظرية السابقة يكون ب > $\sqrt{أحـ}$

٢ إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاثة حدود متتالية فى متتابعة هندسية فإن الوسط الحسابى بين أ ، حـ هو $\frac{أ + حـ}{٢}$ ، والوسط الهندسى بين أ ، حـ هو ب وحسب النظرية السابقة يكون $\frac{أ + حـ}{٢}$ > ب

٣ لأى عددين حقيقيين موجبين متساويين يكون الوسط الحسابى للعددين مساويًا لوسطهما الهندسى.

أى أنه : إذا كان : أ = ب فإن : $\frac{أ + ب}{٢} = \sqrt{أب}$

Scanned by CamScanner

مثال ١٢

إذا كانت أ ، ب ، حـ ، ء أربع كميات موجبة متتالية من متتابعة هندسية فأثبت أن :

١ أ + ء > ب + حـ

٢ أب + أء + ءحـ > ٣ب حـ

الحل

ب وسط هندسى بين أ ، حـ والوسط الحسابى بين أ ، حـ هو $\frac{أ + حـ}{٢}$

∴ $\frac{أ + حـ}{٢}$ > ب

∴ أ + حـ > ٢ب (١)

، حـ وسط هندسى بين ب ، ء والوسط الحسابى بين ب ، ء هو $\frac{ب + ء}{٢}$

∴ $\frac{ب + ء}{٢}$ > حـ

∴ ب + ء > ٢حـ (٢)

وبجمع (١) ، (٢) ∴ أ + حـ + ب + ء > ٢ب + ٢حـ ∴ أ + ء > ب + حـ (المطلوب أولًا)

وبضرب (١) فى (٢) ∴ (أ + حـ) (ب + ء) > ٢ب × ٢حـ

∴ أب + أء + ب حـ + ء حـ > ٤ب حـ

∴ أب + أء + ء حـ > ٣ب حـ

(المطلوب ثانيًا)

إدخال عدد محدود من الأوساط الهندسية بين كميتين معلومتين

إذا كانت أ ، ب كميتين معلومتين وأدخلنا بينهما ن وسطًا هندسيًا فإننا نحصل على متتابعة هندسية حدها الأول أ وعدد حدودها ن + ٢ وحدها الأخير ب

مثال ١٣

أدخل ٣ أوساط هندسية بين ٢ ، ٣٢

الحل

∵ عدد الأوساط = ٣ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٣ + ٢ = ٥ حدود

∴ أ = ٢ ، $ح_٥$ = ٣٢ ∵ $ح_٥$ = أ $ر^٤$ ∴ ٣٢ = ٢ $ر^٤$

∴ $ر^٤$ = ١٦ ∴ ر = ± ٢

• عندما ر = ٢ ∴ الأوساط هى : ٤ ، ٨ ، ١٦

• عندما ر = −٢ ∴ الأوساط هى : −٤ ، ٨ ، −١٦

لاحظ أن :

عند إدخال ن وسط هندسى بين العددين أ ، ب

فإن : ر = $\sqrt[ن+١]{\frac{ب}{أ}}$

Scanned by CamScanner

مثال ١٤

إذا أدخلت أربعة أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والرابع يساوى ٩٠ ومجموع الوسطين الثانى والثالث يساوى ٦٠ فما هما العددان ؟

الحـــل

∵ عدد الأوساط = ٤ ∴ عدد حدود المتتابعة = ٤ + ٢ = ٦ حدود.

وبفرض أن العدد الأول = أ ∴ الوسطين الأول والرابع هما $ح_٢$ ، $ح_٥$

∴ $ح_٢ + ح_٥$ = ٩٠ ∴ أ ر + أ $ر^٤$ = ٩٠

∴ أ ر (١ + $ر^٣$) = ٩٠ (١)

، ∵ الوسطين الثانى والثالث هما $ح_٣$ ، $ح_٤$ ∴ أ $ر^٢$ + أ $ر^٣$ = ٦٠

∴ أ $ر^٢$ (١ + ر) = ٦٠ (٢)

بقسمة (١) على (٢) : ∴ $\frac{(١ + ر)(١ - ر + ر^٢)}{ر(١ + ر)} = \frac{٣}{٢}$ ∴ ٢ $ر^٢$ − ٢ ر + ٢ = ٣ ر

∴ ٢ $ر^٢$ − ٥ ر + ٢ = ٠ ∴ (ر − ٢) (٢ ر − ١) = ٠

∴ ر = ٢ أ، ر = $\frac{١}{٢}$

- وبالتعويض فى (٢) عن ر = ٢ : ∴ أ = ٥ والعددان هما أ ، أ $ر^٥$ أى ٥ ، ١٦٠
- وبالتعويض فى (٢) عن ر = $\frac{١}{٢}$: ∴ $\frac{٣}{٨}$ أ = ٦٠

∴ أ = ١٦٠ والعددان هما أ ، أ $ر^٥$ أى ١٦٠ ، ٥

مثال ١٥

ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى مجموعها ١٥ وإذا طرح من أولها واحد ومن ثانيها واحد وأضيف لثالثها واحد كونت ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية ، أوجد الأعداد الثلاثة.

الحـــل

نفرض أن الأعداد الثلاثة هى أ − ء ، أ ، أ + ء

، ∵ مجموعها = ١٥ ∴ (أ − ء) + أ + (أ + ء) = ١٥

∴ ٣ أ = ١٥ ∴ أ = ٥

Scanned by CamScanner

∴ الأعداد الثلاثة هى : (٥ − ء) ، ٥ ، (٥ + ء) (١)

∴ الأعداد ٥ − ء − ١ ، ٥ − ١ ، ٥ + ء + ١ فى تتابع هندسى

أى ٤ − ء ، ٤ ، ٦ + ء فى تتابع هندسى ∴ ٤ وسط هندسى بين ٤ − ء ، ٦ + ء

∴ (٤)^{٢} = (٤ − ء) (٦ + ء) ∴ ١٦ = ٢٤ − ٢ء − ء^{٢}

∴ ء^{٢} + ٢ء − ٨ = ٠ ∴ (ء + ٤) (ء − ٢) = ٠

∴ ء = ٢ أ، ء = −٤

• وبالتعويض فى (١) عن ء = ٢ ∴ الأعداد الثلاثة هى : ٣ ، ٥ ، ٧

• وبالتعويض فى (١) عن ء = −٤ ∴ الأعداد الثلاثة هى : ٩ ، ٥ ، ١

مثال ١٦

ثلاثة أعداد فى تتابع هندسى مجموعها ٢١ وإذا أضيف لثانيها $١\frac{١}{٢}$ كانت النواتج فى تتابع حسابى. أوجد الأعداد الثلاثة الأصلية.

الحل

نفرض أن الأعداد الثلاثة هى : أ ، أر ، أر^{٢}

∵ مجموعها = ٢١ ∴ أ + أر + أر^{٢} = ٢١ ∴ أ (١ + ر + ر^{٢}) = ٢١ (١)

، أ ، أر + $\frac{٣}{٢}$ ، أر^{٢} فى تتابع حسابى.

∴ أر + $\frac{٣}{٢}$ وسط حسابى بين أ ، أر^{٢} ∴ (أر + $\frac{٣}{٢}$) × ٢ = أ + أر^{٢}

∴ ٢أر + ٣ = أ + أر^{٢} ∴ أر^{٢} − ٢أر + أ = ٣

∴ أ (ر^{٢} − ٢ر + ١) = ٣ (٢)

بقسمة (١) على (٢) ∴ $\frac{١ + ر + ر^{٢}}{ر^{٢} - ٢ر + ١}$ = ٧ ∴ ٧ر^{٢} − ١٤ر + ٧ = ١ + ر + ر^{٢}

∴ ٦ر^{٢} − ١٥ر + ٦ = ٠ ∴ ٢ر^{٢} − ٥ر + ٢ = ٠

∴ (ر − ٢) (٢ر − ١) = ٠ ∴ ر = ٢ أ، $\frac{١}{٢}$

• بالتعويض فى (١) عن ر = ٢ ∴ ٧أ = ٢١ أى أ = ٣

وتكون الأعداد هى : ٣ ، ٦ ، ١٢

• وبالتعويض فى (١) عن ر = $\frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{٧}{٤}$ أ = ٢١ أى أ = ١٢

وتكون الأعداد هى : ١٢ ، ٦ ، ٣

Scanned by CamScanner

ملاحظة

* إذا كان : (أ ، ب ، حـ ، ....) متتابعة هندسية أساسها (ر) ، (س ، ص ، ع ، ....) متتابعة هندسية أساسها (م) فإن :

١ (أس ، ب ص ، حـ ع ، ....) تكون متتابعة هندسية أساسها (ر م)

٢ (أ ك ، ب ك ، حـ ك ، ...) تكون متتابعة هندسية أساسها (ر) حيث ك ≠ ٠

٣ ($\frac{أ}{ك}$ ، $\frac{ب}{ك}$ ، $\frac{حـ}{ك}$ ، ....) تكون متتابعة هندسية أساسها (ر) حيث ك ≠ ٠

٤ (أ^{ك} ، ب^{ك} ، حـ^{ك} ، ....) تكون متتابعة هندسية أساسها (ر^{ك})

* إذا كان : ($ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، .... ، $ح_{ن-١}$ ، $ح_ن$) متتابعة هندسية فإن :

$ح_١ ح_ن = ح_٢ ح_{ن-١} = ح_٣ ح_{ن-٢}$ = ... وهكذا ....

Scanned by CamScanner

اختبر نفسك

تمارين 5

على المتتابعة الهندسية

من أسئلة الكتاب المدرس

أولًا تمارين على تعريف المتتابعة الهندسية وحدها العام وتعيين المتتابعة الهندسية

١ بين أى المتتابعات الآتية هندسية مع ذكر أساس المتتابعة الهندسية :

① $\left(١٥ ، ٥ ، \frac{٥}{٣} ، .....\right)$

② $(٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ٣)$

③ $\left(\frac{١}{٢٤٣} ، -\frac{١}{٨١} ، \frac{١}{٢٧} ، -\frac{١}{٩} ، \frac{١}{٣}\right)$

④ $(١٦ ، ٨\sqrt{٢} ، ٨ ، .....)$

---

٢ بين أى المتتابعات الآتية هندسية واذكر أساسها واكتب الحدود الثلاثة الأولى من كل متتابعة هندسية :

① $(ح_ن) = (٥ \times ٢^ن)$

② $(ح_ن) = (٤ ن^٢)$

③ $(ح_ن) = (٥ ن + ٢)$

④ $(ح_ن) = \left(\frac{٣}{٤} (-٣)^{ن+١}\right)$

⑤ $(ح_ن)$ حيث $ح_١ = ١٢$ ، $ح_ن = \frac{١}{٤} \times ح_{ن-١}$ ، $ن > ١$

---

٣ أثبت أن المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ \times ٣^{ن-٥}$ متتابعة هندسية وأوجد حدها السابع. «١٨»

---

٤ بيِّن أن المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = \frac{٣}{٨} (٢)^ن$ هى متتابعة هندسية ثم أوجد حدها الثامن ، رتبة الحد الذى قيمته ٧٦٨ «٩٦ ، ١١»

---

٥ فى المتتابعة الهندسية $\left(\frac{١}{٨} ، \frac{١}{٤} ، \frac{١}{٢} ، ١ ، .....\right)$ أوجد :

① حدها العاشر.

② رتبة الحد الذى قيمته = ١٠٢٤ «٦٤ ، ١٤»

Scanned by CamScanner

٦ أوجد الحدود الأربعة التالية فى كل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين ثم مثل الحدود السبعة الأولى بيانيًا :

① (٨ ، ٤ ، ٢ ، .....) ② $\left(\frac{١}{٢٧} ، \frac{١}{٩} ، \frac{١}{٣} ، .....\right)$

---

٧ ما رتبة وقيمة أول حد تزيد قيمته عن ٢٠٠ فى المتتابعة الهندسية :

(٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، .....) ؟ «٧ ، ٣٨٤»

---

٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الحد الخامس من المتتابعة $(ح_ن)$ حيث $ح_ن = ٢ \times (٣)^{ن-١}$ يساوى .....

(أ) ٨١ (ب) ١٦٢ (جـ) ٣٢٤ (د) ٢٤٣

② عدد حدود المتتابعة الهندسية $\left(٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ..... ، \frac{١}{٩}\right)$ يساوى .....

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٩

③ جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة .....

(أ) (٣ ، −٦ ، ١٢ ، −٢٤ ، .....) (ب) (لو أ ، لو $أ^٢$ ، لو $أ^٣$ ، لو $أ^٤$ ، .....)

(جـ) $\left(\frac{٣}{٢} ، ١ ، \frac{٢}{٣} ، \frac{٤}{٩}\right)$ (د) $\left(\frac{٣ب}{أ^٢} ، ٣ ، \frac{٦أ}{ب} ، \frac{١٢أ^٢}{ب^٢}\right)$

④ المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هى .....

(أ) $(ح_ن) = (٤ ن^٣)$ لكل $ن \geq ١$ (ب) $(ح_ن) = \left(\frac{١}{٤} \times ح_{ن-١}\right)$ لكل $ن \geq ٢$

(جـ) $(ح_ن) = (٢^ن - ١)$ لكل $ن \geq ١$ (د) $(ح_ن) = (لو (٣ \times ٢^ن))$ لكل $ن \geq ١$

⑤ الحد النونى للمتتابعة الهندسية $\left(\frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٤} ، \frac{-١}{٨} ، .....\right)$ يساوى .....

(أ) $\left(\frac{-١}{٢}\right)^{ن-١}$ (ب) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ن-١}$ (جـ) $\left(\frac{١}{٢}\right)^ن$ (د) $\left(-\frac{١}{٢}\right)^ن$

⑥ الحد التالى فى المتتابعة الهندسية $\left(٨ ، ٦ ، \frac{٩}{٢} ، \frac{٢٧}{٨} ، .....\right)$ هو .....

(أ) $\frac{١١}{٨}$ (ب) $\frac{٢٧}{١٦}$ (جـ) $\frac{٩}{٤}$ (د) $\frac{٨١}{٣٢}$

⑦ إذا كانت : س > ٠ فإن أساس المتتابعة الهندسية

(٤ ، س − ٣ ، ٢ س + ٦ ، .....) هو .....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ٢٤

Scanned by CamScanner

(٨) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = أ وأساسها = ر تكون تزايدية إذا كان .....

(أ) أ > ٠ ، -١ < ر < ٠ (ب) أ > ٠ ، ٠ < ر < ١

(جـ) أ < ٠ ، -١ < ر < ٠ (د) أ < ٠ ، ٠ < ر < ١

(٩) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = أ وأساسها = ر تكون تناقصية إذا كان .....

(أ) أ > ٠ ، -١ < ر < ٠ (ب) أ > ٠ ، ٠ < ر < ١

(جـ) أ < ٠ ، -١ < ر < ٠ (د) أ < ٠ ، ٠ < ر < ١

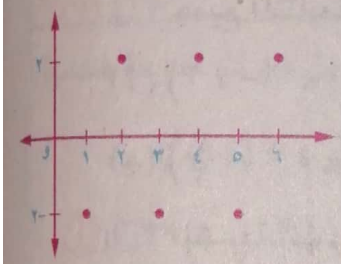
(١٠) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = أ وأساسها = ر تكون غير متناوبة الإشارة إذا كان .....

(أ) أ > ٠ ، ر < -١ (ب) أ > ٠ ، -١ < ر < ٠

(جـ) أ > ٠ ، ٠ < ر < ١ (د) أ < ٠ ، -١ < ر < ٠

(١١) الشكل المقابل يمثل متتابعة هندسية

حدها العام $ح_ن$ = ...



(أ) ٢ × $(-١)^{ن}$ (ب) $(٢)^{ن}$

(جـ) ٢ × $(-١)^{ن+١}$ (د) $(-٢)^{ن}$

(١٢) إذا كان : أ ، ب ، حـ فى تتابع هندسى وأساس المتتابعة = ر فإن جميع العبارات الآتية صحيحة ما عدا .....

(أ) ر = $\frac{ب}{أ}$ (ب) ر = $\frac{حـ}{ب}$ (جـ) ر = $\frac{ب^{٢}}{أ حـ}$ (د) ر = $\frac{ب + حـ}{أ + ب}$

---

٩ في كل مما يأتى أوجد :

(١) متتابعة هندسية حدها الأول ٢ ، وحدها السادس ٦٤ «(٢ ، ٤ ، ٨ ، .....)»

(٢) متتابعة هندسية أساسها = $\frac{١}{٢}$ وحدها الثالث = ٢٤ «(٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، ...)»

(٣) متتابعة هندسية مجموع الحدين الأول والثانى منها ٣ ومجموع الحدين الأول والرابع ٦٣

«($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٢٥}{٢}$ ، ...) أ ، (-١ ، ٤ ، -١٦ ، ...)»

Scanned by CamScanner

(٤) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة ، $ح_٥ - ح_٤ = ٣٦$ ، $ح_٤ - ح_٢ = ٤٠$

«(..... ، ٤٨ ، ٣٢ ، $\frac{٦٤}{٣}$)»

(٥) متتابعة هندسية حدها الثانى = ٨ ومجموع حديها الأول والثالث يساوى ٢٠

«(..... ، ١٦ ، ٨ ، ٤) أ، (..... ، ١٦ ، ٨ ، ٤)»

(٦) متتابعة هندسية حدودها موجبة ، $ح_٣ + ح_٤ = ٦ ح_٢$ ، $ح_٧ = ٣٢٠$

«(..... ، ٢٠ ، ١٠ ، ٥)»

(٧) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة ، وحدها الأول يساوى أربعة أمثال حدها الثالث ، مجموع حديها الثانى والخامس = ٣٦ «(..... ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤)»

(٨) متتابعة هندسية حدها الثالث يساوى المعكوس الضربى لحدها الأول وحدها الخامس يساوى $\frac{١}{١٢٥}$ أثبت أن هناك حلين. «(..... ، $\frac{١}{٥}$ ، ١ ، ٥) أ، (..... ، $\frac{١}{٥}$ ، -١ ، ٥)»

(٩) متتابعة هندسية مجموع الحدود الثلاثة الأولى فيها ٢٦ ، ومجموع الحدود الثلاثة التالية لها ٧٠٢ «(..... ، ١٨ ، ٦ ، ٢)»

(١٠) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها : $ح_١ + ح_٣ = ٢٠$ ، $ح_٣ + ح_٥ = ٥ ح_٢^٢$

«(..... ، ١٨ ، ٦ ، ٢)»

(١١) متتابعة هندسية تزايدية فيها الحد الثالث يزيد عن مجموع الحدين الأولين بمقدار ١٠ والحد الثانى ينقص عن مجموع الحدين الأول والثالث بمقدار ١٤ «(..... ، ١٨ ، ٦ ، ٢)»

(١٢) متتابعة هندسية ثلاثة أمثال مجموع حديها الأول والثالث يساوى مجموع حديها الثانى والرابع ، وحدها الخامس يزيد عن ضعف مجموع حدودها الأربعة الأولى بمقدار ٢

«(..... ، ١٨ ، ٦ ، ٢)»

(١٣) متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع الحدود الخمسة الأولى منها يساوى ٢٤٢ وحدها الرابع يساوى حدها الثالث مضافًا إليه ستة أمثال حدها الثانى. «(..... ، ١٨ ، ٦ ، ٢)»

(١٤) متتابعة هندسية فيها : $ح_٢ + ح_٤ = ٥$ ، $ح_١^٢ + ح_٢^٢ = ٨٠$

«(... ، ٢ ، ٤ ، ٨) أ، (... ، -٢ ، ٤ ، -٨)»

(١٥) المتتابعة الهندسية التى حدها الثالث يزيد عن الحد الثانى بمقدار ٣ ومجموع مربعى الحدين الثانى والثالث = ٤٥ وحدها الأول موجب. «(..... ، ٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$)»

Scanned by CamScanner

(١٦) متتابعة هندسية مجموع حديها الثانى والثالث يساوى ١٢ ، حاصل ضرب حديها الأول والرابع يساوى ٢٧ «(١ ، ٣ ، ٩ ، .....) أ، (٢٧ ، ٩ ، ٣ ، .....)»

١٠ ثلاثة أعداد من متتابعة هندسية مجموعها ٢١ وحاصل ضربها ٦٤ فما هى الأعداد الثلاثة ؟ «١ ، ٤ ، ١٦»

١١ مجموع ثلاثة أعداد متتالية موجبة من متتابعة هندسية يساوى ١٤ وحاصل ضرب مربعات هذه الأعداد يساوى ٤٠٩٦ فما هى تلك الأعداد ؟ «٨ ، ٤ ، ٢»

١٢ ثلاثة أعداد موجبة تكون متتابعة هندسية مجموعها ٢٨ ومجموع مقلوباتها $\frac{٧}{١٦}$ أوجد هذه الأعداد. «١٦ ، ٨ ، ٤»

١٣ مجموع الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية = ٧ ومجموع مربعاتها = ٢١ أوجد هذه الأعداد. «٤ ، ٢ ، ١»

١٤ متتابعة هندسية أساسها ٥ ، $ح_{ن+٢} = ١٢٥$ ، $ح_{٢ن-٦} = ٢٥$ أوجد المتتابعة. «($٥^{-٥}$ ، $٥^{-٤}$ ، $٥^{-٣}$ ، .....)»

١٥ متتابعة هندسية فيها $ح_{ن} = ١$ ، $ح_{ن+١} = \frac{١}{٢}$ ، $ح_{٢ن-١} = \frac{١}{٣٢}$ فأوجد قيمة ن ثم أوجد المتتابعة. «٦ ، (٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، .....)»

١٦ اكتشف الخطأ :

(١) تمثل حدود المتتابعة الهندسية بمجموعة من النقاط المنفصلة التى تقع على استقامة واحدة.

(٢) تسمى المتتابعة ($ح_{ن}$) هندسية إذا كان $\frac{ح_{ن}}{ح_{ن+١}}$ يساوى مقدارًا ثابتًا يعرف بأساس المتتابعة (لكل ن ≥ ١)

(٣) تكون المتتابعة الهندسية تناقصية إذا كان أساسها ر ∈]-١ ، ٠[

١٧ تطبيقات على المتتابعة الهندسية :

(١) سيارة ثمنها ١٥٠ ألف جنيه فإذا كان ثمن السيارة يتناقص سنويًا بنسبة ١٠٪ فكم يكون ثمن السيارة بعد ٤ سنوات ؟ «٩٨٤١٥ جنيه»

(٢) موظف راتبه الشهرى ١٢٠٠ جنيه ويحصل على علاوة سنوية ثابتة بنسبة ١٠٪ زيادة عن راتبه فى السنة السابقة مباشرة. فكم يكون راتبه بالجنيه بعد مرور ٤ سنوات ؟ «١٧٥٦,٩٢ جنيه»

Scanned by CamScanner

③ يصب الماء فى خزان بمعدل ضعف اليوم السابق له مباشرة ، فإذا صب فى اليوم الأول ١٢ لترًا فبعد كم يومًا يصب فيه ١٥٣٦ لترًا ؟ «٨ أيام»

④ يزداد عدد السكان فى إحدى المدن بمعدل ثابت ٢٪ كل سنة. كم يكون عدد سكان هذه المدينة بعد ٤ سنوات إذا علم أن عدد السكان الحالى هو ٥٠٠٠٠٠ نسمة ؟ «٥٤١٢١٦ نسمة»

⑤ إذا كان عدد الطلاب المقبولين بالمرحلة الثانوية فى إحدى الإدارات التعليمية يزداد بمعدل ٤٪ سنويًا ، وكان عدد الطلاب حاليا ٢٤٠٠ طالب.
فكم من المتوقع أن يكون عددهم بعد ٦ سنوات ؟ «٣٠٣٧ طالبًا»

⑥ تسقط كرة من المطاط من ارتفاع ٢٤٠ مترًا فوق سطح الأرض ، فإذا كانت الكرة ترتد إلى ارتفاع قدره $\frac{٣}{٤}$ ارتفاعها السابق مباشرة ، فكم يكون ارتفاعها بعد الاصطدام السابع ؟ «٣٢ مترًا»

ثانيًا تمارين على الأوساط الهندسية

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① الوسط الهندسى للعددين ٤ ، ١٦ هو .....
(أ) ١٠ (ب) ٦٤ (جـ) ٨ (د) ± ٨

② إذا كان الوسط الهندسى للعددين ٩ ، ص هو ١٥ فإن : ص = ...
(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٢٥ (د) ٩

③ الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين ..... وسطهما الهندسى.
(أ) = (ب) > (جـ) < (د) ≥

④ الوسط الهندسى للكميتين : $أ^{٤}$ ، $ب^{١٦}$ هو .....
(أ) $أ^{٤} ب^{١٦}$ (ب) $أ^{٢} ب^{٨}$ (جـ) $أ^{٢} ب^{٤}$ (د) $أ ب^{٤}$

⑤ إذا كانت قيمتا الحدين الأوسطين فى متتابعة هندسية هما : ٩ ، ٢٧ على الترتيب فإن أساسها = ...
(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٨١ (جـ) ٢٤٣ (د) ٣

⑥ الوسط الهندسى للأعداد : ٢ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢٥ يساوى .....
(أ) $٥\sqrt{١٠}$ (ب) ٣٠ (جـ) ٨ (د) ١٠

⑦ إذا كانت (س ، ص ، ع ، ...) فى تتابع هندسى فإن : .....
(أ) ٢ ص < س + ع (ب) $ص^{٢}$ > س ع
(جـ) ص = س ع (د) $\sqrt{ص}$ = س ع

Scanned by CamScanner

(٨) فى أى متتابعة هندسية يكون $ح_{١} \times ح_{٧} = ...$

(أ) $(ح_{١})^{٢}$ (ب) $(ح_{٤})^{٢}$ (جـ) $(ح_{٧})^{٢}$ (د) $(ح_{٨})^{٢}$

(٩) إذا كان الوسط الحسابى بين أ ، ب يساوى ٩ ، والوسط الحسابى بين $\frac{١}{أ}$ ، $\frac{١}{ب}$ يساوى $\frac{١}{٤}$ فإن الوسط الهندسى الموجب بين أ ، ب يساوى .....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٦,٥

(١٠) إذا كانت : س - ١ ، س + ٢ ، ٣ س فى تتابع هندسى فإن : س = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ أ، -٤ (ب) $-\frac{١}{٢}$ أ، ٤ (جـ) $\frac{١}{٢}$ أ، ٤ (د) $-\frac{١}{٢}$ أ، -٤

(١١) إذا كانت (٥٤ ، س ، ص ، ٢) متتابعة هندسية فإن : $\frac{ص}{س}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٢٧

---

٢ $(ح_{ن})$ متتابعة هندسية حيث $ح_{ن} = ٧ \times (٣)^{ن-١}$

أوجد الوسط الهندسى بين $ح_{٣}$ ، $ح_{٧}$ «±٥٦٧»

---

٣ عددان موجبان الفرق بينهما ٦٠ ، وسطهما الهندسى ١٦ فما العددان ؟ «٦٤ ، ٤»

---

٤ أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابى ٥ ووسطهما الهندسى ٣ «٩ ، ١»

---

٥ أوجد عددين موجبين وسطهما الهندسى الموجب يزيد عن أحدهما بمقدار ٢ ويقل عن الآخر بمقدار ٣ «٤ ، ٩»

---

٦ الوسط الحسابى لعددين يساوى $\frac{٥}{٣}$ وسطهما الهندسى وأصغر العددين يساوى ٩ أوجد العدد الآخر. «٨١»

---

٧ عددان وسطهما الهندسى يزيد ٦ عن أصغر العددين ووسطهما الحسابى ينقص ٩ عن أكبر العددين أوجد العددين. «٦ ، ٢٤»

---

٨ أدخل ستة أوساط هندسية بين $\frac{١}{٤}$ ، ٣٢

Scanned by CamScanner

٩ أوجد الأوساط الهندسية فى المتتابعة :

(٤ ، ..... ، ..... ، ..... ، ..... ، ٢٩١٦)

---

١٠ إذا كان الوسط الهندسى بين : س + ٢ ، ص − ٦ هو ٥ والوسط الحسابى بين س ، ص هو ٧ **فأوجد قيمة كل من :** س ، ص «٣ ، ١١»

---

١١ إذا كانت : $\frac{١}{٢}$ أ ، ب ، حـ كميات موجبة فى تتابع هندسى

فأثبت أن : ٤ ب < أ + ٢ حـ

---

١٢ إذا كانت : س ، ص ، ع ، ل كميات موجبة فى تتابع هندسى.

فأثبت أن : س + ل > ص + ع

---

١٣ أدخلت عدة أوساط هندسية موجبة بين العددين ٢ ، ٤٨٦ فإذا كان مجموع الوسطين الأخيرين يساوى تسعة أمثال مجموع الوسطين الأولين فأوجد عدد هذه الأوساط. «٤»

---

١٤ إذا أدخلنا عدة أوساط هندسية بين ٣ ، ٣٨٤ كان حاصل ضرب الوسطين الثانى والأخير يساوى ٢٣٠٤ أوجد عدد الأوساط. «٦»

---

١٥ إذا كان : (١ ، س ، ص) فى تتابع حسابى ، (١ ، ص ، س) فى تتابع هندسى

فاحسب قيمة كل من : س ، ص حيث : س ≠ ص ≠ ١ «$\frac{١}{٤}$ ، $-\frac{١}{٢}$»

---

١٦ إذا كانت : ٤ ، ب ، حـ فى تتابع حسابى ، وكانت ٢ ، ب + ٣ ، ٥ حـ فى تتابع هندسى

فأوجد قيمة كل من : ب ، حـ «٧ ، ١٠»

---

١٧ ثلاثة أعداد فى تتابع حسابى مجموعها ١٥ وإذا طرح من أولها واحد ومن ثانيها واحد وأضيف لثالثها واحد كونت ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية أوجد الأعداد الثلاثة.

«٩ ، ٥ ، ١ أ ، ٣ ، ٥ ، ٧»

---

١٨ مجموع ثلاثة أعداد فى تتابع هندسى يساوى ٧٠ وإذا ضرب الأول فى ٤ والثانى فى ٥ والثالث فى ٤ كونت النواتج حدود متتابعة حسابية فما هى الأعداد الثلاثة ؟ «٤٠ ، ٢٠ ، ١٠»

---

١٩ ثلاثة أعداد فى تتابع هندسى حاصل ضربهم = ٨ وإذا طرح ١ من العدد الأكبر أصبحت فى تتابع حسابى. أوجد الأعداد. «١ ، ٢ ، ٤»

Scanned by CamScanner

٢٠ إذا كانت : أ ، ٢ب ، ٣حـ ، ٤ء كميات موجبة فى تتابع هندسى.

فأثبت أن : (أ + ٣حـ) (ب + ٢ء) > ١٢ب حـ

٢١ إذا كانت : (أب ، ب حـ ، حـ ء ، ء هـ) كميات موجبة فى تتابع حسابى.

فأثبت أن : $حـ^{٢}$ > أ هـ

٢٢ إذا كانت : (لو أ ، لو ب ، لو حـ) فى تتابع حسابى.

فأثبت أن : أ ، ب ، حـ فى تتابع هندسى.

٢٣ إذا كانت : أ ، ٣ب ، ٢حـ ، ٦ء أعدادًا حقيقية موجبة تكون متتابعة حسابية.

أثبت أن : (١) ب حـ > أ ء (٢) $٩ب^{٢} + ٤حـ^{٢}$ > ٢ أ حـ + ١٨ ب ء

٢٤ اكتشف الخطأ :

(١) تعرف الأوساط الهندسية بأنها الحدود الواقعة بين حدين غير متتاليين من متتابعة هندسية ويمكن إيجادها متى علم قيمة هذين الحدين.

(٢) الوسط الحسابى لعددين حقيقيين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى.

٢٥ تفكير إبداعى :

(١) إذا كان : أ + ب + حـ = ١ حيث أ ، ب ، حـ كميات موجبة ومختلفة.

أثبت أن : (١ − أ) (١ − ب) (١ − حـ) > ٨ أ ب حـ

(٢) إذا كانت : س ∈ $ح^{+}$ ، س ≠ ١ أثبت أن : س + $\frac{١}{س}$ > ٢

(٣) إذا كان : أ ب حـ ء = ١ حيث أ ، ب ، حـ ، ء كميات موجبة ومختلفة

أثبت أن : (أ + ١) (ب + ١) (حـ + ١) (ء + ١) > ١٦

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت ($ح_{ن}$) ، ($حَ_{ن}$) متتابعتان هندسيتان فأى مما يأتى يمثل متتابعة هندسية ؟

(أ) $(ح_{ن})^{ك}$ (ب) $(ك حَ_{ن})$ (جـ) $(ح_{ن} حَ_{ن})$ (د) كل ما سبق.

Scanned by CamScanner

(٢) إذا كان أ ، ب وسطين حسابيين بين س ، ص وكان ل ، م وسطين هندسيين بين س ، ص فإن : $\frac{أ + ب}{ل م}$ = ...

(أ) $\frac{س + ص}{٢ س ص}$ (ب) $\frac{٢ س ص}{س + ص}$ (جـ) $\frac{س + ص}{س ص}$ (د) $\frac{س ص}{س + ص}$

(٣) إذا كانت : (أ ، ب ، حـ) متتابعة حسابية أساسها (م)

فإن : ($٣^{أ}$ ، $٣^{ب}$ ، $٣^{حـ}$) تكون .....

(أ) متتابعة حسابية أساسها = ٣ (ب) متتابعة هندسية أساسها = ٣

(جـ) متتابعة حسابية أساسها = $٣^{م}$ (د) متتابعة هندسية أساسها = $٣^{م}$

(٤) إذا كانت (أ ، ب ، حـ ، ....) متتابعة هندسية وكانت : (أ ، أ + ب ، أ + حـ ، ....) متتابعة حسابية فإن أ : ب : حـ = ...

(أ) ١ : ٣ : ٥ (ب) ١ : ٢ : ٤ (جـ) ١ : ٢ : ٣ (د) ١ : ٤ : ٩

(٥) إذا كان الوسط الحسابى والوسط الهندسى لجذرى معادلة تربيعية هما ٨ ، ٥ على الترتيب فإن المعادلة هى .....

(أ) $س^{٢}$ − ١٦ س − ٢٥ = ٠ (ب) $س^{٢}$ − ٨ س + ٥ = ٠

(جـ) $س^{٢}$ − ١٦ س + ٢٥ = ٠ (د) $س^{٢}$ + ١٦ س − ٢٥ = ٠

(٦) إذا كانت : أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ خمسة أعداد موجبة فى تتابع هندسى فإن الوسط الهندسى لهذه الحدود هى .....

(أ) حـ (ب) $\sqrt[٥]{أ ب حـ ء هـ}$

(جـ) − حـ (د) − $\sqrt[٥]{أ ب حـ ء هـ}$

(٧) إذا كانت ارتفاعات مثلث أ ب حـ المرسومة من رؤوسه أ ، ب ، حـ على الترتيب فى تتابع حسابى فإن .....

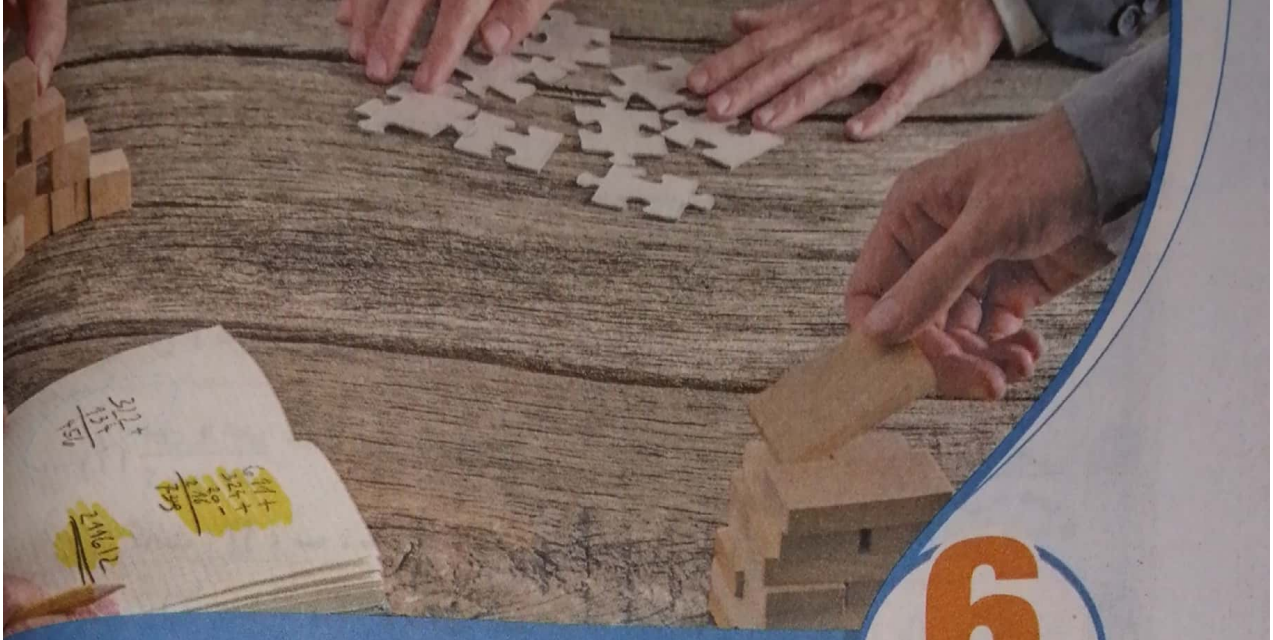
(أ) $أ^{-}$ ، $ب^{-}$ ، $حـ^{-}$ فى تتابع حسابى.

(ب) $أ^{-}$ ، $ب^{-}$ ، $حـ^{-}$ فى تتابع هندسى.

(جـ) $أ^{-}ب^{-}$ ، $أ^{-}حـ^{-}$ ، $ب^{-}حـ^{-}$ فى تتابع حسابى.

(د) $أ^{-}ب^{-}$ ، $ب^{-}حـ^{-}$ ، $حـ^{-}أ^{-}$ فى تتابع هندسى.

Scanned by CamScanner



الدرس 6

المتسلسلات الهندسية

المتسلسلة الهندسية

هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية.

أى أنه : إذا كانت (أ ، أ ر ، أ $ر^{٢}$ ، ..... ، أ $ر^{ن-١}$) متتابعة هندسية

فإن : $\boxed{أ + أ ر + أ ر^{٢} + ... + أ ر^{ن-١} = \sum_{ر=١}^{ن} أ ر^{ر-١}}$ (حيث ن عدد حدود المتتابعة)

يسمى متسلسلة هندسية.

فمثلًا المتسلسلة : ٣ + ٦ + ١٢ + ٢٤ + ٤٨ + ٩٦ = $\sum_{ر=١}^{٦}$ ٣ $(٢)^{ر-١}$ هى مجموع حدود المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨ ، ٩٦) التى حدها الأول أ = ٣ ، وأساسها ر = ٢

وحدها العام : $ح_{ن}$ = أ $ر^{ن-١}$ = ٣ $(٢)^{ن-١}$ وعدد حدودها = ٦ حدود.

مجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية ($ح_{ن}$)

١ إيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول (أ) وأساسها (ر) :

لأى متسلسلة هندسية حدها الأول = أ ، وأساسها = ر يكون :

$ح_{ن}$ = أ + أ ر + أ $ر^{٢}$ + ... + أ $ر^{ن-١}$ (١)

وبضرب الطرفين فى ر :

∴ ر $ح_{ن}$ = أ ر + أ $ر^{٢}$ + أ $ر^{٣}$ + ... + أ $ر^{ن}$ (٢)

Scanned by CamScanner

وبطرح (٢) من (١) :

$\therefore$ حـ$_{ن}$ − ر حـ$_{ن}$ = أ − أ ر^{ن} $\qquad$ $\therefore$ حـ$_{ن}$ (١ − ر) = أ (١ − ر^{ن})

$$\therefore \boxed{\text{حـ}_{ن} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{ن})}{١ - \text{ر}} \text{ ، ر} \neq ١}$$

ملاحظات

١ يمكن كتابة قانون المجموع على الصورة $\text{حـ}_{ن} = \frac{\text{أ}(\text{ر}^{ن} - ١)}{\text{ر} - ١}$ ، ر ≠ ١

٢ إذا كانت : ر = ١ فإن : حـ$_{ن}$ = أ + أ + أ + ... + أ (ن حدًا) = ن أ

أى أن : $\text{حـ}_{ن} = \sum_{\text{ر}=١}^{ن} \text{أ} = \text{ن أ}$

٣ $\text{حـ}_{ن} = \sum_{\text{ر}=١}^{ن} \text{أ ر}^{\text{ر}-١} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{ن})}{١ - \text{ر}}$ حيث ر ≠ ١

مثال ١

أوجد مجموع الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية : (٤ ، ١٢ ، ٣٦ ، .....)

الحل

أ = ٤ ، ر = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣ ، ن = ٦

$\because \text{حـ}_{ن} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{ن})}{١ - \text{ر}}$ $\qquad$ $\therefore \text{حـ}_{٦} = \frac{٤(١ - ٣^{٦})}{١ - ٣} = ١٤٥٦$

٢ إيجاد مجموع ن حدًا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل) :

$\because \text{حـ}_{ن} = \frac{\text{أ}(١ - \text{ر}^{ن})}{١ - \text{ر}} = \frac{\text{أ} - \text{أ ر}^{ن}}{١ - \text{ر}}$ (١) ، $\because$ ل = أ ر$^{ن-١}$

$\therefore$ ل ر = أ ر^{ن} وبالتعويض فى (١) : $\qquad$ $\therefore \boxed{\text{حـ}_{ن} = \frac{\text{أ} - \text{ل ر}}{١ - \text{ر}} \text{ ، ر} \neq ١}$

ويمكن استخدام القانون على الصورة : $\boxed{\text{حـ}_{ن} = \frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - ١} \text{ ، ر} \neq ١}$

Scanned by CamScanner

مثال ٢

أوجد قيمة : ٢ + ٦ + ١٨ + ... + ٤٨٦

الحل

أ = ٢ ، ر = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ ، ل = ٤٨٦

∵ $ح_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ ∴ $ح_ن = \frac{٢ - ٤٨٦ \times ٣}{١ - ٣}$ = ٧٢٨

∴ ٢ + ٦ + ١٨ + ... + ٤٨٦ = ٧٢٨

استخدام رمز التجميع Σ

مثال ٣

أوجد : ١ $\sum_{ن=٤}^{١٠} ٥ (٢)^{ن-١}$ ٢ $\sum_{ن=١}^{٥} ١٢٥ (٥)^{١-ن}$

الحل

١ $\sum_{ن=٤}^{١٠} ٥ (٢)^{ن-١} = ح_٤ + ح_٥ + ح_٦ + ... + ح_{١٠}$ من متتابعة هندسية حدها الأول أ = ٥

وأساسها ر = ٢ بدءًا من $ح_٤$ إلى $ح_{١٠}$

، ∵ $ح_٤ = أ ر^٣ = ٥ \times ٢^٣ = ٤٠$ ، $ح_{١٠} = أ ر^٩ = ٥ \times ٢^٩ = ٢٥٦٠$

، ∵ $ح_ن = \frac{أ - ل ر}{١ - ر}$ وبوضع أ = ٤٠ ، ل = ٢٥٦٠ ، ر = ٢

∴ $ح_ن = \frac{٤٠ - ٢٥٦٠ \times ٢}{١ - ٢}$ = ٥٠٨٠ ∴ $\sum_{ن=٤}^{١٠} ٥ (٢)^{ن-١}$ = ٥٠٨٠

* لاحظ أنه : فى المثال السابق يمكن إيجاد عدد الحدود المطلوب جمعها :

$ن$ = ١٠ − ٤ + ١ = ٧ حدود.

واستخدام القانون : $ح_ن = \frac{أ (١ - ر^ن)}{١ - ر}$ فيكون $ح_٧ = \frac{٤٠ (١ - ٢^٧)}{١ - ٢}$ = ٥٠٨٠

٢ ∵ $\sum_{ن=١}^{٥} ١٢٥ (٥)^{١-ن} = \sum_{ن=١}^{٥} ١٢٥ \left(\frac{١}{٥}\right)^{ن-١}$ وهى مجموع حدود متتابعة هندسية

حدها الأول أ = ١٢٥ وأساسها ر = $\frac{١}{٥}$ بدءًا من $ح_١$ إلى $ح_٥$

∴ $\sum_{ن=١}^{٥} ١٢٥ (٥)^{١-ن} = \frac{١٢٥ \left(١ - \left(\frac{١}{٥}\right)^٥\right)}{\left(١ - \frac{١}{٥}\right)} = \frac{٧٨١}{٥}$

Scanned by CamScanner

مثال ٤

أثبت أن المتتابعة $(ح_ن) = (٢\ (-٣)^{ن-١})$ متتابعة هندسية وأوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى منها.

الحل

$\because \frac{ح_{ن+١}}{ح_ن} = \frac{٢\ (-٣)^{ن}}{٢\ (-٣)^{ن-١}} = -٣$ = مقدار ثابت هو أساس المتتابعة.

$\therefore$ المتتابعة هندسية اساسها (ر) = −٣

بوضع ن = ١ $\therefore ح_١ = ٢$

، $\because ح_ن = \frac{أ\ (١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ $\therefore ح_٨ = \frac{٢\ [١ - (-٣)^{٨}]}{١ + ٣} = -٣٢٨٠$

مثال ٥

كم حدًا يلزم أخذه من المتتابعة الهندسية (٠,١ ، −٠,٤ ، ١,٦ ، ...) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع −٨١,٩ ؟

الحل

أ = ٠,١ ، $ر = \frac{-٠,٤}{٠,١} = -٤$

، $\because ح_ن = \frac{أ\ (١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ $\therefore -٨١,٩ = \frac{٠,١\ [١ - (-٤)^{ن}]}{١ + ٤}$

$\therefore -٨١,٩ = \frac{١ - (-٤)^{ن}}{٥ \times ١٠}$ $\therefore -٨١,٩ \times ٥٠ = ١ - (-٤)^{ن}$

$\therefore (-٤)^{ن} = ٤٠٩٦ = (-٤)^{٦}$ $\therefore ن = ٦$

$\therefore$ عدد الحدود اللازم أخذها = ٦ حدود.

مثال ٦

أوجد أقل عدد من حدود المتتابعة الهندسية (٧ ، ١٤ ، ٢٨ ، ...) يؤخذ ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع أكبر من ٧٠٠٠

Scanned by CamScanner

الحـــل

$أ = ٧$ ، $ر = \frac{١٤}{٧} = ٢$

، $\because حـ_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$ $\therefore حـ_ن = \frac{٧(١ - ٢^ن)}{١ - ٢}$ $\therefore حـ_ن = ٧(٢^ن - ١)$

ويكون $حـ_ن > ٧٠٠٠$ إذا كان $٧(٢^ن - ١) > ٧٠٠٠$ $\therefore ٢^ن - ١ > ١٠٠٠$

$\therefore ٢^ن > ١٠٠١$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين : $\therefore ن لو ٢ > لو ١٠٠١$

$\therefore ن > \frac{لو ١٠٠١}{لو ٢}$ وباستخدام الآلة الحاسبة $ن > ٩,٩٦٧٢٢٦٢٥٩$

$\therefore ن = ١٠$ أ، ١١ أ، ١٢ أ، ..... $\therefore$ أقل عدد من الحدود يمكن أخذه هو ١٠ حدود.

مثال ٧

إذا كان مجموع الخمسة حدود الأولى من متتابعة هندسية يساوى ٣١ ومجموع الخمسة حدود التالية يساوى ٩٩٢ فأوجد المتتابعة وأوجد حاصل ضرب حدودها العشرة الأولى.

الحـــل

$\because حـ_٥ = ٣١$ $\therefore ٣١ = \frac{أ(١ - ر^٥)}{١ - ر}$ (١)

، $\because$ مجموع الحدود العشرة الأولى $= ٣١ + ٩٩٢ = ١٠٢٣$ $\therefore ١٠٢٣ = \frac{أ(١ - ر^{١٠})}{١ - ر}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : $\therefore \frac{١٠٢٣}{٣١} = \frac{١ - ر^{١٠}}{١ - ر^٥}$ $\therefore \frac{١٠٢٣}{٣١} = \frac{(١ - ر^٥)(١ + ر^٥)}{١ - ر^٥}$

$\therefore ١ + ر^٥ = ٣٣$ $\therefore ر^٥ = ٣٢ = (٢)^٥$ $\therefore ر = ٢$

وبالتعويض فى (١) :

$\therefore ٣١ = \frac{أ(١ - ٣٢)}{١ - ٢}$

$\therefore ٣١ = ٣١ أ$

$\therefore أ = ١$

$\therefore$ المتتابعة هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ...)

لاحظ أن :

إذا كان : $حـ_١$ = مجموع ن حدًا الأولى من حدود متتابعة هندسية ، $حـ_٢$ = مجموع ن حدًا التالية لها

فإن : $ر = \sqrt[ن]{\frac{حـ_٢}{حـ_١}}$

Scanned by CamScanner

∴ حاصل ضرب الحدود العشرة الأولى = أ × أ ر × أ $ر^{٢}$ × ... × أ $ر^{٩}$

= (أ × أ × أ × ... إلى ١٠ عوامل) × (ر × $ر^{٢}$ × $ر^{٣}$ × ... × $ر^{٩}$)

= $أ^{١٠}$ $ر^{١+٢+٣+...+٩}$ = $أ^{١٠}$ $ر^{\frac{٩}{٢}(١+٩)}$ = $أ^{١٠}$ $ر^{٤٥}$

، ∵ أ = ١ ، ر = ٢

∴ حاصل ضرب الحدود العشرة الأولى = $(١)^{١٠}$ × $(٢)^{٤٥}$ = $٢^{٤٥}$

حل آخر :

∵ $ح_{٥}$ الأولى = ٣١

∴ أ + أ ر + أ $ر^{٢}$ + أ $ر^{٣}$ + أ $ر^{٤}$ = ٣١

∴ أ (١ + ر + $ر^{٢}$ + $ر^{٣}$ + $ر^{٤}$) = ٣١ (١)

∵ $ح_{٥}$ التالية = ٩٩٢ ∴ أ $ر^{٥}$ + أ $ر^{٦}$ + أ $ر^{٧}$ + أ $ر^{٨}$ + أ $ر^{٩}$ = ٩٩٢

∴ أ $ر^{٥}$ (١ + ر + $ر^{٢}$ + $ر^{٣}$ + $ر^{٤}$) = ٩٩٢ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ $ر^{٥}$ = ٣٢ = $٢^{٥}$ ∴ ر = ٢

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ (١ + ٢ + ٤ + ٨ + ١٦) = ٣١

∴ ٣١ أ = ٣١ ∴ أ = ١

∴ المتتابعة هى (١ ، ٢ ، ٤ ، ...) ثم يكمل الحل.

ملاحظة

إذا كان : $ح_{ن}$ هو مجموع حدود المتتابعة بدءًا من $ح_{١}$ إلى $ح_{ن}$

فإن : $ح_{ن} = ح_{ن} - ح_{ن-١}$ لكل ن > ١

فمثلًا : $ح_{٢} = ح_{٢} - ح_{١}$ ، $ح_{٣} = ح_{٣} - ح_{٢}$ وهكذا.

Scanned by CamScanner

مثال ٨

إذا كان مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة هندسية يعطى بالقانون $ح_ن = ٢٥٦ - ٢^{٨-ن}$

فأوجد المتتابعة وأوجد كذلك حدها السابع.

الحـــل

$ح_ن = ٢٥٦ - ٢^{٨-ن}$

* بوضع $ن = ١$ $\therefore ح_١ = ٢٥٦ - ٢^{٧} = ٢٥٦ - ١٢٨ = ١٢٨$ $\therefore ح_١ = ١٢٨$

* بوضع $ن = ٢$ $\therefore ح_٢ = ٢٥٦ - ٢^{٦} = ٢٥٦ - ٦٤ = ١٩٢$

$\therefore ح_١ + ح_٢ = ١٩٢$ $\therefore ح_٢ = ١٩٢ - ١٢٨ = ٦٤$

* بوضع $ن = ٣$ $\therefore ح_٣ = ٢٥٦ - ٢^{٥} = ٢٥٦ - ٣٢ = ٢٢٤$

$\therefore ح_١ + ح_٢ + ح_٣ = ٢٢٤$ $\therefore ح_٣ = ٢٢٤ - ١٩٢ = ٣٢$

$\therefore$ المتتابعة هى (١٢٨ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ...)

، $\because ح_٧ = ح_٧ - ح_٦$ $\therefore ح_٧ = [٢٥٦ - ٢^{١}] - [٢٥٦ - ٢^{٢}] = ٢٥٤ - ٢٥٢ = ٢$

مثال ٩

صهريج مياه سعته ٦٣٠٥ لترًا كان فارغًا ثم مُلئ بالماء بواسطة صنبور يصب فى الساعة الأولى ١٢٨ لترًا ، ويصب فى كل ساعة تالية مرة ونصف مرة قدر ما صبه فى الساعة السابقة.

بعد كم ساعة يمتلئ الصهريج ؟

الحـــل

مقدار ما صبه فى الساعة الأولى = ١٢٨

$\therefore$ ما يصب فى الساعة الثانية = $١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right)$

، ما يصب فى الساعة الثالثة = $١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right) \times \frac{٣}{٢} = ١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ وهكذا ...

Scanned by CamScanner

∴ ما يصب فى الصهريج فى الساعات المتتالية يكون متتابعة هندسية هى :

$$\left(١٢٨ ، ١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right) ، ١٢٨ \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} ، \ldots\right)$$

وعندما يمتلئ الصهريج يكون مجموع $ن$ حدًا من هذه المتتابعة = سعة الصهريج أى ٦٣٠٥

، ∵ $ح_{ن} = \frac{أ(١ - ر^{ن})}{١ - ر}$ ∴ $\frac{١٢٨ \left[\left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن} - ١\right]}{\frac{٣}{٢} - ١} = ٦٣٠٥$

∴ $٦٣٠٥ = ١٢٨ \times ٢ \left[\left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن} - ١\right]$ ∴ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن} - ١ = \frac{٦٣٠٥}{١٢٨ \times ٢}$

∴ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن} = \frac{٦٣٠٥}{١٢٨ \times ٢} + ١$ ∴ $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{ن} = \frac{٦٥٦١}{٢٥٦} = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٨}$

∴ $ن = ٨$ ∴ الصهريج يمتلئ بعد ٨ ساعات.

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية

تعريف

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هى التى لها عدد لا نهائى من الحدود.

- وإذا كان مجموعها يقترب من عدد حقيقى (أى يساوى تقريبًا عددًا حقيقيًا) فإنها تكون متقاربة (تقاربية)
- وإذا كان ليس لها مجموع فإنها تكون غير متقاربة (تباعدية)

أى أن : المتسلسلة الهندسية : $أ + أر + أر^{٢} + \ldots\ldots + أر^{ن-١} + \ldots\ldots = \sum_{ن=١}^{\infty} أر^{ن-١}$

متسلسلة غير منتهية.

وتكون : ① متقاربة (يمكن إيجاد مجموعها) إذا كان :

$|ر| < ١$ **أى :** $-١ < ر < ١$

② غير متقاربة (لا يمكن إيجاد مجموعها) إذا كان :

$|ر| > ١$ **أى :** $ر > ١$ أ، $ر < -١$.

Scanned by CamScanner

مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

∵ مجموع المتتابعة الهندسية يعطى بالقانون : $ح_ن = \frac{أ(١ - ر^ن)}{١ - ر}$

وعندما $ن \longrightarrow \infty$ ، $|ر| < ١$ فإن : $ر^ن \longrightarrow$ صفر

حينئذ يصبح مجموع عدد لا نهائى من حدود المتتابعة الهندسية : $\boxed{ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر}}$

مثال ١٠

بين أى من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها وأوجد هذا المجموع إن أمكن :

١ ٨١ − ٢٧ + ٩ − ٣ + ...

٢ −١ − ٢ − ٤ − ٨ − .....

٣ $\sum_{ر=١}^{\infty} (٢ \times ٣^{-ر})$

الحل

١ ∵ $ر = \frac{-٢٧}{٨١} = \frac{-١}{٣}$

∴ $|ر| = |\frac{-١}{٣}| = \frac{١}{٣} < ١$

∴ المتسلسلة تقاربية ويمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها.

، ∵ أ = ٨١ ∴ $ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٨١}{١ - (\frac{-١}{٣})} = ٦٠\frac{٣}{٤}$

٢ ∵ $ر = \frac{-٢}{-١} = ٢$ ∴ $|ر| = |٢| = ٢ > ١$

∴ المتسلسلة غير تقاربية ولا يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها.

٣ ∵ $\sum_{ر=١}^{\infty} (٢ \times ٣^{-ر}) = \sum_{ر=١}^{\infty} (٢ \times (\frac{١}{٣})^{ر-١})$

∴ أ = ٢ ، $ر = \frac{١}{٣}$

، ∵ $|ر| = |\frac{١}{٣}| = \frac{١}{٣} < ١$

∴ المتسلسلة تقاربية ويمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها.

∴ $ح_\infty = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٢}{١ - \frac{١}{٣}} = ٣$

Scanned by CamScanner

مثال ١١

مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية يساوى ٤ وحدها الثانى −٣ أوجد المتتابعة.

الحل

∵ $ح_{\infty} = ٤$ ∴ $\frac{أ}{١ - ر} = ٤$ (١)

∵ $ح_{٢} = -٣$ ∴ $أ ر = -٣$ (٢)

وبقسمة (٢) على (١) : ∴ $أ ر \times \frac{١ - ر}{أ} = \frac{-٣}{٤}$

∴ $ر (١ - ر) = \frac{-٣}{٤}$

∴ $٤ ر^{٢} - ٤ ر - ٣ = ٠$

∴ $(٢ ر - ٣) (٢ ر + ١) = ٠$

∴ $ر = \frac{٣}{٢}$ (مرفوض) أ، $ر = -\frac{١}{٢}$ وبالتعويض فى (٢) :

∴ $أ = ٦$

∴ المتتابعة هى $(٦ ، -٣ ، \frac{٣}{٢} ، ...)$

مثال ١٢

متتابعة هندسية مجموع حدودها إلى ∞ يساوى ٣ ، مجموع مكعبات حدودها إلى ∞ يساوى ٨١ فما هى المتتابعة ؟

الحل

نفرض أن المتتابعة هى : $(أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، ...)$

، ∵ $ح_{\infty} = ٣$ ∴ $\frac{أ}{١ - ر} = ٣$ (١)

، ∵ $(أ^{٣} + أ^{٣} ر^{٣} + أ^{٣} ر^{٦} + ...) = ٨١$

وهذه متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول = $أ^{٣}$ ، أساسها = $ر^{٣}$

∴ $\frac{أ^{٣}}{١ - ر^{٣}} = ٨١$ (٢)

Scanned by CamScanner

وبتكعيب (١) والقسمة على (٢) : ∴ $\frac{\text{أ}^{٣}}{(١ - \text{ر})^{٣}} \times \frac{١ - \text{ر}^{٣}}{\text{أ}^{٣}} = \frac{٢٧}{٨١}$

∴ $\frac{(١ - \text{ر})(١ + \text{ر} + \text{ر}^{٢})}{(١ - \text{ر})^{٣}} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{١ + \text{ر} + \text{ر}^{٢}}{١ - ٢\text{ر} + \text{ر}^{٢}} = \frac{١}{٣}$

∴ ٣ + ٣ر + ٣ر^{٢} = ١ − ٢ر + ر^{٢} ∴ ٢ر^{٢} + ٥ر + ٢ = ٠

∴ (ر + ٢) (٢ر + ١) = ٠

∴ ر = −٢ (مرفوض) أ، ر = $-\frac{١}{٢}$ وبالتعويض فى (١) : ∴ $\frac{\text{أ}}{١ + \frac{١}{٢}} = ٣$

∴ أ = ٣ × $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٩}{٢}$ ∴ المتتابعة هى : $\left(\frac{٩}{٢}، -\frac{٩}{٤}، \frac{٩}{٨}، ...\right)$

مثال ١٣

متتابعة هندسية أى حد من حدودها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ∞ من الحدود أوجد أساسها، وإذا كان حدها الثالث = ٩ فأوجد المتتابعة.

الحـــل

نفرض أن المتتابعة هى (أ ، أر ، أر^{٢} ، ...)

، ∵ أى حد من حدودها = ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ∞

∴ أ = ٢ (أر + أر^{٢} + أر^{٣} + ...) ∴ أ = ٢ × $\frac{\text{أر}}{١ - \text{ر}}$

[لاحظ أن المتتابعة (أر ، أر^{٢} ، أر^{٣} ، ...) متتابعة هندسية حدها الأول أر وأساسها ر]

∴ أ (١ − ر) = ٢ أر وبالقسمة على أ ∴ ١ − ر = ٢ر

∴ ٣ر = ١ ∴ ر = $\frac{١}{٣}$

، ∵ ح$_{٣}$ = ٩ ∴ أر^{٢} = ٩

∴ أ $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٢}$ = ٩ ∴ أ = ٨١

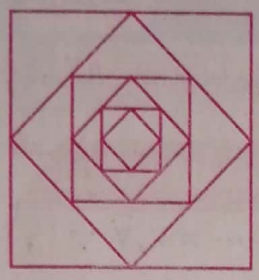
∴ المتتابعة هى : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، ...)

Scanned by CamScanner

مثال ١٤

الشكل المقابل يبين ستة مربعات فى متتابعة لا نهائية فيها كل مربع أصغر مكون من توصيل منتصفات أضلاع المربع الأكبر منه مباشرة فإذا كانت مساحة المربع الأكبر ١٦ وحدة مربعة.

أوجد مجموع مساحات هذه المربعات إلى ∞



الحـــل

∵ مساحة المربع الناتج من توصيل منتصفات أضلاع مربع تساوى $\frac{١}{٢}$ مساحة المربع الأكبر

∴ مجموع مساحات المربعات إلى ∞ يكون متسلسلة هندسية لا نهائية حدها الأول ١٦ وأساسها $\frac{١}{٢}$

∴ $ح^{\infty} = \frac{١٦}{١ - \frac{١}{٢}} = ٣٢$ وحدة مربعة.

تحويل الكسر العشرى الدائرى إلى كسر اعتيادى

لتحويل الكسر الاعتيادى $\frac{١}{٣}$ إلى كسر عشرى فإننا نجرى عملية القسمة كما هو متبع حيث نلاحظ أن عملية القسمة لا تنتهى وإن الرقم ٣ فى خارج القسمة يظل متكررًا. أى أن $\frac{١}{٣} = ٠,٣٣٣ \cdots$ ونختصر هذا الناتج بأن نكتب $\frac{١}{٣} = ٠,\overline{٣}$ وذلك بوضع خط فوق العدد ٣ الذى يتكرر وتقرأ ٠,٣ دائر.

وبالمثل $\frac{٥}{٩} = ٠,٥٥٥٥ \cdots = ٠,\overline{٥}$ ، $\frac{١}{٦} = ٠,١٦٦٦٦ \cdots = ٠,١\overline{٦}$

، $\frac{٥}{٣٣} = ٠,١٥١٥١٥ \cdots = ٠,\overline{١٥}$ ، $\frac{١٤}{١١١} = ٠,١٢٦١٢٦١٢٦ \cdots = ٠,\overline{١٢٦}$

ونلاحظ أن وضع الخط فوق رقم أو رقمين أو ثلاث ... معناه استمرار تكرار هذا الرقم أو الرقمين أو الثلاثة أرقام ... بنفس الترتيب.

وإذا كان العكس هو المطلوب أى تحويل الكسر العشرى الدائر إلى كسر اعتيادى فإننا نضع الكسر العشرى الدائر على صورة مجموع حدود متتابعة هندسية غير منتهية كما يتضح من المثال الآتى :

Scanned by CamScanner

مثال ١٥

ضع كلاً من الكسور العشرية الدائرية الآتية على صورة كسر اعتيادى :

١ $٠,\overline{٧}$ ٢ $٠,\overline{٢٤}$ ٣ $٣,٤\overline{١٢}$

الحـــل

١ $\because$ $٠,\overline{٧} = ٠,٧٧٧٧ \ldots$

$\therefore$ $٠,\overline{٧} = ٠,٧ + ٠,٠٧ + ٠,٠٠٧ + \ldots$

"متسلسلة هندسية حدها الأول ٠,٧ وأساسها ر = ٠,١"

$\therefore$ $٠,\overline{٧} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٠,٧}{١ - ٠,١} = \frac{٠,٧}{٠,٩} = \frac{٧}{٩}$

٢ $\because$ $٠,\overline{٢٤} = ٠,٢٤٢٤٢٤ \ldots$

$\therefore$ $٠,\overline{٢٤} = ٠,٢٤ + ٠,٠٠٢٤ + ٠,٠٠٠٠٢٤ + \ldots$

$= \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٠,٢٤}{١ - ٠,٠١} = \frac{٠,٢٤}{٠,٩٩} = \frac{٨}{٣٣}$

٣ $\because$ $٣,٤\overline{١٢} = ٣,٤١٢١٢١٢ \ldots$

$\therefore$ $٣,٤\overline{١٢} = ٣,٤ + ٠,٠١٢ + ٠,٠٠٠١٢ + ٠,٠٠٠٠٠١٢ + \ldots$

$= ٣,٤ + (٠,٠١٢ + ٠,٠٠٠١٢ + ٠,٠٠٠٠٠١٢ + \ldots)$

$= ٣,٤ + \frac{أ}{١ - ر} = ٣,٤ + \frac{٠,٠١٢}{١ - ٠,٠١} = ٣,٤ + \frac{٠,٠١٢}{٠,٩٩} = \frac{٥٦٣}{١٦٥}$

Scanned by CamScanner

اختبر نفسك

تمارين 6 على المتسلسلات الهندسية

من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا تمارين على المتسلسلة الهندسية ومجموع ن حدًا الأولى من متسلسلة هندسية

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ٣ + ٦ + ١٢ + ... + ١٩٢ = ...

(أ) ١٩٢ (ب) ٣٨١ (جـ) ١٨٩ (د) ٧٦٥

(٢) مجموع ٨ حدود الأولى من المتسلسلة الهندسية : $\frac{١}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ + ١ + ٢ + ...

(أ) $٦٣\frac{٣}{٤}$ (ب) ٣٢ (جـ) $٣١\frac{٣}{٤}$ (د) ٦٤

(٣) فى المتسلسلة الهندسية التى حدها الأول أ = ٢ ، أساسها ر = $\frac{١}{٢}$

يكون $\sum_{ن=١}^{٦}$ أ $ر^{ن-١}$ = ...

(أ) $٣\frac{١٥}{١٦}$ (ب) $\frac{١}{١٦}$ (جـ) $٣\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{١}{٣٢}$

(٤) المتتابعة الهندسية التى حدها الأول أ = ٢ ، وأساسها ر = ١

يكون مجموع ١٠ حدود الأولى منها = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٢ (جـ) ١٠ (د) ١٠٢٤

(٥) $\sum_{ن=٣}^{٧}$ (٢ × $٣^{ن-١}$) = ...

(أ) ٢٤٢ (ب) ١٤٥٨ (جـ) ٧٣٨ (د) ٢١٧٨

(٦) متتابعة هندسية مجموع ن حدًا الأولى منها يعطى بالعلاقة : $ح_ن$ = $٣^{ن+١}$ − ٤

فإن الحد الثالث منها يساوى .....

(أ) ١٨ (ب) ٢٣ (جـ) ٥٤ (د) ٧٧

(٧) إذا كان : $ح_ن$ مجموع ن حدًا الأولى من المتتابعة الهندسية (١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ...)

، $حَ_ن$ مجموع ن حدًا الأولى من المتتابعة الهندسية (١ ، − $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ...)

حيث ن عدد زوجى فإن : $ح_ن$ = ...

(أ) ٢ $حَ_ن$ (ب) ٣ $حَ_ن$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ $حَ_ن$ (د) $\frac{٢}{٣}$ $حَ_ن$

Scanned by CamScanner

٢ أوجد مجموع كل من المتسلسلات الهندسية الآتية :

(١) ١ + ٣ + ٩ + ... + ٦٥٦١ | (٢) ٢٠ − ١٠ + ٥ − ..... − $\frac{٥}{٣٢}$

٣ أوجد مجموع كل من المتتابعات الهندسية التى فيها :

(١) أ = ٩ ، ر = ٣ ، ل = ٦٥٦١ | (٢) أ = ٤ ، ر = ٣ ، ن = ٦

(٣) أ = $\frac{١}{٢}$ ، ر = −٢ ، ن = ١٠ | (٤) أ = −٤ ، ر = −$\frac{١}{٢}$ ، ل = $\frac{١}{٨}$

٤ أوجد مجموع كل من المتتابعات الهندسية الآتية :

(١) (٣ ، ١٢ ، ٤٨ ، ..... إلى ٦ حدود) | (٢) (٣ ، −٦ ، ١٢ ، ..... ، ٧٦٨)

(٣) (١ ، −$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ..... إلى ٩ حدود)

٥ أوجد مجموع الثمانية حدود الأولى من المتتابعة الهندسية (ح$_ن$) حيث ح$_ن$ = ٢ (٣)$^{ن+١}$

«٥٩٠٤٠»

٦ أوجد مجموع ٥ حدود من المتتابعة الهندسية (١ ، ٣ ، ٩ ، .....) ابتداءً من حدها الثالث.

«١٠٨٩»

٧ أوجد :

(١) $\sum_{ر=١}^{٥}$ ٢ × $\left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١}$ | (٢) $\sum_{ر=٥}^{١٢}$ ٣ (٢)$^{ر-١}$

(٣) $\sum_{ر=٥}^{٩}$ ١٦ × (٢)$^{١-ر}$

٨ كم حدًا يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، .....) ابتداءً من حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود = ٣٨١

«٧»

٩ كم عدد الحدود التى يجب أخذها من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٦ ، ١٨ ، .....) ابتداءً من حدها الثانى ليكون مجموع هذه الحدود مساويًا ٦٥٥٨

«٧»

١٠ أثبت أن : المتتابعة (ح$_ن$) = (١٠ × ٢$^{ن-٢}$) هى متتابعة هندسية ، وأوجد عدد الحدود ابتداءً من الحد الأول التى يجب أخذها من المتتابعة ليكون مجموعها ٢٥٥٥

«٩»

Scanned by CamScanner

١١ أوجد المتتابعة الهندسية التى حدها الأول = ٢٤٣ ، حدها الأخير = ١ ، مجموع حدودها ٣٦٤
«(٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ...)»

١٢ أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموعها ١٠٩٣ ، وحدها الأخير ٧٢٩ وأساسها ٣
«(١ ، ٣ ، ٩ ، ...)»

١٣ أوجد أقل عدد من حدود المتتابعة الهندسية (٥ ، ١٥ ، ٤٥ ، .....) يلزم أخذه ابتداءً من حدها الأول ليكون المجموع أكبر من ٦٤٠٠
«٨»

١٤ متتابعة هندسية حدها الأول ٢ وحدها الرابع ٥٤ أوجد أقل عدد من حدودها يلزم أخذه ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموعها أكبر من ٥٠٠٠
«٨»

١٥ متتابعة هندسية حدها الرابع يساوى ٨ وحدها السابع يساوى ٦٤ أوجد المتتابعة ومجموع العشرة حدود الأولى منها.
«(١ ، ٢ ، ٤ ، .....) ، ١٠٢٣»

١٦ ($ح_ن$) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها : $ح_٢ = ٦$ ، $ح_٣ - ح_١ = ٩$ أوجد هذه المتتابعة ومجموع الاثنى عشر حدًا الأولى منها.
«(٣ ، ٦ ، ١٢ ، ...) ، ١٢٢٨٥»

١٧ متتابعة هندسية حدودها موجبة وحدها الأول يساوى أربعة أمثال حدها الثالث ومجموع حديها الثانى والخامس = ٣٦ أوجد المتتابعة ومجموع العشرة حدود الأولى منها.
«(٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، .....) ، $١٢٧\frac{٧}{٨}$»

١٨ متتابعة هندسية مجموع حديها الرابع والسادس = ١٢٠ ومجموع حديها الخامس والسابع = ٢٤٠ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع ١٠ حدود الأولى منها.
«(٣ ، ٦ ، ١٢ ، .....) ، ٣٠٦٩»

١٩ متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان : $ح_٣ + ح_٤ = ٦ ح_٢$ ، $ح_٧ = ٣٢٠$ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع الثمانية حدود الأولى منها.
«(٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، .....) ، ١٢٧٥»

٢٠ متتابعة هندسية مجموع حدودها الثلاثة الأولى يساوى ١٣ ، مجموع حدودها الثلاثة التالية لها يساوى ٣٥١ ، أوجد المتتابعة ومجموع الحدود العشرة الأولى منها.
«(١ ، ٣ ، ٩ ، .....) ، ٢٩٥٢٤»

Scanned by CamScanner

٢١ متتابعة هندسية مجموع الأربعة حدود الأولى منها يساوى ٦٠ ومجموع الحدود الأربعة التالية يساوى ١٦ مرة مجموع الحدود الأربعة الأولى. أوجد المتتابعة.
«(٤ ، ٨ ، ١٦ ، .....) أ، (-١٢ ، ٢٤ ، -٤٨ ، .....)»

٢٢ إذا كان مجموع $ن$ حدًا الأولى من متتابعة يعطى بالقانون : $حـ_ن = \frac{١}{٢} [٣^{ن+٢} - ٩]$
أثبت أن المتتابعة هندسية ثم أوجدها.
«(٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، .....)»

٢٣ عند إدخال $ن$ من الأوساط الهندسية بين ٨١ ، $\frac{١}{٧٢٩}$ كان مجموع الوسطين الأولين ٣٦ ، ومجموع الوسطين الأخيرين $\frac{٤}{٢٤٣}$ ، أوجد مجموع هذه الأوساط الهندسية.
«$\frac{٩٨٤١}{٢٤٣}$»

٢٤ إذا كان مجموع التسعة حدود الأولى من متتابعة هندسية يساوى ل ، ومجموع التسعة حدود التالية لها يساوى م ، **فأثبت أن** : أساس المتتابعة = $\sqrt[٩]{\frac{م}{ل}}$

٢٥ **الربط بالأحياء** : إذا تضاعفت زراعة البكتيريا كل يوم (فى أحد الأوساط الغذائية) ، فكم يكون عدد البكتيريا بعد عشرة أيام إذا كان عددها فى اليوم الأول ٨٠٠ «٨١٨٤٠٠»

٢٦ خزان به ٦١٣٨ لترًا من الماء ، يتسرب منه فى أول يوم ٦ لترات وفى اليوم الثانى ١٢ لترًا وفى اليوم الثالث ٢٤ لترًا وهكذا فبعد كم يوم يصبح الخزان فارغًا ؟
«١٠»

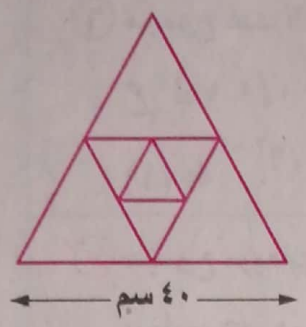
٢٧ **الربط بالدخل** : بدأ شخص العمل فى مصنع بمرتب سنوى قدره ٧٢٠٠ جنيه على أن يحصل على علاوة سنوية قدرها ٦ ٪ من مرتب السنة السابقة. احسب مرتبه فى السنة السابعة ، ومجموع ما يحصل عليه فى السنوات السبع الأولى. «١٠٢١٣ ، ٦٠٤٣٦ جنيه»

٢٨ شركة لتخزين المحاصيل الزراعية لديها سبعة صوامع لتخزين القمح ، تسع الصومعة الأولى ٢٧٠ طنًا من القمح ، وكل صومعة بعد ذلك تسع ثلثى الكمية التى تسعها الصومعة السابقة لها ، هل يمكن للشركة أن تقوم بتخزين ٨٠٠ طن من القمح ؟ وما أكبر كمية تستطيع الشركة تخزينها بصوامعها مقربًا الناتج لأقرب طن ؟ «٧٦٣ طن»

٢٩ **الربط بالتعدين** : منجم للذهب ينتج فى العام الأول ٤٢٠٠ كجم من الذهب ، ويتناقص إنتاج المنجم بمعدل ١٠ ٪ سنويًا من إنتاج السنة السابقة لها مباشرة. أوجد إنتاج المنجم فى السنة الثامنة ، ثم احسب إنتاج المنجم خلال الثمان سنوات الأولى. «٢٠٠٨,٨ ، ٢٣٩٢٠ كجم»

Scanned by CamScanner

٣٠ الربط بالهندسة :



يبين الشكل المقابل مثلثًا متساوى الأضلاع طول ضلعه ٤٠ سم ، رسم مثلث آخر نحو الداخل عن طريق توصيل النقاط التى تمثل منتصفات أضلاع المثلث الأكبر ، ويتم تكرار رسم المثلثات الداخلية بنفس الطريقة فأوجد لأقرب عدد صحيح مجموع محيطات الـ ١٠ مثلثات الأولى فى هذا النمط. «٢٤٠ سم»

٣١ أيهما يعطى لك دخلاً أكثر على مدى ٢٥ عامًا : عمل يبدأ بمرتب سنوى قدره ١٠٠٠ جنيه مع علاوة ثابتة سنوية قدرها ٣٠ جنيهًا أو عمل يبدأ بنفس المرتب السنوى مع علاوة سنوية قدرها ٢٪ من قيمة مرتب السنة السابقة ؟ وما الفرق بين الدخلين ؟ «١٩٧٠ جنيهًا»

ثانيًا تمارين على المتسلسلات الهندسية غير المنتهية - مجموع المتتابعة الهندسية غير المنتهية

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية إذا وفقط إذا كان .....

(أ) ر < ١ (ب) ر > ١ (جـ) |ر| < ١ (د) |ر| > ١

(٢) مجموع حدود المتتابعة الهندسية : (٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، .....) يساوى .....

(أ) $\frac{٢٤٣}{٤}$ (ب) ١١٧ (جـ) ١١٨ (د) $\frac{٢٤٣}{٢}$

(٣) $٠,\overline{٥٧}$ = ...

(أ) $\frac{٥٧}{١٠٠}$ (ب) $\frac{٧٥}{٩٩}$ (جـ) $\frac{٥٧٥}{١٠٠٠}$ (د) $\frac{١٩}{٣٣}$

(٤) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها $\frac{١}{٣}$ هو $١٣\frac{١}{٢}$ فإن حدها الأول يساوى .....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٢

(٥) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التى حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوى .....

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

Scanned by CamScanner

⑥ مجموع عدد لا نهائى من حدود المتتابعة الهندسية ($ح_ن$) التى حدها الأول

$ح_١ = ١$ ، $ح_ن = ٢ ح_{ن+١}$ يساوى .....

(أ) ∞ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

⑦ مجموع مربعات حدود متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول = ١ وأساسها يساوى ص هو .....

(أ) $\frac{١}{١ - ص}$ (ب) $\frac{١}{١ - ص^٢}$ (جـ) $\frac{١}{ص^٢}$ (د) $\frac{١}{ص}$

⑧ مجموع المتسلسلة $\left(١ + \frac{١}{س} + \frac{١}{س^٢} + \cdots\right)$ يساوى ..... (حيث $|س| > ١$)

(أ) $\frac{١}{١ - س}$ (ب) $\frac{س}{١ - س}$ (جـ) $\frac{س}{س - ١}$ (د) $\frac{س}{س^٢ - ١}$

⑨ متتابعة هندسية حدها الأول يساوى مجموع الحدود التالية إلى ما لا نهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوى .....

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٣٣٣ (جـ) ٠,٢٥ (د) ٠,٦٦٦

⑩ $\sum_{ر=١}^{\infty} ٤ \left(\frac{١}{٢}\right)^{ر-١} =$ .....

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) $٤\frac{١}{٢}$ (د) ٢

---

٢ بين أى المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها ، وأوجد هذا المجموع إن أمكن :

① ٧ + ٢١ + ٦٣ + ...

② ٧٥ + ٤٥ + ٢٧ + ...

③ $١٥ - ٥ + \frac{٥}{٣} - \frac{٥}{٩} + \cdots$

④ ٩٦ − ٤٨ + ٢٤ − ١٢ + ...

---

٣ بين أى المتتابعات الهندسية الآتية يمكن إيجاد مجموعها إلى ∞ من الحدود وأوجد هذا المجموع إن أمكن :

① (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، .....)

② (٣ ، −٦ ، ١٢ ، .....)

③ $(ح_ن) = (٥ \times ٢^ن)$

④ $(ح_ن) = (٢ \times ٥^{ن-١})$

Scanned by CamScanner

٤ أوجد مجموع كل من المتتابعات الهندسية الآتية إلى ∞ :

① (٢٥ ، −٥ ، ١ ، .....) « $\frac{١٢٥}{٦}$ »

② (٣ ، $\sqrt{٣}$ ، ١ ، .....) « $\frac{٩ + ٣\sqrt{٣}}{٢}$ »

③ ($٣^{-١}$ ، $(-٣)^{-٣}$ ، $٣^{-٥}$ ، .....) « $\frac{٣}{١٠}$ »

④ $(ح_ن) = (٣^{٣-ن})$ « $\frac{٢٧}{٣}$ »

٥ ضع كلاً من الكسور العشرية الدائرية الآتية على صورة كسر اعتيادى :

① $٠,\overline{٣}$ « $\frac{١}{٣}$ »

② $٠,٢\overline{٤}$ « $\frac{١١}{٤٥}$ »

③ $٠,\overline{١٨}$ « $\frac{٢}{١١}$ »

④ $٠,\overline{٤٣٢}$ « $\frac{١٦}{٣٧}$ »

⑤ $\sqrt[٣]{٠,\overline{٠٣٧}}$ « $\frac{١}{٣}$ »

⑥ $٠,\overline{٤} + ٠,٢\overline{٣}$ « $\frac{٦١}{٩٠}$ »

٦ أوجد :

① $\sum_{ن=١}^{\infty} ٩ \left(\frac{-١}{٣}\right)^{ن-١}$ « $\frac{٢٧}{٤}$ »

② $\sum_{ن=١}^{\infty} ٥٦ \left(\frac{٣}{٤}\right)^{ن-١}$ «٢٢٤»

③ $\sum_{ن=١}^{\infty} ٢٧ (٣)^{١-ن}$ « $\frac{٨١}{٢}$ »

④ $\sum_{ن=٢}^{\infty} \frac{١}{٨١} (٣)^{١-ن}$ « $\frac{١}{١٦٢}$ »

٧ اكتب المتسلسلة الهندسية : ٤٨ + ٢٤ + ١٢ + ... باستخدام رمز المجموع.

٨ إذا كان الحد الأول من متتابعة هندسية عدد حدودها غير منته = ١٨ ، الحد الرابع منها = $\frac{١٦}{٣}$ ، فما مجموعها ؟ «٥٤»

٩ مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية = ٥٤ وحدها الأول = ١٨

أوجد المتتابعة. «(١٨ ، ١٢ ، ٨ ، .....)»

١٠ متتابعة هندسية غير منتهية ، حدودها موجبة ، يزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ٣٠ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها يساوى $\frac{١٣٥}{٢}$ أوجد هذه المتتابعة.

«(٤٥ ، ١٥ ، ٥ ، .....)»

١١ متتابعة هندسية مجموع عدد لا نهائى من حدودها ابتداء من حدها الأول يساوى ١٠٨ ، ويزيد حدها الأول عن حدها الثانى بمقدار ١٢ ، أوجد المتتابعة ومجموع حدودها السبعة الأولى. «(٣٦ ، ٢٤ ، ١٦ ، .....) ، $\frac{٨٢٣٦}{٨١}$ »

Scanned by CamScanner

١٢ أوجد المتتابعة الهندسية التى مجموع حديها الأول والثانى = ١٦ ، ومجموع عدد غير منته من حدودها = ٢٥ «(١٠ ، ٦ ، $\frac{١٨}{٥}$ ، .....) أ، (٤٠ ، −٢٤ ، $\frac{٧٢}{٥}$ ، .....)»

١٣ متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع حدودها إلى ∞ يساوى ٣ ، ومجموع الحدين الأول والثانى يساوى $٢\frac{٢}{٣}$ أوجد المتتابعة وأوجد مجموع الحدود الخمسة الأولى منها. «(٢ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، .....) ، $\frac{٢٤٢}{٨١}$»

١٤ متتابعة هندسية غير منتهية ، حدها الأول = مجموع الحدود التالية له إلى ما لا نهاية ، مجموع حديها الأول والثانى = ٩ ، أوجد هذه المتتابعة. «(٦ ، ٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، .....)»

١٥ متتابعة هندسية حدودها موجبة وكل حد من حدودها يساوى ضعف مجموع الحدود التالية له مباشرة إلى ∞ من الحدود فإذا كان حدها الثالث يساوى المعكوس الضربى لحدها الخامس فأوجد المتتابعة ومجموع الخمسة حدود الأولى منها. «(٢٧ ، ٩ ، ٣ ، .....) ، $\frac{١٢١}{٣}$»

١٦ متتابعة هندسية كل حد من حدودها يساوى ٧ أمثال مجموع الحدود التالية له مباشرة إلى ∞ فإذا كان حدها الثالث يساوى $\frac{٣}{٨}$ فأوجد المتتابعة. «(٢٤ ، ٣ ، $\frac{٣}{٨}$ ، .....)»

١٧ إذا كان مجموع متتابعة هندسية غير منتهية $\frac{٣٧٥}{٤}$ ، مجموع حديها الأول والثانى يساوى ٩٠ ، فأثبت أنه توجد متتابعتان وأوجدهما. «(٧٥ ، ١٥ ، ٣ ، .....) أ، (١١٢,٥ ، −٢٢,٥ ، ٤,٥ ، .....)»

١٨ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية فيها : $ح_٢ - ح_٦ = ٤٥$ ، $ح_٤$ الأولى = ١٨٠ ، أوجد المتتابعة ، وبين أنه يمكن جمع عدد لا نهائى من حدودها وأوجد هذا المجموع. «(٩٦ ، ٤٨ ، ٢٤ ، .....) ، ١٩٢»

١٩ متتابعة هندسية حدودها موجبة ، مجموع حديها الأول والثانى يساوى ١٠٨ ومجموع حديها الثالث والرابع يساوى ١٢ أوجد المتتابعة وبين أنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدودها وأوجد ذلك المجموع. «(٨١ ، ٢٧ ، ٩ ، .....) ، ١٢١,٥»

٢٠ $(ح_ن)$ متتابعة هندسية فيها : $ح_١ + ح_٤ = ٧٠$ ، $ح_٢ + ح_٣ = ٦٠$ أثبت أنه : توجد متتابعتان ، وأنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود إحداهما ، وأوجد هذا المجموع بدءًا من حدها الأول. «١٦٢»

Scanned by CamScanner

٢١ متتابعة هندسية حاصل ضرب الحدود الثلاثة الأولى منها = ٦٤ ومجموع حدودها الثانى والثالث والرابع = ٧ أثبت أنه توجد متتابعتان يمكن جمع إحداهما إلى ∞ وأوجد هذا المجموع.

«١٦»

---

٢٢ متتابعة هندسية مجموع حدودها إلى ∞ يساوى ٤ ومجموع مكعبات حدودها إلى ∞ يساوى ١٩٢ فما هى المتتابعة ؟

«(٦ ، -٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، .....)»

---

٢٣ متتابعة هندسية غير منتهية مجموع حدودها إلى ∞ يساوى ١٨ ومجموع مربعات تلك الحدود إلى ∞ يساوى ١٠٨ أوجد المتتابعة.

«(٩ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، .....)»

---

٢٤ إذا كان مجموع الثلاثة حدود الأولى من متتابعة هندسية ١٤ ومجموع مربعاتها ٨٤ أثبت أنه توجد متتابعتان وأنه يمكن إيجاد مجموع إحداهما إلى ما لا نهاية وأوجد هذا المجموع.

«١٦»

---

٢٥ **اكتشف الخطأ :**

(١) يمكن إيجاد مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية عندما تكون $|ر| \geq ١$

(٢) مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ...) أكبر من ضعف حدها الأول.

---

٢٦ يتناقص إنتاج بئر بترول سنويًا بمعدل ٥٪ عن إنتاج السنة السابقة له مباشرة فإذا كان إنتاج البترول فى السنة الأولى ٤٨٠٠٠ برميل فأوجد أقصى ما يمكن إنتاجه من هذا البئر.

«٩٦٠٠٠٠ برميل»

---

٢٧ **الربط بالفيزياء :** دحرجت كرة صغيرة من الحديد على مستوى أفقى فإذا قطعت الكرة فى الدقيقة الأولى ٢٥ مترًا ثم بدأت تقطع ٦٠ ٪ فقط فى كل دقيقة تالية من المسافة التى قطعتها فى الدقيقة السابقة. فأوجد المسافة الكلية التى قطعتها الكرة حتى تقف.

«$\frac{١٢٥}{٢}$ متر»

---

٢٨ كرة من المطاط تسقط من ارتفاع ١٠ أمتار على الأرض وترتد رأسيًا إلى نصف الارتفاع الذى سقطت منه فى كل مرة ترتد فيها لأعلى ، أوجد مجموع المسافات التى قطعتها الكرة حتى تسكن.

«٣٠ متر»

Scanned by CamScanner

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① متتابعة هندسية غير منتهية فيها الحدان الأول و الثانى عددان صحيحان موجبان مجموعهما = ٣ فإن : $ح_{\infty}$ = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٦٤ (د) ١٠٢٤

② مجموع المتسلسلة (جتا ٦٠° + جتا^{٢} ٦٠° + جتا^{٣} ٦٠° + ...) تساوى .....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) ١

③ إذا كان : $\sum_{ن=٠}^{\infty} \frac{أ}{(٤)^{ن}}$ = ١٦ فإن : أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

④ متتابعة هندسية لا نهائية حدها الأول = س ومجموع حدودها = ٥ فإن : .....

(أ) س ≤ ١٠ (ب) ٠ < س < ١٠

(جـ) س < -١٠ (د) -١٠ < س < ٠

⑤ متتابعة هندسية عدد حدودها ٢ ن وأساسها ر فإن النسبة بين مجموع حدودها الفردية الرتبة إلى مجموع حدودها الزوجية الرتبة تساوى .....

(أ) $\frac{١}{ر}$ (ب) $\frac{١}{ر^{٢}}$ (جـ) $ر^{٢}$ (د) $\frac{ن}{ر}$

⑥ المتتابعة الهندسية (١ ، س ، س^{٢} ، ....) حيث |س| < ١ فإن النسبة بين الحد النونى ($ح_{ن}$) فى هذه المتتابعة ومجموع الحدود التالية له إلى ∞ تساوى .....

(أ) $\frac{س}{س + ١}$ (ب) $\frac{س^{ن}}{س - ١}$ (جـ) $\frac{١ - س}{س}$ (د) $\frac{س}{١ - س}$

⑦ متتابعة هندسية فيها $ح_{١٨}$ الأولى - $ح_{١٠}$ الأولى = س ، $ح_{١٥}$ الأولى - $ح_{٧}$ الأولى = ص فإن : ر = ...

(أ) $\frac{س}{ص}$ (ب) $\sqrt{\frac{س}{ص}}$ (جـ) $\sqrt[٣]{\frac{س}{ص}}$ (د) $\sqrt{\frac{ص}{س}}$

Scanned by CamScanner

⑧ متتابعة هندسية حدها الأول (أ) واساسها (ر) وعدد حدودها (ن) ومجموع حدودها (ح) فإن مجموع مقلوبات هذه الحدود = ...

(أ) $\frac{ح}{أ\,ر^{ن-١}}$ (ب) $\frac{أ\,ح}{ر^{ن-١}}$ (ج) $\frac{٢\,ح}{أ\,ر^{ن-١}}$ (د) $\frac{ح}{أ^{٢}\,ر^{ن-١}}$

⑨ متتابعة هندسية حدها الأول (أ) وحدها الأخير (ل) وعدد حدودها (ن) فإن حاصل ضرب جميع حدودها هو .....

(أ) $\left(\frac{أ}{ل}\right)^{\frac{ن}{٢}}$ (ب) $(أ\,ل)^{ن}$ (ج) $أ\,(ل)^{\frac{ن}{٢}}$ (د) $(أ\,ل)^{\frac{ن}{٢}}$

⑩ إذا كان : $س = \sum_{ن=٠}^{\infty} جتا^{٢}\,ن\,هـ$ ، $ص = \sum_{ن=٠}^{\infty} جا^{٢}\,ن\,هـ$ فإن : .....

(أ) $س\,ص = ١$ (ب) $س\,ص = س + ص$

(ج) $س + ص = ١$ (د) $س = ص$

Scanned by CamScanner

الوحدة 2

التباديل والتوافيق

الدرس 1 مبدأ العد - التباديل.

الدرس 2 التوافيق.

Scanned by CamScanner

الدرس 1

مبدأ العد - التباديل

مبدأ العد الأساسى

تعريف

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_1$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثان $م_2$ طريقة وعدد طرق إجراء عمل ثالث $م_3$ طريقة وهكذا ...

فإن : عدد طرق إجراء هذه الأعمال معًا = $م_1 \times م_2 \times م_3 \times ... \times م_ن$

مثال ١

بكم طريقة يمكن لشخص الدخول والخروج من محل له ثلاثة أبواب مرقمة بالأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ؟

الحل

عدد طرق الدخول = ٣ طرق (يمكن الدخول من الباب رقم ١ أو ٢ أو ٣ أى بثلاث طرق)

عدد طرق الخروج = ٣ طرق (يمكن الخروج من الباب رقم ١ أو ٢ أو ٣ أى بثلاث طرق)

وبحسب مبدأ العد يكون :

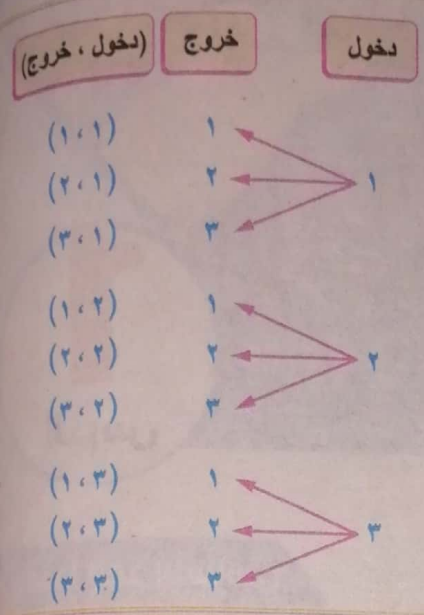
عدد طرق إجراء عمليتى الدخول والخروج معًا = عدد طرق الدخول × عدد طرق الخروج

= ٣ × ٣ = ٩ طرق

Scanned by CamScanner

ملاحظة

مبدأ العد ينتج لنا عدد الطرق التى يمكن بها إجراء عمليتين أو أكثر معًا ويمكن توضيح هذه الطرق باستخدام المخطط البيانى المقابل الذى يعرف باسم الشجرة البيانية :



لاحظ أن :

(١ ، ٢) يعبر عن دخول من الباب ١ وخروج من الباب ٢ بينما (٢ ، ١) يعبر عن دخول من الباب ٢ وخروج من الباب ١ ولذلك فإن : (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) يعبران عن طريقتين مختلفتين للدخول والخروج.

مبدأ العد المشروط

مثال ٢

فى المثال السابق إذا أضفنا شرطًا ألا يخرج الشخص من نفس الباب الذى دخل منه فكم يكون عدد طرق دخول وخروج هذا الشخص ؟

الحل

عدد طرق الدخول = ٣ طرق (يمكن الدخول من الباب رقم ١ أو ٢ أو ٣ أى بثلاث طرق)

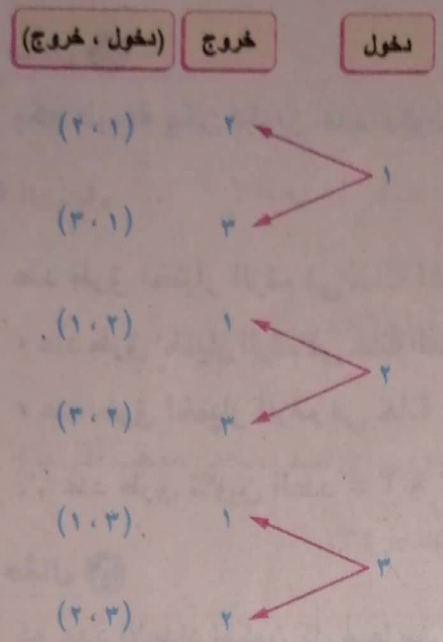
عدد طرق الخروج = ٢ طريقة (يمكن الخروج من بابين فقط بعد استبعاد الباب الذى دخل منه)

وبحسب مبدأ العد يكون :

Scanned by CamScanner

عدد طرق إجراء عمليتى الدخول والخروج معًا = ٣ × ٢ = ٦ طرق

والشجرة البيانية المقابلة توضح طرق الدخول والخروج.



مثال ٣

إذا كان لدى شخص ٤ بدل ، ٦ قمصان ، ٣ أربطة عنق.

بكم طريقة يمكن لهذا الشخص الظهور فى زى مكون من بدلة وقميص ورابطة عنق ؟

الحل

عدد طرق اختيار البدلة = ٤ طرق ، عدد طرق اختيار القميص = ٦ طرق.

، عدد طرق اختيار رابطة العنق = ٣ طرق.

∴ عدد طرق اختيار الزى = ٤ × ٦ × ٣ = ٧٢ طريقة.

مثال ٤

كم عدد مكون من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ إذا كان :

١ غير مسموح بتكرار أى رقم فى العدد. ٢ مسموحًا بتكرار الأرقام فى العدد.

الحل

١ عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٥ طرق.

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٤ طرق.

(لاحظ استبعاد الرقم الذى تم اختياره فى خانة العشرات)

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة.

٢ عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٥ طرق.

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٥ طرق.

(لاحظ عدم استبعاد الرقم الذى تم اختياره فى خانة العشرات)

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٥ × ٥ = ٢٥ طريقة.

Scanned by CamScanner

مثال ٥

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣} ؟

الحل

عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٣ طرق (لاحظ استبعاد العدد صفر من خانة المئات)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٣ طرق (لاحظ استبعاد الرقم المختار فى خانة المئات)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٢ طريقة

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ طريقة.

مثال ٦

كم عدد الأعداد المكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٧ ، ٨} بحيث يكون العدد أصغر من ٨٠٠ ؟

الحل

لاحظ أنه لكى يكون العدد أصغر من ٨٠٠ يجب اختيار الرقم فى خانة المئات أقل من ٨

∴ عدد طرق اختيار الرقم فى خانة المئات = ٣ طرق (لاحظ استبعاد العدد ٨ من الاختيار)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات = ٣ طرق

(لاحظ اختيارنا للعدد ٨ والعددان الباقيان من الاختيار السابق)

، عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٢ طريقة

∴ عدد طرق تكوين العدد الأصغر من ٨٠٠ = ٣ × ٣ × ٢ = ١٨ طريقة.

مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب ن يكتب على الصورة |ن ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوى ن

أى أن |ن = ن (ن − ١) × (ن − ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١

ويكون عدد عوامل المضروب = ن من العوامل

فمثلًا :

- |٥ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ (خمسة عوامل)
- |٩٩ = ٩٩ × ٩٨ × ٩٧ × ... × ٣ × ٢ × ١ (٩٩ عاملًا)

Scanned by CamScanner

ملاحظات

١ أصغر عوامل $\lfloor ن$ يساوى واحد وأكبرهم = ن

٢ $\lfloor ٠ = \lfloor ١ = ١$ ومن ذلك إذا كان $\lfloor ن = ١$ فإن : ن = صفر أ، ن = ١

٣ يمكن كتابة مضروب العدد بدلالة مضروب عدد أقل منه أى أن :

$\lfloor ن = ن \lfloor ن - ١ = ن (ن - ١) \lfloor ن - ٢ = \ldots$ حيث $ن \in ص^+$

فمثلًا : $\lfloor ٥ = ٥ \lfloor ٤ = ٥ \times ٤ \lfloor ٣ = \ldots$

٤ مضروب أى عدد صحيح موجب يقبل القسمة على مضروب أى عدد صحيح موجب أقل منه

فمثلًا : $\frac{\lfloor ٥}{\lfloor ٤} = \frac{٥ \lfloor ٤}{\lfloor ٤} = ٥$ ، $\frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ١٠} = \frac{١٢ \times ١١ \lfloor ١٠}{\lfloor ١٠} = ١٣٢$

مثال ٧

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة كلاً مما يأتى :

١ $\frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ١٣}$ ٢ $\lfloor ٥ - \lfloor ٤ - \lfloor ٣$ ٣ $\frac{\lfloor ٨}{\lfloor ٦} - \frac{\lfloor ٧}{\lfloor ٥}$

الحل

١ $\frac{\lfloor ١٢}{\lfloor ١٣} = \frac{\lfloor ١٢}{١٣ \lfloor ١٢} = \frac{١}{١٣}$

٢ $\lfloor ٥ - \lfloor ٤ - \lfloor ٣ = ٥ \times ٤ \lfloor ٣ - ٤ \lfloor ٣ - \lfloor ٣$

$= ٢٠ \lfloor ٣ - ٤ \lfloor ٣ - \lfloor ٣ = ١٥ \lfloor ٣ = ١٥ \times (٣ \times ٢ \times ١) = ٩٠$

٣ $\frac{\lfloor ٨}{\lfloor ٦} - \frac{\lfloor ٧}{\lfloor ٥} = \frac{٨ \times ٧ \lfloor ٦}{\lfloor ٦} - \frac{٧ \times ٦ \lfloor ٥}{\lfloor ٥} = ٥٦ - ٤٢ = ١٤$

ملاحظة

يمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد مضروب العدد بكتابة العدد ثم الضغط على SHIFT ثم x^{-1} (x!) ثم =

فمثلًا : لحساب $\lfloor ٥$ نضغط 5 ثم SHIFT ثم x^{-1} (x!) ثم = فيظهر الناتج ١٢٠

Scanned by CamScanner

مثال ٨

أوجد قيمة ن إذا كان : ١ $\underline{|ن} = ٧٢٠$

٢ $\frac{\underline{|ن - ١}}{\underline{|ن - ٣}} = ٣٠$

٣ $ن \underline{|٢ن - ١} = ١٢$

٤ $\frac{١}{\underline{|ن}} + \frac{٢}{\underline{|ن + ١}} - \frac{٥٦}{\underline{|ن + ٢}} = ٠$

الحل

١ $\because \underline{|ن} = ٧٢٠$

$\therefore \underline{|ن} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$

$\therefore \underline{|ن} = \underline{|٦}$

$\therefore ن = ٦$

٢ $\frac{\underline{|ن - ١}}{\underline{|ن - ٣}} = ٣٠$

$\therefore \frac{(ن - ١)(ن - ٢)\underline{|ن - ٣}}{\underline{|ن - ٣}} = ٣٠$

$\therefore (ن - ١)(ن - ٢) = ٣٠$

$\therefore (ن - ١)(ن - ٢) = ٦ \times ٥$

$\therefore ن - ١ = ٦$

$\therefore ن = ٧$

لاحظ أنه :

لمعرفة العدد الذى مضروبه	٧٢٠ ÷ ١ = ٧٢٠
= ٧٢٠ نبدأ بقسمة ٧٢٠ ÷ ١	٧٢٠ ÷ ٢ = ٣٦٠
ثم نقسم العدد الناتج ÷ ٢	٣٦٠ ÷ ٣ = ١٢٠
ثم على ٣ ثم على ٤ وهكذا	١٢٠ ÷ ٤ = ٣٠
إلى أن نصل إلى العدد ١ من	٣٠ ÷ ٥ = ٦
ناتج القسمة :	٦ ÷ ٦ = ١

٣ $\because ن \underline{|٢ن - ١} = ١٢$ (بضرب الطرفين × ٢)

$\therefore ٢ن \underline{|٢ن - ١} = ٢٤$

$\therefore \underline{|٢ن} = ٢٤$

$\therefore \underline{|٢ن} = \underline{|٤}$

$\therefore ٢ن = ٤$

$\therefore ن = ٢$

٤ $\because \frac{١}{\underline{|ن}} + \frac{٢}{\underline{|ن + ١}} - \frac{٥٦}{\underline{|ن + ٢}} = ٠$

$\therefore \frac{١}{\underline{|ن}} + \frac{٢}{(ن + ١)\underline{|ن}} - \frac{٥٦}{(ن + ٢)(ن + ١)\underline{|ن}} = ٠$ (بالضرب × $\underline{|ن}$)

$\therefore ١ + \frac{٢}{ن + ١} - \frac{٥٦}{(ن + ٢)(ن + ١)} = ٠$

$\therefore ١ + \frac{٢}{ن + ١} = \frac{٥٦}{(ن + ٢)(ن + ١)}$

$\therefore \frac{ن + ١ + ٢}{ن + ١} = \frac{٥٦}{(ن + ٢)(ن + ١)}$

$\therefore ن + ٣ = \frac{٥٦}{ن + ٢}$

$\therefore (ن + ٣)(ن + ٢) = ٥٦$

$\therefore (ن + ٣)(ن + ٢) = ٨ \times ٧$

$\therefore ن + ٣ = ٨$

$\therefore ن = ٥$

Scanned by CamScanner

الترتيب فى صف - الترتيب فى دائرة

١ ترتيب ن من الأشياء فى صف واحد

الأول	الثانى	الثالث	الرابع	.....	النونى

- عدد طرق اختيار الشىء فى المكان الأول = ن
- عدد طرق اختيار الشىء فى المكان الثانى = (ن − ١)

«لاحظ أن عدد الطرق نقص بمقدار واحد بعد وضع أحد الأشياء فى المكان الأول».

- عدد طرق اختيار الشىء فى المكان الثالث = (ن − ٢) ... وهكذا

إلى أن نصل إلى عدد طرق اختيار الشىء فى المكان النونى = ١

∴ عدد طرق ترتيب ن من الأشياء فى صف واحد

= ن(ن − ١) (ن − ٢) (ن − ٣) ... × ٣ × ٢ × ١ = |ن

أى أن عدد طرق ترتيب ن من الأشياء فى صف واحد = |ن

٢ ترتيب ن من الأشياء على دائرة

حيث إنه ليس للدائرة نقطة بداية أو نقطة نهاية فإن الترتيب يظهر بعد وضع الشىء الأول فى أى مكان على الدائرة ثم :

- اختيار الشىء فى المكان الثانى بطرق عددها (ن − ١)
- اختيار الشىء فى المكان الثالث بطرق عددها (ن − ٢) ... وهكذا

إلى أن نصل إلى عدد طرق اختيار الشىء فى المكان النونى وهو ١

∴ عدد طرق ترتيب ن من الأشياء على دائرة

= (ن − ١) (ن − ٢) (ن − ٣) ... × ٣ × ٢ × ١ = |ن − ١

أى أن عدد طرق ترتيب ن من الأشياء على دائرة = |ن − ١

Scanned by CamScanner

مثال ٩

بكم طريقة يمكن لمجموعة من ٦ أشخاص فى حفل أن يرتبوا أنفسهم بحيث يجلسون :

١ فى صف واحد.

٢ حول مائدة مستديرة.

الحل

١ يمكن للأشخاص الستة أن يجلسوا فى صف بطرق عددها

= $\underline{|٦}$ = ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٧٢٠ طريقة.

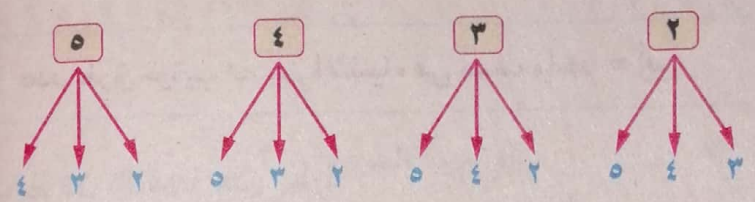
٢ يمكن للأشخاص الستة أن يجلسوا حول مائدة مستديرة بطرق عددها

= $\underline{|٦ - ١}$ = $\underline{|٥}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة.

التباديل

عند تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من الأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

فإن عدد طرق تكوين العدد = عدد طرق اختيار الرقم فى خانة العشرات × عدد طرق اختيار الرقم فى خانة الآحاد = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة



الأعداد هى ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٥ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤

وهذه الأعداد تمثل كل التبديلات الممكنة للأرقام ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ باختيار رقمين منهم فى كل مرة وعدد هذه الأعداد (التبديلات) يرمز له بالرمز $^{٤}ل_{٢}$

وتقرأ (٤ لام ٢) **أى أن :** $^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة.

تعريف

يرمز لعدد تباديل ن من العناصر المتمايزة مأخوذ منها ر من العناصر فى كل مرة بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ حيث :

١ $^{ن}ل_{ر}$ = ن(ن − ١) (ن − ٢) ... (ن − ر + ١) حيث ١ ≤ ر ≤ ن ، ن ، $^{ن}ل_{ر}$ ∈ ص$^{+}$

٢ $^{ن}ل_{ر}$ = ١ عندما ر = ٠

Scanned by CamScanner

فمثلًا :

• $^{٩}ل_{٦}$ = حاصل ضرب ٦ عوامل أكبرهم ٩ وأصغرهم (٩ − ٦ + ١) = ٤ وكل عامل ينقص بمقدار ١ عن سابقه

أى أن : $^{٩}ل_{٦} = ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤$

• $^{ن}ل_{٧} = ن(ن - ١)(ن - ٢) \times ... \times (ن - ٧ + ١)$

$= ن(ن - ١)(ن - ٢) \times ... \times (ن - ٦)$ (٧ عوامل أكبرهم ن وأصغرهم ن − ٦)

ملاحظات

١ $^{ن}ل_{ر} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن - ر}$

فمثلًا : $^{٧}ل_{٣} = \frac{\lfloor ٧}{\lfloor ٧ - ٣} = \frac{\lfloor ٧}{\lfloor ٤}$ ، $^{ن}ل_{ر-١} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن - (ر - ١)} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن - ر + ١}$

٢ $^{ن}ل_{٠} = ١$

الإثبات : $^{ن}ل_{٠} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن - ٠} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن} = ١$ **فمثلًا :** $^{٥}ل_{٠} = ١$ ، $^{(ن-١)}ل_{٠} = ١$

٣ $^{ن}ل_{ن} = \lfloor ن$

الإثبات : $^{ن}ل_{ن} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ن - ن} = \frac{\lfloor ن}{\lfloor ٠} = \frac{\lfloor ن}{١} = \lfloor ن$ **فمثلًا :** $^{٥}ل_{٥} = \lfloor ٥$ ، $^{٣}ل_{٣} = \lfloor ٣$

مثال ١٠

أوجد :

١ $^{٨}ل_{٢}$ | ٢ $^{١٢}ل_{٣}$ | ٣ $^{ن}ل_{٤}$

٤ $^{ن+٢}ل_{٣}$ | ٥ $^{ن-٣}ل_{٥}$ | ٦ $^{ن+١}ل_{ر+١}$

الحل

١ $^{٨}ل_{٢} = ٨ \times ٧ = ٥٦$

٢ $^{١٢}ل_{٣} = ١٢ \times ١١ \times ١٠ = ١٣٢٠$

Scanned by CamScanner

٣ $^{ن}ل_{٤} = ن(ن - ١)(ن - ٢)(ن - ٣)$

٤ $^{ن+٢}ل_{٣} = (ن + ٢)(ن + ١)ن$

٥ $^{ن-٣}ل_{٥} = (ن - ٣)(ن - ٤)(ن - ٥)(ن - ٦)(ن - ٧)$

٦ $^{ن+١}ل_{ر+١} = (ن + ١)(ن)(ن - ١)(ن - ٢) \dots ((ن + ١) - (ر + ١) + ١)$

$= (ن + ١)(ن)(ن - ١)(ن - ٢) \dots (ن + ١ - ر - ١ + ١)$

$= (ن + ١)(ن)(ن - ١)(ن - ٢) \dots (ن - ر + ١)$

ملاحظة (استخدام الآلة الحاسبة)

يمكن استخدام الآلة الحاسبة فى إيجاد ناتج التبديل كما يلى :

١ $^{٧}ل_{٥} = ٢٥٢٠$

إبدأ ← 7 SHIFT × 5 = 2520

٢ $^{٤}ل_{٤} = \underline{|٤} = ٢٤$

إبدأ ← 4 SHIFT x^{-1} = 24

مثال ١١

إذا كان : $^{١٣}ل_{ر} = ١٧١٦٠$ فأوجد قيمة : ر ثم أوجد : $^{٢ر+١}ل_{٣}$

الحل

نوجد مجموعة من العوامل المتتالية التى أكبرها ١٣ وذلك بقسمة العدد ١٧١٦٠ على ١٣ ثم بقسمة الناتج على ١٢ ثم بقسمة الناتج على ١١ وهكذا حتى نصل إلى الواحد الصحيح.

فنجد أن $^{١٣}ل_{٤} = ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠ = ١٧١٦٠$

١٧١٦٠ ÷ ١٣ = ١٣٢٠
١٣٢٠ ÷ ١٢ = ١١٠
١١٠ ÷ ١١ = ١٠
١٠ ÷ ١٠ = ١

$\therefore$ $^{١٣}ل_{ر} = {}^{١٣}ل_{٤}$

$\therefore$ ر = ٤

$\therefore$ $^{٢ر+١}ل_{٣} = {}^{٢(٤)+١}ل_{٣} = {}^{٩}ل_{٣} = ٩ \times ٨ \times ٧ = ٥٠٤$

Scanned by CamScanner

مثال ١٢

إذا كان : ${}^{٢ن+١}ل_{٤} : {}^{٢ن-١}ل_{٣} = ٧٢ : ٥$ فأوجد قيمة : ${}^{٢ن}ل_{ن}$

الحل

$\because {}^{٢ن+١}ل_{٤} = \frac{|\underline{٢ن+١}}{|\underline{٢ن+١-٤}} = \frac{|\underline{٢ن+١}}{|\underline{٢ن-٣}}$

، $\because {}^{٢ن-١}ل_{٣} = \frac{|\underline{٢ن-١}}{|\underline{٢ن-١-٣}} = \frac{|\underline{٢ن-١}}{|\underline{٢ن-٤}}$

$\because {}^{٢ن+١}ل_{٤} : {}^{٢ن-١}ل_{٣} = ٧٢ : ٥ \quad \therefore \frac{|\underline{٢ن+١}}{|\underline{٢ن-٣}} \div \frac{|\underline{٢ن-١}}{|\underline{٢ن-٤}} = \frac{٧٢}{٥}$

$\therefore \frac{|\underline{٢ن+١}}{|\underline{٢ن-٣}} \times \frac{|\underline{٢ن-٤}}{|\underline{٢ن-١}} = \frac{٧٢}{٥} \qquad \therefore \frac{(٢ن+١)\,٢ن\,|\underline{٢ن-١}}{(٢ن-٣)\,|\underline{٢ن-٤}} \times \frac{|\underline{٢ن-٤}}{|\underline{٢ن-١}} = \frac{٧٢}{٥}$

$\therefore \frac{٤ن^{٢}+٢ن}{٢ن-٣} = \frac{٧٢}{٥} \qquad \therefore ٢٠ن^{٢}+١٠ن = ١٤٤ن-٢١٦$

$\therefore ٢٠ن^{٢}-١٣٤ن+٢١٦ = ٠ \qquad \therefore ١٠ن^{٢}-٦٧ن+١٠٨ = ٠$

$\therefore (ن-٤)(١٠ن-٢٧) = ٠ \qquad \therefore ن = ٤$ أو $ن = ٢,٧$ (مرفوض)

$\therefore {}^{٢ن}ل_{ن} = {}^{٨}ل_{٤} = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ = ١٦٨٠$

مثال ١٣

إذا كان : ${}^{٨}ل_{س} = ٥ \times {}^{٨}ل_{س-١}$ فأوجد قيمة : $\frac{|\underline{س}}{|\underline{س+١}} + \frac{|\underline{س-١}}{|\underline{س}} + \frac{|\underline{س-٣}}{|\underline{س-٢}}$

الحل

$\because {}^{٨}ل_{س} = ٥ \times {}^{٨}ل_{س-١} \qquad \therefore \frac{|\underline{٨}}{|\underline{٨-س}} = ٥ \times \frac{|\underline{٨}}{|\underline{٨-(س-١)}}$

$\therefore \frac{|\underline{٨}}{|\underline{٨-س}} = \frac{٥\,|\underline{٨}}{|\underline{٩-س}} \qquad \therefore \frac{|\underline{٨}}{|\underline{٨-س}} \times \frac{|\underline{٩-س}}{|\underline{٨}} = ٥$

$\therefore \frac{(٩-س)\,|\underline{٨-س}}{|\underline{٨-س}} = ٥ \qquad \therefore ٩-س = ٥ \qquad \therefore س = ٤$

$\therefore \frac{|\underline{س}}{|\underline{س+١}} + \frac{|\underline{س-١}}{|\underline{س}} + \frac{|\underline{س-٣}}{|\underline{س-٢}} = \frac{|\underline{٤}}{|\underline{٥}} + \frac{|\underline{٣}}{|\underline{٤}} + \frac{|\underline{١}}{|\underline{٢}} = \frac{|\underline{٤}}{٥\,|\underline{٤}} + \frac{|\underline{٣}}{٤\,|\underline{٣}} + \frac{١}{٢}$

$= \frac{١}{٥} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٢} = \frac{١٩}{٢٠}$

Scanned by CamScanner

مثال ١٤

إذا كان : $^{م+ن}ل_{٣} = ٢١٠$ ، $^{م-ن}ل_{٢} = ٦$ فأوجد قيمتى : م ، ن

الحل

$\because$ $^{م+ن}ل_{٣} = ٢١٠$ $\therefore$ $^{م+ن}ل_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ = {}^{٧}ل_{٣}$ $\therefore$ م + ن = ٧ (١)

، $\because$ $^{م-ن}ل_{٢} = ٦$ $\therefore$ $^{م-ن}ل_{٢} = ٣ \times ٢ = {}^{٣}ل_{٢}$ $\therefore$ م − ن = ٣ (٢)

بجمع (١) ، (٢) : $\therefore$ ٢ م = ١٠ $\therefore$ م = ٥

وبالتعويض فى (١) : $\therefore$ ن = ٢

مثال ١٥

أثبت أن : $^{ن}ل_{ر} + ر \times {}^{ن}ل_{ر-١} = {}^{ن+١}ل_{ر}$

الحل

$\because$ $^{ن}ل_{ر} + ر \times {}^{ن}ل_{ر-١}$

$$= \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}} + ر \times \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر+١}} = \left(\frac{١}{\underline{|ن-ر}} + \frac{ر}{\underline{|ن-ر+١}}\right)\underline{|ن}$$

$$= \left(\frac{١}{\underline{|ن-ر}} + \frac{ر}{(ن-ر+١)\underline{|ن-ر}}\right)\underline{|ن} = \left(\frac{ن-ر+١+ر}{(ن-ر+١)\underline{|ن-ر}}\right)\underline{|ن}$$

$$= \frac{(ن+١)\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر+١}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-ر+١}} \quad (١)$$

، $\because$ $^{ن+١}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن+١-ر}} = \frac{\underline{|ن+١}}{\underline{|ن-ر+١}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $^{ن}ل_{ر} + ر\,{}^{ن}ل_{ر-١} = {}^{ن+١}ل_{ر}$

Scanned by CamScanner

مثال ١٦

أوجد أقل قيمة للعدد ν تحقق المتباينة : ${}^{\nu}ل_{٧} > {}^{\nu}ل_{٦}$

الحل

$\because {}^{\nu}ل_{٧} > {}^{\nu}ل_{٦}$ $\therefore \frac{{}^{\nu}ل_{٧}}{{}^{\nu}ل_{٦}} > ١$ (١)

، $\because {}^{\nu}ل_{٧} = \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|\nu - ٧}}$ ، ${}^{\nu}ل_{٦} = \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|\nu - ٦}}$ وبالتعويض فى (١) :

$\therefore \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|\nu - ٧}} \times \frac{\underline{|\nu - ٦}}{\underline{|\nu}} > ١$ $\therefore \frac{\underline{|\nu - ٦}}{\underline{|\nu - ٧}} > ١$

$\therefore \frac{(\nu - ٦)\,\underline{|\nu - ٧}}{\underline{|\nu - ٧}} > ١$ $\therefore \nu - ٦ > ١$

$\therefore \nu > ٧$ $\therefore \nu \in \{٨ ، ٩ ، ١٠ ، ...\}$

$\therefore$ أقل قيمة للعدد ν تحقق المتباينة هى $\nu = ٨$

مثال ١٧

من مجموعة الأرقام $\{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧\}$ أوجد :

١ كم عددًا مكونًا من ٤ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٢ كم عددًا مكونًا من ٧ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٣ كم عددًا رقم آحاده ٤ ويتكون من خمسة أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٤ كم عددًا فرديًا مكون من ٧ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

٥ كم عددًا أكبر من ٤٠٠ ويتكون من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه.

الحل

بفرض أن : $س = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧\}$ $\therefore \nu(س) = ٧$

١ عدد الأعداد $= {}^{٧}ل_{٤} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠$ عددًا.

٢ عدد الأعداد $= {}^{٧}ل_{٧} = \underline{|٧} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٥٠٤٠$ عددًا.

Scanned by CamScanner

٣ ∵ رقم الآحاد = ٤

∴ عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ١ طريقة

ويتبقى ٦ عناصر (أرقام) نختار منهم ٤ أرقام لتكوين باقى العدد

∴ عدد الأعداد = ١ × $^{٦}ل_{٤}$ = ١ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ = ٣٦٠ عددًا.

٤ لكى يكون العدد فرديًا يجب أن يكون رقم آحاده عددًا فرديًا أى من الأرقام ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧

∴ عدد طرق اختيار رقم الآحاد = $^{٤}ل_{١}$ = ٤ طرق

ويتبقى لنا من عناصر س ٦ أرقام نختار منهم ٦ أرقام لتكوين باقى العدد

∴ عدد الأعداد = ٤ × $^{٦}ل_{٦}$ = ٤ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٨٨٠ عددًا.

٥ لكى يكون العدد أكبر من ٤٠٠ يجب أن يكون الرقم المختار فى خانة المئات أكبر من أو يساوى ٤ أى من الأرقام ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧

∴ عدد طرق اختيار رقم المئات = $^{٤}ل_{١}$ = ٤ طرق

ويتبقى لنا من عناصر س ٦ أرقام نختار منهم رقمين بخانتى الآحاد والعشرات

∴ عدد الأعداد = ٤ × $^{٦}ل_{٢}$ = ٤ × ٦ × ٥ = ١٢٠ عددًا.

Scanned by CamScanner

تمارين 7

على مبدأ العد - التباديل

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\lfloor ٠ + \lfloor ١ + \lfloor ٢ + \lfloor ٣ =$ .....

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ٩ (د) ١٠

(٢) ${}^{٩}ل_{٠} + {}^{٧}ل_{١} + {}^{٣}ل_{٣} =$ .....

(أ) ١٤ (ب) ٢٥ (جـ) ٩٦ (د) ١٨٩

(٣) إذا كان : $\frac{١}{٢} \lfloor ن = ١$ فإن : $\lfloor ن - ٢ =$ .....

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

(٤) $\frac{\lfloor ن}{ن} =$ .....

(أ) ١ (ب) $\lfloor ن$ (جـ) $\lfloor ن - ١$ (د) $\frac{ن}{ن - ١}$

(٥) ${}^{ن}ل_{٢}$ يمكن أن تساوى .....

(أ) ١٥ (ب) ١٦ (جـ) ١٧ (د) ٢٠

(٦) إذا كان : ${}^{٥}ل_{ر} = ٦٠$ فإن : $ر =$ .....

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٥

(٧) إذا كان : ${}^{ن}ل_{٣} = ١٢٠$ فإن : $ن =$ .....

(أ) ٦ (ب) ٥ (جـ) ٤ (د) ٣

(٨) مجموعة الحل فى ح للمعادلة : $\lfloor س = ١$ هى .....

(أ) $\{١\}$ (ب) $\{٠\}$ (جـ) $\{٠ ، ١\}$ (د) $\{١ ، -١\}$

(٩) إذا كان : $\lfloor ن = ٢٤$ فإن : $ن =$ .....

(أ) ٢٤ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ١٢

Scanned by CamScanner

(١٠) $^{٨}ل_{٦}$ = ...

(أ) ٨ × ٧ × ٦ (ب) ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣

(جـ) $\frac{|٨}{|٦}$ (د) |٦

(١١) عدد الأزواج المرتبة (أ ، ب) التى يمكن تكوينها من عناصر المجموعة {١ ، ٢ ، ٣} حيث أ ≠ ب هو .....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ٩

(١٢) عدد طرق ترتيب ٥ أشخاص فى دائرة يساوى .....

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢٤ (د) ١٢٠

(١٣) عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد فى صف يساوى .....

(أ) ١ (ب) ٤ + ٤ (جـ) ٤ × ٤ (د) ٤ × ٣ × ٢ × ١

(١٤) إذا أراد رجل شراء سيارة من بين الموديلات {أوبل – كيا – هوندا} وأراد أن يختار من بين الألوان {أبيض ، أسود ، فضى ، أحمر} بكم طريقة يمكن اختيار السيارة ؟

(أ) ٧ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ٢٤

(١٥) عدد الأعداد التى كل منها مكون من ثلاثة أرقام مختلفة من الأرقام ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ هو .....

(أ) ٩ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٦٤

(١٦) لجنة مؤلفة من ١٢ عضوًا ، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب لهذه اللجنة ؟

(أ) ٢ (ب) ٢٣ (جـ) ٦٦ (د) ١٣٢

(١٧) عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع يساوى .....

(أ) ٤ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ٢٤

(١٨) عدد الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من مجموعة الأرقام {٥ ، ٣ ، ٠ ، ٤} يساوى .....

(أ) ٣ × ٢ (ب) ٤ × ٢ (جـ) ٣ × ٣ (د) ٣ × ٤

(١٩) عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦} يساوى .....

(أ) ٨ × ٦ × ٣ (ب) ٤ × ٣ × ٣ (جـ) ٤ × ٣ × ٢ (د) ٢ × ٣ × ١

Scanned by CamScanner

(٢٠) عدد طرق تكوين عدد أولى مكون من ٣ أرقام مختلفة من مجموعة الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ هو .....

(أ) ٦ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) صفر

(٢١) عدد طرق تكوين العدد ١٤٥٣ من الأعداد ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ هو .....

(أ) ٢٤ (ب) ١٦ (جـ) ١ (د) صفر

(٢٢) عدد طرق تكوين عدد مكون من ٣ أرقام من بين ٦ أرقام غير الصفر هو .....

(أ) ٦ × ٥ × ٤ (ب) ٦ + ٥ + ٤ (جـ) ٦ × ٦ × ٦ (د) ٣ × ٢ × ١

(٢٣) $\frac{|\underline{س - ٢}}{|\underline{س - ٣}}$ = ...

(أ) س − ٢ (ب) س − ٣ (جـ) س (د) س − ١

(٢٤) إذا كان : $^{ن}ل_{ن}$ = ٥٠٤٠ فإن : ن = ...

(أ) ١٠ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٣

(٢٥) إذا كان : $|\underline{ن + ١}$ = ٣٠ $|\underline{ن - ١}$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٢٩ (د) ٣٠

(٢٦) إذا كانت : س = {س : س ∈ ط ، ١ ≤ س ≤ ٥}

وكانت : ص = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب} فإن عدد عناصر ص .....

(أ) ٧ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

(٢٧) (ن^{٢} + ٣ ن + ٢) $|\underline{ن}$ = $|\underline{.....}$

(أ) ن^{٢} (ب) ن + ١ (جـ) ن + ٢ (د) ن (ن + ٢)

(٢٨) إذا كان : ن^{٢} + ٩ ن + ٢٠ = $\frac{|\underline{ن + ٥}}{س}$ فإن : س = ...

(أ) ن + ٣ (ب) $|\underline{ن + ٣}$ (جـ) $|\underline{ن + ٤}$ (د) $^{ن + ٥}ل_{٢}$

(٢٩) مجموعة حل المعادلة $\frac{|\underline{س}}{١٠}$ = $^{س - ١}ل_{س - ٣}$ هى .....

(أ) {٥} (ب) {٦} (جـ) {٧} (د) {٨}

Scanned by CamScanner

٢ أوجد قيمة ن التى تحقق كلاً مما يأتى :

(١) $\lfloor \text{ن} = ٧٢٠$

(٢) $^{١٥}\text{ل}_{\text{ن}} = ٢٧٣٠$

(٣) $^{\text{ن}}\text{ل}_{٣} = ٥٠٤$

(٤) $^{(\text{ن}-١)}\text{ل}_{٤} = ١٢٠$

(٥) $^{\text{ن}}\text{ل}_{٠} + {}^{\text{ن}}\text{ل}_{١} + {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٢} = ٥٠$

(٦) $\lfloor \text{ن} - ٤ = ١٢٠$

(٧) $\text{ن} \lfloor ٢\text{ن} - ١ = ١٢$

(٨) $\frac{\lfloor \text{ن} + ١}{\lfloor \text{ن}} = ٥$

٣ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $\lfloor \text{ن} - ٥ = ١$ «{٥ ، ٦}»

(٢) $\frac{\lfloor \text{ن} + ١}{\lfloor \text{ن} - ١} = ٤٢$ «{٦}»

(٣) $١٢ \times \lfloor \text{ن} = \lfloor \text{ن} + ٢$ «{٢}»

(٤) $\lfloor \text{ن} = ٣٠ \lfloor \text{ن} - ٢$ «{٦}»

٤ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ل}_{٤} = ١٤ \times {}^{\text{ن}-٢}\text{ل}_{٣}$ فأوجد قيمة : ن «٧ أو ٨»

(٢) إذا كان : $^{٥}\text{ل}_{\text{ر}} = ٢ \times {}^{٦}\text{ل}_{\text{ر}-١}$ فأوجد قيمة : ر «٣»

(٣) إذا كان : $١٥ \times {}^{\text{ن}}\text{ل}_{٠} \lfloor \text{س} = \lfloor ١٥$ فما قيمة : $\lfloor \text{س} - ١٤$ «١»

(٤) إذا كان : $^{\text{ن}-١}\text{ل}_{٣} : {}^{\text{ن}+١}\text{ل}_{٣} = ٥ : ١٢$ فأوجد قيمة : $\lfloor \text{ن} - ٣$ «١٢٠»

(٥) إذا كان : $\lfloor \frac{١}{٢}\text{ن} = ١٢٠$ فأوجد قيمة : $^{\text{ن}}\text{ل}_{٣}$ «٧٢٠»

(٦) إذا كان : $^{٢\text{ن}+١}\text{ل}_{\text{ن}-١} : {}^{٢\text{ن}-١}\text{ل}_{\text{ن}} = ٣ : ٥$ فما قيمة : ن «٤»

(٧) إذا كان : $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = ٦٠٤٨٠٠$ ، $\lfloor \text{ر} = ٥٠٤٠$ فأوجد قيمة : ن ، ر

ثم أوجد قيمة : $^{\text{ن}+\text{ر}}\text{ل}_{\text{ن}-\text{ر}}$ «١٠ ، ٧ ، ٤٠٨٠»

(٨) إذا كان العامل الأوسط فى مفكوك $^{\text{ن}}\text{ل}_{١١}$ يساوى ١٥ فأوجد قيمة : ن «٢٠»

(٩) إذا كان : $\frac{\lfloor \text{ن} - ٣}{\lfloor ٣} = \frac{\lfloor ٥}{\text{ن} - ٢}$ فأوجد قيمة : $^{\text{ن}}\text{ل}_{٣}$ «٣٣٦»

٥ أثبت أن :

(١) $\frac{\lfloor \text{ن} + ١}{\lfloor \text{ن} - ١} - \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ن} - ٢} = ٢\text{ن}$

(٢) $\frac{\lfloor \text{ن} + ٣}{\lfloor \text{ن}} = (\text{ن} + ٣)\ {}^{\text{ن}+٢}\text{ل}_{٢}$

Scanned by CamScanner

③ $\frac{١}{\text{ن}!} - \frac{١}{(\text{ن}+١)!} + \frac{١}{(\text{ن}+٢)!} = \frac{\text{ن}+١}{(\text{ن}+٢)\,\text{ن}!}$

④ $\frac{٢!}{٦!} + \frac{٣!}{٧!} + \frac{٤!}{٨!} = \frac{٢٣}{٧!}$

⑤ $\text{ل}^{\text{ن}+١}_{\text{ر}+١} = (\text{ن}+١) \times \text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}}$

⑥ $\frac{\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}}}{\text{ر}!} = \frac{\text{ن}}{\text{ر}} \times \frac{\text{ل}^{\text{ن}-١}_{\text{ر}-١}}{(\text{ر}-١)!}$

⑦ $\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}} : \text{ل}^{\text{ن}-١}_{\text{ر}-١} = \text{ن}$ ومن ذلك استنتج قيمة : $\text{ل}^{٩٧}_{٤٠} : \text{ل}^{٩٦}_{٣٩}$ « ٩٧ »

٦ أوجد قيمة ن إذا كان :

① $\frac{١}{\text{ن}!} + \frac{٢}{(\text{ن}+١)!} = \frac{٥٦}{(\text{ن}+٢)!}$ « ٥ »

② $\frac{(\text{ن}+١)!}{(\text{ن}+٢)!} + \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}+١)!} = \frac{١٣}{٤٢}$ « ٥ »

٧ أوجد :

① عدد الطرق المختلفة لجلوس ٥ طلاب على ٧ مقاعد فى صف واحد. « ٢٥٢٠ »

② عدد طرق ترتيب ٩ أشخاص حول مائدة على شكل دائرة. « ٤٠٣٢٠ »

③ عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من عشرة أشخاص. « ٧٢٠ »

④ بكم طريقة يمكن لحسام أن يتناول وجبة ومشروبًا من ثلاث وجبات (كفتة – فراخ – سمك) ومشروبين (عصير – مياه غازية) (مثِّل ذلك بمخطط الشجرة البيانية). « ٦ »

⑤ كم يبلغ عدد الترتيبات التى يمكن أن يتشكل كل منها من خمسة حروف مختلفة من الأبجدية العربية. « ١١٧٩٣٦٠٠ »

⑥ بكم طريقة يمكن تكوين عددًا مكونًا من ثلاث أرقام بحيث يكون رقم الآحاد من العناصر {٣ ، ٧} ورقم العشرات من العناصر {٢ ، ٤ ، ٩} ورقم المئات من العناصر {١ ، ٥} « ١٢ »

⑦ كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ « ١٢ »

⑧ كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {٢ ، ٣ ، ٥} « ٢٧ »

⑨ كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ « ١٦ »

⑩ بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة من الأرقام {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} « ٤٨ »

Scanned by CamScanner

(١١) كم عددًا زوجيًا مكونًا من ٣ أرقام مختلفة يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧} «٢٤»

(١٢) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧} بحيث يكون رقم العشرات زوجيًا. «١٢»

٨ بكم طريقة يمكن تكوين عدد من الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ؟

(١) إذا كان كل عدد يتألف من ٣ أرقام مختلفة. «٢١٠»

(٢) إذا كان كل عدد يتألف من الأرقام جميعًا دون تكرار لأى رقم منها. «٥٠٤٠»

(٣) إذا كان كل عدد يتألف من ٥ أرقام مختلفة ويقبل القسمة على ٢ «١٠٨٠»

(٤) إذا كان كل عدد يتألف من ٤ أرقام مختلفة ورقم آحاده ٧ «١٢٠»

(٥) إذا كان كل عدد يتألف من ٤ أرقام مختلفة ويكون أصغر من ٦٠٠٠ «٣٦٠»

٩ إذا كانت : س = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩}

(١) كم عددًا مكونًا من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٢٠»

(٢) كم عددًا مكونًا من رقمين يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٢٥»

(٣) كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٦٠»

(٤) كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام مختلفة وأصغر من ٥٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٢٤»

(٥) كم عددًا مكونًا من أربعة أرقام مختلفة ورقم آحاده ٢ يمكن تكوينه من هذه الأرقام ؟ «٢٤»

١٠ من مجموعة الحروف {أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و} أوجد :

(١) عدد طرق اختيار حرف واحد. «٦»

(٢) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين مع مراعاة الترتيب. «٣٠»

١١ إذا كانت : س = {س : س عدد طبيعى ، ١ ≤ س ≤ ٧}

، ص = {(أ ، ب) حيث أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب}

فأوجد عدد عناصر كل من : س ، ص «٧ ، ٤٢»

Scanned by CamScanner

١٢ إذا كان : $^{س+ص}ل_{٣} = ٥٠٤$ ، $^{س-ص}ل_{٤} = ١٢٠$ فأوجد قيمة : $^{س}ل_{ص}$ «٤٢»

١٣ حل كلاً من المعادلات الآتية :

(١) $^{س+٢}ل_{٣} = ٤٢ س$ «٥»

(٢) $^{٧}ل_{س} - س \times {}^{٧}ل_{س-١} = ٠$ «٤»

(٣) $\underline{|س - ٣} \times {}^{س}ل_{٣} = ٢٠ \underline{|س - ٢}$ «٥»

(٤) $\underline{|س + ٢} = ١٨٢ \times {}^{س}ل_{١١} \underline{|س - ١١}$ «١٢»

١٤ أوجد مجموعة حل المعادلة : $٣٠ \times {}^{س+٣}ل_{٣} = {}^{س+٥}ل_{٥}$ إذا كانت : $س \in ط$ «{١}»

١٥ إذا كان : $^{ن}ل_{١٥} > {}^{ن}ل_{١٤}$ فأوجد أقل قيمة للعدد : ن تحقق هذه المتباينة. «١٦»

١٦ إذا كان : $^{أ+ب}ل_{٤} = ٨٤٠$ ، $\underline{|أ - ب} = ٦$ فأوجد قيمة كل من : أ ، ب ، $\underline{|٢أ - ٥ب}$

«٥ ، ٢ ، ١»

١٧ إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٢٥٢٠$ ، $\underline{|ر} = ١٢٠$ فأوجد قيمة : $\underline{|٣ر - ٢ن}$ «١»

١٨ إذا كان : $^{ن}ل_{٤} = ١٤ \times {}^{ن-٢}ل_{٣}$ فأوجد قيمة : $\underline{|٣ن - ٢٤}$ «١»

١٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $(ن + ١)(ن + ٢)(ن + ٣) \times ..... \times (٢ن) = ...$

(أ) $\underline{|٢ن - ١}$ (ب) $\frac{\underline{|٢ن}}{\underline{|ن}}$ (جـ) $\underline{|٣ن + ١}$ (د) $\frac{\underline{|٢ن}}{\underline{|ن + ١}}$

(٢) إذا كان : $\underline{|ن} < ١٠٠$ ، $\underline{|ن + ١} > ١٠٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

(٣) $^{ن}ل_{ر} \in$ .....

(أ) $ص^{+}$ (ب) $ح^{+}$ (جـ) ح (د) ط

(٤) إذا كان : $\underline{|ن}$ عدد أولى فإن : ن = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

Scanned by CamScanner

⑤ إذا كان : $\lfloor ن = أ$ فإن : $\lfloor ن - ١ = ...$

(أ) $أ - ن$ (ب) $أ ن$ (جـ) $أ + ن$ (د) $\frac{أ}{ن}$

⑥ إذا كان : $\frac{\lfloor س}{\lfloor ص} = ٨ \times ٧ \times ٦$ فإن : $س + ص = ...$

(أ) ٢١ (ب) ١٤ (جـ) ١٣ (د) ١١

⑦ إذا كان : $\frac{س}{\lfloor ٥} + \frac{س}{\lfloor ٦} = \frac{١}{\lfloor ٧}$ فإن : $س = ...$

(أ) $\frac{١}{٣٠}$ (ب) $\frac{١}{٤٩}$ (جـ) $\frac{١}{٧}$ (د) $\frac{١}{٦}$

⑧ $(\lfloor ن)(\lfloor ن) .....\lfloor ن^{٢}$

(أ) $>$ (ب) $\geq$ (جـ) $\leq$ (د) $=$

⑨ إذا كان : $^{ن}ل_{٥} = {}^{ن}ل_{٤}$ فإن : $ن = ...$

(أ) ٢٠ (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ٥

⑩ إذا كان : $\lfloor ٧ = {}^{٧}ل_{س}$ فإن : $س = ...$

(أ) ٦ أ، ٧ (ب) ٧ (جـ) ١ أ، صفر (د) ٥٠٤٠

٢٠ أثبت أن : ① $\lfloor ٨٠ = ٢^{٤٠} \lfloor ٤٠ (١ \times ٣ \times ٥ \times ... \times ٧٩)$

② $\frac{\lfloor ١٠٠}{\lfloor ٥٠} = ٢^{٥٠} (١ \times ٣ \times ٥ \times ... \times ٩٩)$

③ $\lfloor ٢ن = ٢^{ن} \lfloor ن (١ \times ٣ \times ٥ \times ... \times (٢ن - ١))$

٢١ أثبت أن : $\frac{\lfloor ن}{\lfloor ر \lfloor ن - ر} + \frac{\lfloor ن}{\lfloor ر - ١ \lfloor ن - ر + ١} = \frac{\lfloor ن + ١}{\lfloor ر \lfloor ن - ر + ١}$

٢٢ يقدم أحد محلات الآيس كريم ثلاثة أحجام وخمس نكهات (صغير ، متوسط ، كبير) (فراولة ، مانجو ، ليمون ، حليب ، شيكولاتة) كم عدد الاختيارات المتاحة لشراء واحد من هذه الأحجام بإحدى هذه النكهات ؟

«١٥»

Scanned by CamScanner

٢٣ إذا طلب منك عمل رقم سرى لإحدى الخزن مكون من ٤ أرقام ليس من بينهم الصفر فأوجد عدد الطرق التى يمكن بها تكوين هذا الرقم السرى. «٦٥٦١»

٢٤ رقم تليفون يتكون من ٨ منازل

....	....	....	....	....	....	حـ	٩

حـ يجب أن تكون أحد الأرقام ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨ بينما باقى المنازل تتألف من أى رقم دون قيد.

كم عدد أرقام التليفونات المختلفة المتاحة ؟ «٤٠٠٠٠٠٠»

٢٥ إذا علمت أن مجموعة أرقام شبكات المحمول فى إحدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم ، فإذا كان الرقم (٠٢٥) ثابت من اليسار.

أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تتحملها شبكات هذا المحمول. «١٠٠٠٠٠٠٠٠»

٢٦ تبدأ لوحات ترخيص السيارات فى إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر.

كم عدد اللوحات التى يمكن الحصول عليها ؟ بفرض أنه لا يوجد تكرار لأى من الحروف أو الأرقام فى أى من لوحات التراخيص ؟ «٩٩٠٦٦٢٤»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $^{ن}ل_{٢}$ ، $^{ن}ل_{٣}$ ، $^{ن+١}ل_{٣}$ فى تتابع حسابى

فإن : ن + |ن − ٣| = ...

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٢ (د) ٣١

(٢) عدد حلول المعادلة : س = |س| فى ص يساوى .....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لانهائى.

(٣) إذا كان : |ن| يقبل القسمة على كل من ٧ ، ١٣ فإن : .....

(أ) ن ≥ ٧ (ب) ن = ١٠ (جـ) ٧ ≤ ن ≤ ١٣ (د) ن ≤ ٣

Scanned by CamScanner

④ المقدار : $\frac{٤ \times ٨ \times ١٢ \times \dots \times (٤ن - ٤)\,(٤ن)}{٤^{ن}} = \dots\dots\dots$

(أ) $\underline{|٤ن}$ (ب) $٤ن\,\underline{|ن}$ (جـ) $\underline{|ن}$ (د) $(ن + ٤)\,\underline{|ن}$

⑤ إذا كان رقم الآحاد فى $\underline{|ن}$ لا يساوى الصفر فإن : .....

(أ) $ن > ٤$ (ب) $ن < ٥$ (جـ) $ن > ٩$ (د) $ن$ عدد فردى.

⑥ إذا كانت : $٠ \leq \theta < ٣٦٠°$ فإن مجموعة حل المعادلة $\underline{جتا}\,\theta = ١$

(أ) {صفر ، ١٨٠° ، ٣٦٠°} (ب) {٩٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°}

(جـ) {صفر ، ٩٠° ، ٢٧٠°} (د) {صفر ، ١٨٠° ، ٣٦٠°}

⑦ إذا كان : $\underline{|ن}$ ، ٣ $\underline{|ن}$ ، $\underline{|ن + ١}$ فى تتابع هندسى فإن : .....

(أ) $\underline{|ن}$ ، ٤ $\underline{|ن}$ ، $\underline{|ن + ١}$ فى تتابع هندسى.

(ب) $\underline{|ن}$ ، ٤ $\underline{|ن}$ ، $\underline{|ن + ١}$ فى تتابع حسابى.

(جـ) $\underline{|ن}$ ، ٥ $\underline{|ن}$ ، $\underline{|ن + ١}$ فى تتابع هندسى.

(د) $\underline{|ن}$ ، ٥ $\underline{|ن}$ ، $\underline{|ن + ١}$ فى تتابع حسابى.

Scanned by CamScanner

الدرس 2

التوافيق

شخص لديه خمس شقق مرقمة من ١ إلى ٥ أراد أن يعرض شقتين منهم للبيع فبكم طريقة يمكن اختيار الشقتين ؟

للإجابة عن هذا السؤال نلاحظ ما يلى :

- اختيار الشقتين ١ ، ٤ مثلًا هو نفسه اختيار الشقتين ٤ ، ١ أى أنه ليس هناك أهمية للترتيب ولذلك نختار صيغة المجموعات {٤ ، ١} للتعبير عن هذا الاختيار وليس الأزواج المرتبة.
- استخدام التباديل يتم فى حالة أن يكون هناك أهمية للترتيب فى الاختيار ولذا فالتباديل لا تصلح فى الحالة السابقة.

لذلك توجد هناك صيغة رياضية تعبر عن الحالة السابقة تسمى التوافيق.

تعريف التوفيق

هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء بأخذ بعضها أو كلها بصرف النظر عن ترتيبها.

وفى المثال السابق فإن طرق اختيار الشقتين (التوفيقات الممكنة) هى :

{١ ، ٢} ، {١ ، ٣} ، {١ ، ٤} ، {١ ، ٥} ، {٢ ، ٣} ، {٢ ، ٤} ، {٢ ، ٥} ، {٣ ، ٤} ، {٣ ، ٥} ، {٤ ، ٥}

- يرمز لعدد التوفيقات السابقة بالرمز $^{٥}ق_{٢}$ «وتقرأ ٥ قاف ٢» أو بالرمز $\binom{٥}{٢}$ وتقرأ ٥ فوق ٢ وتستخدم للتعبير عن عدد جميع المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين والتى يمكن تكوينها من مجموعة تحتوى خمسة عناصر.

Scanned by CamScanner

بصفة عامة .

$^{ن}ق_{ر}$ هو عدد التوافيق المكون كل منها من ر من الأشياء المختارة معًا من بين ن من العناصر حيث : ٠ ≤ ر ≤ ن

مثال توضيحى

إذا كانت : س = {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} حيث عدد عناصر س = ٤ فيكون :

١ جميع المجموعات الجزئية من س هى :

* المجموعة الخالية : «∅» وعددها = ١ ∴ $^{٤}ق_{٠}$ = ١
* المجموعات الأحادية العنصر : {٣} ، {٥} ، {٧} ، {٩} وعددها = ٤ ∴ $^{٤}ق_{١}$ = ٤
* المجموعات الثنائية العناصر : {٣ ، ٥} ، {٣ ، ٧} ، {٣ ، ٩} ، {٥ ، ٧} ، {٥ ، ٩} ، {٧ ، ٩} وعددها = ٦ ∴ $^{٤}ق_{٢}$ = ٦
* المجموعات الثلاثية العناصر : {٣ ، ٥ ، ٧} ، {٣ ، ٥ ، ٩} ، {٣ ، ٧ ، ٩} ، {٥ ، ٧ ، ٩} وعددها = ٤ ∴ $^{٤}ق_{٣}$ = ٤
* المجموعات الرباعية العناصر : {٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} وعددها = ١ ∴ $^{٤}ق_{٤}$ = ١

∴ عدد جميع المجموعات الجزئية = ١ + ٤ + ٦ + ٤ + ١ = ١٦ = $٢^{٤}$

∴ $^{٤}ق_{٠}$ + $^{٤}ق_{١}$ + $^{٤}ق_{٢}$ + $^{٤}ق_{٣}$ + $^{٤}ق_{٤}$ = $٢^{٤}$

وبصفة عامة $^{ن}ق_{٠}$ + $^{ن}ق_{١}$ + $^{ن}ق_{٢}$ + ... + $^{ن}ق_{ن}$ = $٢^{ن}$

لاحظ أنه :

إذا كانت : س تحتوى على ن عنصر فإن عدد جميع المجموعات الجزئية منها = $٢^{ن}$

٢ جميع الأعداد ذات الرقمين التى يمكن تكوينها من عناصر س هى

٥٣	٧٣	٩٣	٧٥	٩٥	٩٧
٣٥	٣٧	٣٩	٥٧	٥٩	٧٩

، عددهم = $^{٤}ل_{٢}$ = ١٢

أما جميع المجموعات الجزئية الثنائية العنصر التى يمكن تكوينها من عناصر س هى

{٣ ، ٥} ، {٣ ، ٧} ، {٣ ، ٩} ، {٥ ، ٧} ، {٥ ، ٩} ، {٧ ، ٩}

لاحظ أنه :

فى التوافيق نعتبر الاختيار {٣ ، ٥} هو نفس الاختيار {٥ ، ٣} لأننا لا نراعى الترتيب داخل المجموعة أما فى التباديل نعتبر التبديل ٥٣ يختلف عن ٣٥ إذ أن كلًا منهما يعطى عددًا مخالفًا للآخر.

Scanned by CamScanner

عددهم = $^{٤}ق_{٢}$ = ٦

∴ عدد المجموعات الجزئية الثنائية × ٢ = عدد الأعداد ذات الرقمين.

∴ $^{٤}ق_{٢}$ × $\underline{|٢}$ = $^{٤}ل_{٢}$

∴ $^{٤}ق_{٢}$ = $\frac{^{٤}ل_{٢}}{\underline{|٢}}$ وبالمثل يمكن إثبات أن $^{٤}ق_{٣}$ = $\frac{^{٤}ل_{٣}}{\underline{|٣}}$

وبصفة عامة $\boxed{^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}}$

قوانين التوافيق

* إذا كان : ن ، ر ∈ ط ، ر ≤ ن فإن :

١ $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}$

٢ $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$ «قانون التبسيط»

٣ $^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$ ، $^{ن}ق_{١} = ن$

٤ إذا كان : $^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن : س = ص أ ، س + ص = ن

ملاحظات

١ $^{ن}ل_{ر}$ ، $^{ن}ق_{ر}$ ∈ ص$^{+}$

٢ التبديل يكون «بدون تكرار» و «يراعى الترتيب» أما التوفيق يكون «بدون تكرار» و «لا يراعى الترتيب».

٣ لكتابة رمز التوافيق ($^{n}C_{r}$) على الحاسبة نضغط على المفاتيح ÷ SHIFT من اليسار لليمين.

٤ يستخدم قانون التبسيط لتبسيط التوافقات العددية إذا كانت : ر > $\frac{١}{٢}$ ن

٥ ∵ ر ∈ ط ، ر ≤ ن لذلك لا معنى للحديث عن $^{١٦}ق_{٢٠}$ ، $^{٦}ق_{-٢}$ ، $^{٦}ق_{٠,٥}$

Scanned by CamScanner

مثال ١

باستخدام الحاسبة أوجد قيمة : $ق_{١}^{٧} + ق_{٢}^{٥} - ق_{٠}^{٣٠}$

الحـــل

بالضغط على المفاتيح التالية بالتتابع من اليسار إلى اليمين.

إبدأ ← 7 SHIFT ÷ 1 + 5 SHIFT ÷ 2 − 30 SHIFT ÷ 0 =

يظهر على الشاشة 16 $\therefore ق_{١}^{٧} + ق_{٢}^{٥} - ق_{٠}^{٣٠} = ١٦$

مثال ٢

إذا كان : $ق_{٩}^{ن} = ق_{١١}^{ن}$ أوجد قيمة : $ق_{١٨}^{ن}$

الحـــل

$\because ق_{٩}^{ن} = ق_{١١}^{ن}$ $\therefore ن = ٩ + ١١ = ٢٠$

$\therefore ق_{١٨}^{ن} = ق_{١٨}^{٢٠} = ق_{٢}^{٢٠} = \frac{ل_{٢}^{٢٠}}{\underline{|٢}} = \frac{٢٠ \times ١٩}{٢ \times ١} = ١٩٠$

مثال ٣

إذا كان : $ق_{س+٩}^{١٨} = ق_{٣س+١}^{١٨}$ أوجد قيمة : س

الحـــل

$\because ق_{س+٩}^{١٨} = ق_{٣س+١}^{١٨}$

$\therefore س + ٩ = ٣س + ١$ ومنها $٢س = ٨$ $\therefore س = ٤$

أ، $س + ٩ + ٣س + ١ = ١٨$ ومنها $٤س = ٨$ $\therefore س = ٢$

مثال ٤

إذا كان : $ق_{س+٥}^{١٦} = ق_{٢س-١٠}^{١٦}$ أوجد قيمة : س

Scanned by CamScanner

الحل

$\because {}^{١٦}ق_{ر+٥} = {}^{١٦}ق_{٢ر-١٠}$ $\therefore ر + ٥ = ٢ر - ١٠$

ومنها $ر = ١٥$ (مرفوض) [لأنه يجب أن يكون $ر + ٥ \leq ١٦$]

أ، $ر + ٥ + ٢ر - ١٠ = ١٦$ ومنها $٣ر = ٢١$ $\therefore ر = ٧$

مثال ٥

إذا كان : ${}^{ن}ق_{ن-٢} = ٤٥$ فما قيمة : ن

الحل

$\because {}^{ن}ق_{ن-٢} = {}^{ن}ق_{ن-(ن-٢)} = {}^{ن}ق_{٢}$ $\therefore {}^{ن}ق_{٢} = ٤٥$

$\therefore \frac{{}^{ن}ل_{٢}}{\underline{|٢}} = ٤٥$ $\therefore {}^{ن}ل_{٢} = ٤٥ \times \underline{|٢} = ٩٠ = ١٠ \times ٩ = {}^{١٠}ل_{٢}$

$\therefore ن = ١٠$

حل آخر : $\because {}^{ن}ق_{٢} = ٤٥$ $\therefore \frac{{}^{ن}ل_{٢}}{\underline{|٢}} = ٤٥$ $\therefore \frac{ن(ن-١)}{٢ \times ١} = ٤٥$

$\therefore ن(ن-١) = ٩٠ = ١٠ \times ٩$ $\therefore ن = ١٠$

مثال ٦

إذا كان : ${}^{ن}ق_{٣} = ٣٥$ أوجد قيمة : ن

الحل

$\because {}^{ن}ق_{٣} = ٣٥$ $\therefore \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$

$\therefore ن(ن-١)(ن-٢) = ٣٥ \times ٦ = ٧ \times ٦ \times ٥$ $\therefore ن = ٧$

مثال ٧

إذا كان : ${}^{ن}ل_{ر} = ٧٢٠$ ، ${}^{ن}ق_{ر} = ١٢٠$ أوجد قيمة كل من : ن ، ر

ثم أوجد قيمة كل من : ${}^{ن-٢}ق_{٢ر}$ ، ${}^{ن-٢}ق_{٤ر}$

Scanned by CamScanner

الحل

$\because {}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$ $\therefore ١٢٠ = \frac{٧٢٠}{\underline{|ر}}$

$\therefore \underline{|ر} = ٦ = ٣ \times ٢ \times ١ = \underline{|٣}$ $\therefore ر = ٣$

$\therefore {}^{ن}ل_{٣} = ٧٢٠$ $\therefore ن(ن - ١)(ن - ٢) = ١٠ \times ٩ \times ٨$

$\therefore ن = ١٠$

$\therefore {}^{ن-٢}ق_{٢ر} = {}^{١٠-٢}ق_{٦} = {}^{٨}ق_{٦} = {}^{٨}ق_{٢} = \frac{٨ \times ٧}{\underline{|٢}} = ٢٨$

، ${}^{ن-٢}ق_{٤ر} = {}^{١٠-٢}ق_{١٢} = {}^{٨}ق_{١٢}$ غير معرف [لأنه لابد أن يكون $ن \geq ر$]

مثال ٨

إذا كان : ${}^{ن}ق_{٥} > {}^{ن}ق_{٤}$ أثبت أن : ن يجب أن تكون أكبر من ٩

الحل

$\because {}^{ن}ق_{٥} > {}^{ن}ق_{٤}$ $\therefore \frac{\underline{|ن}}{\underline{|٥}\ \underline{|ن - ٥}} > \frac{\underline{|ن}}{\underline{|٤}\ \underline{|ن - ٤}}$

$\therefore \frac{\underline{|ن}}{٥\ \underline{|٤}\ \underline{|ن - ٥}} > \frac{\underline{|ن}}{(ن - ٤)\ \underline{|٤}\ \underline{|ن - ٥}}$ $\therefore \frac{١}{٥} > \frac{١}{ن - ٤}$

$\therefore ن - ٤ > ٥$ $\therefore ن > ٩$

مثال ٩

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ٥ أشخاص من بين ١٣ شخصًا ؟

الحل

عدد الطرق = ${}^{١٣}ق_{٥}$ = ١٢٨٧ طريقة.

لاحظ أنه :

لا يهمنا ترتيب الأشخاص فى اللجنة التى نختارها لذلك فإن هذه اللجان هى توفيقات.

مثال ١٠

لدينا ١٢ طالبًا ، ٨ طالبات بكم طريقة يمكن تكوين مجموعة :

١ مكونة من ٣ طلاب وطالبتين. ٢ مكونة من ٣ طلاب أو طالبتين.

Scanned by CamScanner

الحل

عدد طرق اختيار ٣ طلاب من بين ١٢ طالبًا = $^{١٢}ق_{٣}$ = ٢٢٠ طريقة.

، عدد طرق اختيار طالبتين من بين ٨ طالبات = $^{٨}ق_{٢}$ = ٢٨ طريقة.

١ عدد طرق اختيار ٣ طلاب (و) طالبتين

= ٢٢٠ × ٢٨ = ٦١٦٠ طريقة.

٢ عدد طرق اختيار ٣ طلاب (أو) طالبتين

= ٢٢٠ + ٢٨ = ٢٤٨ طريقة.

لاحظ أنه :

* إذا كان الربط بين اختيارين بحرف «و» فإننا نضرب ناتجى الاختيارين.
* إذا كان الربط بين اختيارين بحرف «أو» فإننا نجمع ناتجى الاختيارين.

مثال ١١

١٠ أساتذة يراد ترشيح ٣ منهم للسفر لحضور مؤتمر علمى فى أمريكا و٣ آخرين منهم لحضور مؤتمر آخر يعقد فى نفس الوقت فى إنجلترا ، بكم طريقة يمكن اختيار البعثتين ؟

الحل

البعثة المسافرة إلى أمريكا نختارها من الأساتذة العشرة بطرق عددها = $^{١٠}ق_{٣}$ = ١٢٠ طريقة.

البعثة المسافرة إلى إنجلترا نختارها من الأساتذة السبعة المتبقين بطرق عددها = $^{٧}ق_{٣}$ = ٣٥ طريقة.

وحسب مبدأ العد يكون : عدد طرق اختيار البعثتين = ١٢٠ × ٣٥ = ٤٢٠٠ طريقة.

مثال ١٢

بكم طريقة يمكن انتخاب ٣ لجان كل منها تتكون من شخصين من بين ٨ أشخاص بحيث لا يشترك الشخص فى أكثر من لجنة واحدة ؟

الحل

عدد طرق انتخاب اللجنة الأولى = $^{٨}ق_{٢}$ = ٢٨ طريقة.

نلاحظ أنه باختيارنا شخصين للجنة الأولى فيتبقى ٦ أشخاص ننتخب منهم ٢ للجنة الثانية فيكون : عدد طرق انتخاب اللجنة الثانية = $^{٦}ق_{٢}$ = ١٥ طريقة وبعد ذلك يتبقى ٤ أشخاص ننتخب من بينهم ٢ للجنة الثالثة فيكون : عدد طرق انتخاب اللجنة الثالثة = $^{٤}ق_{٢}$ = ٦ طرق.

∴ عدد الطرق التى يتم بها انتخاب اللجان الثلاث = ٢٨ × ١٥ × ٦ = ٢٥٢٠ طريقة.

Scanned by CamScanner

مثال ١٣

بكم طريقة يمكن لمدرس أن يختار طالبًا أو أكثر من بين خمسة طلاب ؟

الحـــل

يتم اختيار إما ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ من الطلاب وبذلك يكون

عدد الطرق = $^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} + {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٥}$ = ٥ + ١٠ + ١٠ + ٥ + ١ = ٣١

مثال ١٤

إذا كانت : س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

، ص = {(أ ، ب ، حـ) : أ ، ب ، حـ ∈ س ، أ ≠ ب ≠ حـ}

، ع = {{أ ، ب ، حـ} : أ ، ب ، حـ ∈ س} أوجد عدد عناصر كل من : ص ، ع

الحـــل

١ يتم اختيار ثلاثيات مرتبة (٣ عناصر) من المجموعة س (٤ عناصر)

∴ عدد عناصر (ص) = $^{٤}ل_{٣}$ = ٢٤

لاحظ أننا : نستخدم التباديل لأن ص تتكون من ثلاثيات مرتبة.

٢ يتم اختيار مجموعات يتكون كل منها من (٣ عناصر) مأخوذة من المجموعة س (٤ عناصر)

∴ عدد عناصر (ع) = $^{٤}ق_{٣}$ = ٤

لاحظ أننا : نستخدم التوافيق لأن ع تتكون من مجموعات.

مثال ١٥

إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ تقع على دائرة فأوجد :

١ عدد القطع المستقيمة التى يمكن رسمها بين هذه النقط.

٢ عدد المثلثات التى يمكن رسمها ورؤوسها من هذه النقط.

٣ عدد المضلعات التى يمكن رسمها ورؤوسها من هذه النقط.

Scanned by CamScanner

الحل

∵ عدد النقط = ٥

١ عدد القطع المستقيمة = $^{٥}ق_{٢}$ = ١٠

٢ عدد المثلثات = $^{٥}ق_{٣}$ = ١٠

٣ عدد المضلعات = $^{٥}ق_{٣}$ + $^{٥}ق_{٤}$ + $^{٥}ق_{٥}$ = ١٠ + ٥ + ١ = ١٦

ملاحظة

إذا كان عدد أضلاع شكل هندسى = ن ضلع

فإن عدد جميع القطع المستقيمة الممثلة فى الشكل = $^{ن}ق_{٢}$

، ∵ قطر الشكل الهندسى هو القطعة المستقيمة التى تصل بين رأسين غير متتاليتين

∴ عدد أقطار الشكل الهندسى

= عدد جميع القطع المستقيمة − عدد أضلاع الشكل = $\boxed{^{ن}ق_{٢} - ن}$

فمثلًا : عدد أقطار الشكل الثلاثى = $^{٣}ق_{٢}$ − ٣ = صفر

، عدد أقطار الشكل الرباعى = $^{٤}ق_{٢}$ − ٤ = ٢

، عدد أقطار الشكل الخماسى = $^{٥}ق_{٢}$ − ٥ = ٥

، عدد أقطار الشكل السداسى = $^{٦}ق_{٢}$ − ٦ = ٩

مثال ١٦

أوجد عدد متوازيات الأضلاع التى يمكن تكوينها من ٥ مستقيمات متوازية تتقاطع مع ٤ مستقيمات متوازية ؟

الحل

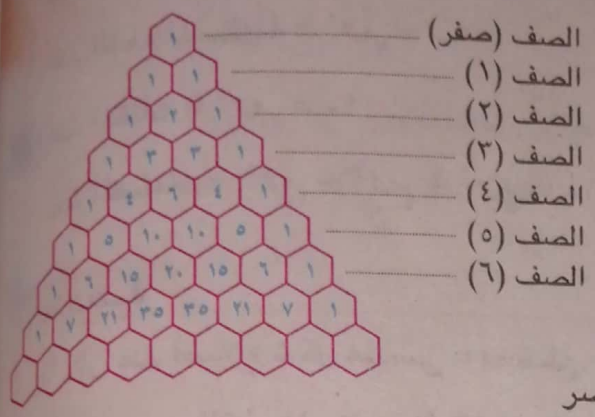
لتكوين متوازى أضلاع نختار زوج من المستقيمات المتوازية من المجموعة الأولى مع زوج من المستقيمات المتوازية من المجموعة الثانية

∴ عدد متوازيات الأضلاع = $^{٥}ق_{٢}$ × $^{٤}ق_{٢}$ = ٦٠

Scanned by CamScanner

مثلث باسكال

نشاط :



١ يبدأ المثلث بالعدد (١) فى القمة.

٢ الصف (١) يمثل ($ن$ = ١)

من العناصر مأخوذ منها $ر$ = ٠ أ، ١

فيكون $^{١}ق_{٠}$ = ١ ، $^{١}ق_{١}$ = ١

، الصف (٢) يمثل ($ن$ = ٢) من العناصر

مأخوذ منها $ر$ = ٠ أ، ١ أ، ٢

فيكون $^{٢}ق_{٠}$ = ١ ، $^{٢}ق_{١}$ = ٢ ، $^{٢}ق_{٢}$ = ١

وهكذا، الصف (٤) يمثل ($ن$ = ٤)

من العناصر مأخوذ منها $ر$ = ٠ أ، ١ أ، ٢ أ، ٣ أ، ٤

فيكون $^{٤}ق_{٠}$ = ١ ، $^{٤}ق_{١}$ = ٤ ، $^{٤}ق_{٢}$ = ٦ ، $^{٤}ق_{٣}$ = ٤ ، $^{٤}ق_{٤}$ = ١

٣ العدد الأول والعدد الأخير فى كل صف هو (١) لأن $^{ن}ق_{٠}$ = ١ ، $^{ن}ق_{ن}$ = ١

٤ أى عدد آخر من مثلث باسكال يمكن الحصول عليه بجمع العددين الموضوعين فوقه مباشرة.

٥ يوجد تماثل بين الأعداد الموجودة على جانبى ضلعى المثلث حيث

* يوجد تماثل حول العدد الذى يتوسط الصف (إذا كانت : $ن$ زوجية)

* يوجد تماثل حول العددين اللذين يتوسطان الصف (إذا كانت : $ن$ فردية)

وهذا يطابق العلاقة : $\boxed{^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}}$

٦ مجموع أعداد كل صف = $٢^{ن}$ حيث إن

* $^{٢}ق_{٠} + {}^{٢}ق_{١} + {}^{٢}ق_{٢} = ٢^{٢}$

* $^{٥}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} + {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٥} = ٢^{٥}$

Scanned by CamScanner

اختبر نفسك

تمارين 8

على التوافيق

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اكتب بدلالة التباديل كلًّا من :

(١) $^{٨}ق_{٣}$ (٢) $^{١٩}ق_{٢}$ (٣) $^{٥}ق_{٥}$ (٤) $^{س}ق_{س-ص}$

٢ اكتب مستخدمًا الصورة $^{ن}ق_{ر}$ كلًّا مما يأتى :

(١) $\frac{^{٨}ل_{٢}}{\lfloor ٢}$ (٢) $\frac{^{٩}ل_{٣}}{\lfloor ٣}$ (٣) $\frac{^{١٠}ل_{٤}}{\lfloor ٤}$ (٤) $\frac{^{٨}ل_{٠}}{\lfloor ٠}$

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $^{٩}ق_{١} + {}^{١٠٠}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{٥} =$ .....

(أ) ١ (ب) ٩ (جـ) ١١ (د) ١١٤

(٢) إذا كان : $\lfloor ٣ن - ٧ = ١٢٠$ فإن : $^{ن}ق_{ن-١} =$ .....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٣) إذا كان : $\lfloor س - ٣ = ١$ فإن : $^{س+٢}ق_{س-١} =$ .....

(أ) ٣ أ، ٤ (ب) ٩ أ، ٢٠ (جـ) ١٠ أ، ٢٠ (د) ٩ أ، ١٠

(٤) إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٢} = ٣٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٥) إذا كان : $^{ن}ق_{٣} = ١٢٠$ فإن : $^{ن}ق_{ن-٨} =$ .....

(أ) ٩٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٤٥ (د) ٣٠

(٦) إذا كان : $^{٢ن-١}ق_{٣} = ٨٤$ فإن : $\lfloor ن - ٥ =$ .....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) ٢٤

(٧) إذا كان : $^{٨}ل_{ر+١} = ٣٣٦$ فإن : $^{٢ر}ق_{٤} =$ .....

(أ) ١٦ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١

٤ إذا كان : $^{م}ق_{م-٤} = ٣٥$ فأوجد قيمة : م وإذا كان : $^{ن}ق_{م} = {}^{ن}ق_{م+١}$ فأوجد قيمة : ن «٧ ، ١٥»

Scanned by CamScanner

٥ إذا كان : $^{ن}ق_{٣} = ٣٥$ ، $^{س}ق_{ن} = {}^{س}ق_{ن+٣}$ فما قيمة : س «١٧»

٦ إذا كان : $^{٢٨}ق_{ر} = {}^{٢٨}ق_{٢ر-٤٧}$ أوجد قيمة : ر «٢٥»

٧ إذا كان : $^{٢٥}ق_{٢ر+١} = {}^{٢٥}ق_{٣ر-١}$ فما قيمة : ر «٢ أ ، ٥»

٨ إذا كان : $^{٣٦}ق_{٢ر-٥} = {}^{٣٦}ق_{ر-٣}$ أوجد قيمة : $^{١١}ق_{ر}$ «١٠»

٩ إذا كان : $^{ن+١}ق_{٤} = \frac{٥}{٢}\ {}^{ن}ق_{٣}$ فأوجد قيمة : ن «٩»

١٠ إذا كان : $^{ن}ق_{٣} = ٣٠\frac{١}{٣}\ ن$ فأوجد قيمة : ن «١٥»

١١ إذا كان $^{ن}ق_{٤} : {}^{ن-٢}ق_{٣} = ٧ : ٢$ فما قيمة : ن «٧ أ ، ٨»

١٢ إذا كان $^{ن}ق_{٥} : {}^{ن}ق_{٤} = ٨ : ٥$ فما قيمة : ن «١٢»

١٣ إذا كان $^{١٣}ق_{ر+٢} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ فما قيمة : ر «٣»

١٤ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

(١) $^{ن}ق_{٣} = ٨٤$ «{٩}»

(٢) $^{١٢}ق_{ر} = {}^{١٢}ق_{٢ر+٣}$ «{٣}»

(٣) $^{ن}ق_{٢ن-٢١} = {}^{ن}ق_{٣}$ «{١٢ ، ١٨}»

(٤) $^{ن+١}ق_{٣} = ٤\ {}^{ن-١}ق_{٣}$ «{٣ ، ٨}»

١٥ أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) $^{٥}ق_{٠} + {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} + {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} + {}^{٥}ق_{٥}$ «٣٢»

(٢) $^{٥}ق_{٠} - {}^{٥}ق_{١} + {}^{٥}ق_{٢} - {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٥}ق_{٤} - {}^{٥}ق_{٥}$ «صفر»

١٦ إذا كان : $^{٢ن+م}ق_{٢} = ١٩٠$ ، $^{ن-٢}ل_{٣} = ٦٠$ أوجد قيمة كل من : ن ، م «٩ ، ٢»

١٧ إذا كان : $^{ن}ل_{ر-١} = ٦٧٢٠$ ، $^{ن}ق_{ر-١} = ٥٦$ فما قيمة كل من : ن ، ر «٨ ، ٦»

١٨ إذا كان : $^{ن-م}ل_{٣} = ٢١٠$ ، $^{ن+م}ق_{٤} = ٧١٥$ فأوجد قيمة كل من : م ، ن «٣ ، ١٠»

Scanned by CamScanner

١٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $^{١٥}ق_{ر} = {}^{١٥}ق_{٦}$ فإن : ر = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ٨ (د) ٦ أ، ٩

② إذا كان : $\underline{|س} = {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٩}ل_{٢}$ فإن : س = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١٢٠

③ إذا كان : $^{٦}ق_{ر} > ١$ ، $^{ر}ق_{٤} > ١$ فإن : $\underline{|ر}$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٢٤ (جـ) ١٢٠ (د) ٧٢٠

④ إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ق_{ر}$ فإن : ر = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) صفر أ، ١ (د) ١ أ، ٢

⑤ إذا كان : $^{ن}ل_{١} + {}^{ن}ق_{٢} = ٣٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٩ (ب) −٩ أ، ٨ (جـ) ٨ (د) ٩ أ، −٨

⑥ إذا كان : $^{١٢}ق_{ر٢} = {}^{١٢}ق_{٢ر٢}$ فإن : ر ∈ .....

(أ) {٠ ، ٢} (ب) {٠ ، −٢} (جـ) {٢ ، −٢} (د) {٠ ، ٢ ، −٢}

⑦ إذا كان : $^{ن}ل_{٢} = ٤٢$ ، $\underline{|ن - ر} = ١٢٠$ فإن : $^{ن}ق_{ر+٣}$ = ...

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ٢١ (د) ٤٢

⑧ إذا كان : $\frac{^{ن}ل_{٢}}{^{ن-١}ل_{٢}} = {}^{ن}ق_{٢}$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) صفر أ، ٣

⑨ إذا كان : $^{ن+١}ق_{ن-٢} = ٥٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

⑩ إذا كان : $^{ن}ق_{٣} + {}^{ن}ق_{ن-٣} = ٢\ {}^{ن}ق_{٤}$ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ٧ (جـ) ٢ (د) ١١

⑪ $^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر}$ = ...

(أ) $\underline{|ن - ١}$ (ب) $\underline{|ر}$ (جـ) $\underline{|ن}$ (د) ١

Scanned by CamScanner

(١٢) إذا كان : ${}^{ن}ق_{١٠} = {}^{ن}ق_{١٤}$ فإن : ${}^{٢٥}ق_{ن} = ...$

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (جـ) ١ (د) ٤٩

(١٣) إذا كان : ${}^{ن}ق_{١٠} > {}^{ن}ق_{٩}$ فإن : ن .....

(أ) = ١٩ (ب) < ١٩ (جـ) > ١٩ (د) ≥ ١٩

(١٤) إذا كان : ${}^{٢ن+١}ق_{٢ن-١} - ٢ \times {}^{ن+٢}ق_{ن} = ٤٦$ فإن : ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

(١٥) أصغر قيمة للعدد (ن) تجعل ${}^{ن}ل_{ر-٢} = ٢٤ \times {}^{ن}ق_{ر-٢}$ هى .....

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٦) إذا كان : ${}^{٤}ق_{٠} + {}^{٤}ق_{١} + {}^{٤}ق_{٢} + {}^{٤}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٤} = ٢^{ن}$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٧) إذا كان : ${}^{ن}ق_{٥} \geq {}^{ن}ق_{٤}$ فإن : ن ∈ .....

(أ) {٥ ، ٤} (ب) {٤ ، ٩}

(جـ) {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩} (د) {٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

(١٨) إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{٢ر}$ حيث : ن ، ر ∈ ص$^{+}$

فإن : ن مضاعف للعدد .....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١٩) إذا كان : ${}^{س+ص}ل_{٤} = ٣٦٠$ ، $\underline{|٢س + ص} = ٥٠٤٠$

فإن : ${}^{ص}ق_{٢س} = ...$

(أ) ٦ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٢٠) إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٧ : ٤$ ، ${}^{ن}ل_{ر} : {}^{ن-١}ل_{ر} = ٥ : ٣$

فإن : ن + ر = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٤

(٢١) إذا كانت : ن ∈ ص$^{+}$ فإن : $\underline{|ن}$ = ...

(أ) $\underline{|ن^{٢}}$ (ب) $\underline{|ن + ١}$ (جـ) $ن^{٢}\ \underline{|ن - ١}$ (د) $\underline{|٢ن}$

(٢٢) إذا كان : ${}^{٧}ق_{٠} + {}^{٧}ق_{٢} + {}^{٧}ق_{٣} + {}^{٧}ق_{٤} + {}^{٧}ق_{٥} + {}^{٧}ق_{٦} + {}^{٧}ق_{٧} = ٢^{٧} + ...$

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) −٧ (د) ٧

Scanned by CamScanner

٢٠ أثبت أن : $^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن-١}ق_{ر-١} = \frac{ن}{ر}$ ومنها استنتج قيمة : $^{١٠٠}ق_{٥٠} \div {}^{٩٩}ق_{٤٩}$ «٢»

٢١ أثبت أن : $^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن}ق_{ر-١} = \frac{ن - ر + ١}{ر}$ ومنها استنتج قيمة : $^{١٠}ق_{٦} \div {}^{١٠}ق_{٥}$ «$\frac{٥}{٦}$»

٢٢ أثبت أن : $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$ ومنها استنتج قيمة : $^{١٠}ق_{٣} + {}^{١٠}ق_{٤}$ «٣٣٠»

٢٣ أثبت أن : $^{٢ن}ق_{ن} = ٢^{ن} \times \frac{١ \times ٣ \times ٥ \times ..... \times (٢ن - ١)}{\underline{|ن}}$

٢٤ إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times {}^{ن}ق_{ن-ر}$ فما قيمة : ر ؟ «٥»

٢٥ إذا كان $^{٢ن+١}ل_{ن-١} : {}^{٢ن}ق_{ن+١} = \frac{٣}{٢} \underline{|ن - ١}$ فما قيمة : ن ؟ «٤»

٢٦ أوجد في $ص^{+}$ قيمتي س ، ص من المعادلتين :

$^{س}ق_{ص} = ٢ \times {}^{س}ق_{ص+١}$ ، $^{س}ق_{ص} = {}^{س}ق_{ص-١}$ «س = ٥ ، ص = ٣»

٢٧ أثبت أن : $\frac{^{ن}ق_{١} \times {}^{٢ن}ق_{٢}}{^{٣ن}ق_{٣}} = \frac{^{٢ن}ل_{٢}}{^{٣ن-١}ل_{٢}}$

٢٨ أثبت أن : $\underline{|٢٥}$ يقبل القسمة على $\underline{|١٣}$ $\underline{|١٢}$

٢٩ أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) بكم طريقة يمكن اختيار سبعة طلاب من بين ١٠ طلاب للذهاب إلى رحلة تاريخية. «١٢٠»

(٢) اشترك ٧ أشخاص في مسابقة الشطرنج بحيث تجرى مباراة واحدة بين كل شخصين أوجد عدد مباريات المسابقة. «٢١»

(٣) إذا تم اختيار ثلاثة طلاب من بين عدد (ن) من الطلاب لحضور ندوة بحيث كان عدد طرق الاختيار يساوى ١٠ أوجد عدد الطلاب. «٥»

(٤) يوجد في أحد الصفوف ١٠ طلاب ، ٨ طالبات ، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف. «٣٣٦٠»

(٥) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من رجلين وسيدة من بين ٧ رجال و٥ سيدات. «١٠٥»

Scanned by CamScanner

(٦) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٤ رجال أو ٣ سيدات من بين ٦ رجال و٥ سيدات. «٢٥»

(٧) من بين أربعة معلمين يراد اختيار معلم لتدريب طلبة الأولمبياد فى مادة الرياضيات ، ثم معلم آخر لإعداد الاختبار. أوجد عدد طرق الاختيار. «١٢»

(٨) مدرسة بها ١٠ طلاب يمارسون كرة السلة ، بكم طريقة يمكن اختيار فريق مكون من ٥ أعضاء وقائد للفريق من هؤلاء اللاعبين. «١٢٦٠»

٣٠ أوجد عدد الطرق التى يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصًا بحيث لا يدخل شخص فى كلتا اللجنتين. «١٨٤٨٠»

٣١ إذا كانت : س = {٠ ، -٥ ، -٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧}

وكانت ع = {{أ ، ب} : أ ، ب ∈ س} **أوجد :** عدد عناصر ع «١٥»

٣٢ إذا كانت : س = {س : س ∈ ط ، ٥ ≤ س ≤ ٩}

، ص = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ ≠ ب}

، ع = {{أ ، ب ، حـ} : أ ، ب ، حـ ∈ س} أوجد عدد عناصر كل من ص ، ع «٢٠ ، ١٠»

٣٣ بكم طريقة يمكن لمدرس أن يختار طالبًا أو أكثر من بين ستة طلبة ؟ «٦٣»

٣٤ بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قرارًا بالأغلبية ؟ «١٦»

٣٥ **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

(١) عدد أقطار الشكل الثمانى = ...

(أ) ٨ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٢ (د) ١٨

(٢) مضلع له ٤٤ قطر فإن عدد أضلاعه = ...

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ١١ (د) ١٢

Scanned by CamScanner

③ عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٦ كرات حمراء و ٨ كرات بيضاء = ...

(أ) ٢ (ب) ١٤ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

④ إذا كان عدد طرق اختيار ٣ عناصر من مجموعة ما يساوى عدد طرق اختيار ٥ عناصر من نفس المجموعة فإن عدد عناصر هذه المجموعة يساوى .....

(أ) $^{٥}ق_{٣}$ (ب) $^{٥}ل_{٣}$ (جـ) ٨ (د) ١٥

⑤ فصل به عدد من الأولاد ضعف عدد البنات فإذا كان عدد طرق اختيار ولد وبنت هو ٧٢ فإن عدد الأولاد = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٨

⑥ فى مسابقة لكرة القدم يتقابل فيها كل فريقين مرة واحدة وكان عدد المباريات خلال المسابقة ١٥٣ مباراة فإن عدد الفرق المتنافسة تساوى .....

(أ) ٩ (ب) ١٣ (جـ) ١٨ (د) ١٩

⑦ ٥ نقط فى مستوى لا توجد أى ثلاثة منها على مستقيم واحد فإن عدد المثلثات التى يمكن تكوينها من هذه النقط = ...

(أ) ٥ + ٣ (ب) ٥ × ٣ (جـ) $^{٥}ل_{٣}$ (د) $^{٥}ق_{٣}$

⑧ إذا كانت النقط أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، و تقع على دائرة فإن عدد القطع المستقيمة التى يمكن رسمها من هذه النقط = ...

(أ) $^{٦}ل_{٢}$ (ب) $^{٥}ل_{٢}$ (جـ) $^{٦}ق_{٢}$ (د) $^{٥}ق_{٢}$

---

٣٦ فصل دراسى به ٧ أولاد ، ٦ بنات واختير فريق مكون من ٥ أشخاص من هذا الفصل **احسب عدد الفرق المختلفة التى يمكن اختيارها إذا كان أعضاء الفريق :**

① من أى جنس.
② من الأولاد فقط.
③ من البنات فقط.
④ من نفس الجنس.
⑤ من ثلاثة أولاد وبنتين.

«١٢٨٧ ، ٢١ ، ٦ ، ٢٧ ، ٥٢٥»

Scanned by CamScanner

٣٧ يدرس الطالب فى إحدى السنوات الدراسية بالجامعة ثمان مواد مختلفة ولا يحق له الانتقال إلى السنة التالية إلا إذا نجح فى ٦ منها على الأقل ، بكم طريقة يمكن للطالب الانتقال إلى السنة التالية ؟ «٣٧»

٣٨ صندوق به ٦ كرات بيضاء ، ٤ كرات حمراء. احسب عدد طرق سحب ٣ كرات معًا إذا كانت :

(١) الكرات الثلاثة من أى لون.

(٢) الكرات الثلاثة تحتوى على كرتين بيضاويتين بالضبط.

(٣) الكرات الثلاثة تحتوى على كرتين بيضاويتين على الأقل.

(٤) الكرات الثلاثة تحتوى على كرتين بيضاويتين على الأكثر. «١٢٠ ، ٦٠ ، ٨٠ ، ١٠٠»

٣٩ تم ترشيح ٩ أشخاص لاختيار ٣ سفراء لإحدى الدول العربية فبكم طريقة يتم هذا الاختيار؟ وإذا اشترط وجود شخص معين فى أى اختيار فبكم طريقة يتم الاختيار ؟ وإذا استبعد شخص معين فبكم طريقة يتم الاختيار ؟ «٨٤ ، ٢٨ ، ٥٦»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٤٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $^{٦}ق_{ر}$ تكون أكبر ما يمكن عندما ر = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

(٢) إذا كان : $^{ن}ل_{س} + {}^{س}ل_{ن} = ١٤٤٠$ فإن : $^{ن+٤}ق_{س-٥}$ = ...

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٠ (د) ١٢

(٣) إذا كان : $^{٤}ق_{ر+٢} = {}^{٤}ق_{٢-ر}$ فإن : ر ∈ .....

(أ) {٠} (ب) {-١ ، ٤}

(جـ) {٠ ، ٣} (د) {-٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢}

(٤) إذا كان : $\underline{|ر} = ن$ ، $\underline{|ن} = ر$ فإن : ر + ن = ...

(أ) ٢ (ب) صفر أ، ١ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) ٢ أ، ٤

Scanned by CamScanner

⑤ إذا كان أطوال أضلاع مثلث هى $\frac{١}{٢}$ [ن] ، [ن − ٢] ، [٢ − ن] من السنتيمترات فإن القيمة العددية لمساحة المثلث = ... سم^{٢}

(أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٨}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{١٦}$

⑥ $\sum_{ر=٠}^{ن} {}^{ن}ق_{ر}$ = ...

(أ) $٢^{ر}$ (ب) $ن^{٢}$ (جـ) $٢^{ن}$ (د) $١ - ر^{٢}$

⑦ عدد طرق إجابة عشرة أسئلة من نوع الصواب والخطأ يساوى .....

(أ) ٢٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ٥١٢ (د) ١٠٢٤

⑧ إذا كانت النقط أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و تقع على دائرة فإن عدد المضلعات التى يمكن رسمها من هذه النقط = ...

(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (جـ) ٣٠ (د) ٤٢

⑨ إذا كان : م = ${}^{ن}ق_{٢}$ فإن : ${}^{م}ق_{٢}$ = ...

(أ) ٣ ${}^{ن}ق_{٣}$ (ب) ٣ ${}^{ن+١}ق_{٣}$ (جـ) ٤ ${}^{ن}ق_{٤}$ (د) ٣ ${}^{ن+١}ق_{٤}$

⑩ عدد متوازيات الأضلاع التى يمكن تكوينها من (م) من المستقيمات المتوازية التى تتقاطع مع (ن) من المستقيمات المتوازية ؟

(أ) ${}^{م-١}ق_{٢}$. ${}^{ن-١}ق_{٢}$ (ب) ${}^{م-١}ق_{٢}$. ${}^{ن}ق_{٢}$

(جـ) ${}^{م}ق_{٢}$. ${}^{ن-١}ق_{٢}$ (د) ${}^{م}ق_{٢}$. ${}^{ن}ق_{٢}$

Scanned by CamScanner

ثانيًا

التفاضل والتكامل وحساب المثلثات

الوحدة 3 التفاضل والتكامل.

الوحدة 4 حساب المثلثات.

Scanned by CamScanner

الوحدة 3

التفاضل والتكامل

الدرس 1 معدل التغير.

الدرس 2 الاشتقاق.

الدرس 3 قواعد الاشتقاق.

الدرس 4 مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة).

الدرس 5 مشتقات الدوال المثلثية.

الدرس 6 تطبيقات على المشتقة.

الدرس 7 التكامل.

Scanned by CamScanner

الدرس 1 معدل التغير

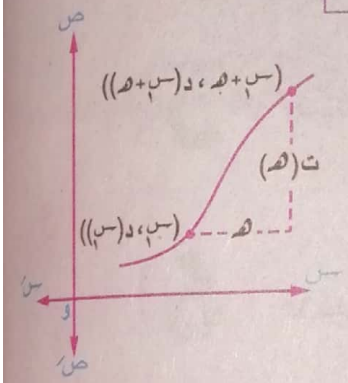
دالة التغير

• إذا كانت : ص = د (س) وتغيرت قيم س من $س_1$ إلى $س_2$ (حيث $س_1$ ، $س_2$ ينتميان إلى مجال الدالة د)

فإن : ص تتغير تبعًا لتغير س من القيمة د ($س_1$) إلى القيمة د ($س_2$)

فإذا كان مقدار التغير فى س هو Δ س (ويقرأ دلتا س) = $س_2$ − $س_1$

فإن مقدار التغير فى ص هو $\boxed{\Delta ص = د(س_2) - د(س_1)}$



• وإذا اعتبرنا أن $س_1$ ، $س_1$ + هـ ينتميان إلى مجال الدالة د

فإن لكل تغير فى $س_1$ مقداره (هـ) أى تتغير س من $س_1$ إلى $س_1$ + هـ يحدث تغير فى ص يتعين بالدالة ت حيث :

$\boxed{ت(هـ) = د(س_1 + هـ) - د(س_1)}$ وهى دالة فى المتغير هـ

وتسمى **دالة التغير** فى د عند س = $س_1$

مثال 1

إذا كانت : د (س) = $س^2$ − ٣ س + ٤ **فأوجد :**

١ دالة التغير فى د عند س = ٣ ثم احسب قيمة ت (٢ , ٠)

٢ مقدار التغير فى د (س) عندما تتغير س من ١ إلى ١,٤

Scanned by CamScanner

الحل

١ د (س) = س^{٢} − ٣ س + ٤

وعند س = ٣

∴ ت (هـ) = د (٣ + هـ) − د (٣)

= [(٣ + هـ)^{٢} − ٣ (٣ + هـ) + ٤] − [(٣)^{٢} − ٣ × ٣ + ٤]

= ٩ + ٦ هـ + هـ^{٢} − ٩ − ٣ هـ + ٤ − ٤ = ٣ هـ + هـ^{٢}

وهذه هى دالة التغير فى د عند س = ٣

∴ ت (٠,٢) = ٣ (٠,٢) + (٠,٢)^{٢} = ٠,٦٤

٢ مقدار التغير فى د (س) = د (س$_{٢}$) − د (س$_{١}$) = د (١,٤) − د (١)

= [(١,٤)^{٢} − ٣ × ١,٤ + ٤] − [(١)^{٢} − ٣ × ١ + ٤] = −٠,٢٤

* **حل آخر للبند (٢) :**

هـ = ١,٤ − ١ = ٠,٤ ، س$_{١}$ = ١ ونوجد دالة التغير فى د عند س = ١

ثم نوجد ت (٠,٤)

عند س = ١ تكون ت (هـ) = د (١ + هـ) − د (١)

= [(١ + هـ)^{٢} − ٣ (١ + هـ) + ٤] − [١ − ٣ + ٤]

= ١ + ٢ هـ + هـ^{٢} − ٣ − ٣ هـ + ٤ − ٢ = هـ^{٢} − هـ

∴ ت (٠,٤) = (٠,٤)^{٢} − ٠,٤ = ٠,١٦ − ٠,٤ = −٠,٢٤

دالة متوسط التغير

بقسمة دالة التغير السابقة ت (هـ) على التغير الحادث فى س وهو هـ حيث هـ ≠ ٠ فإننا نحصل على دالة جديدة تسمى **دالة متوسط التغير** فى د عند س = س$_{١}$ ونرمز لها بالرمز م (هـ)

$$\text{م (هـ)} = \frac{\text{ت (هـ)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د (س}_{١}\text{ + هـ) − د (س}_{١}\text{)}}{\text{هـ}}$$

ملاحظة

عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{٢}$

فإن متوسط التغير = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{د (س}_{٢}\text{) − د (س}_{١}\text{)}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

Scanned by CamScanner

مثال ٢

إذا كانت : د (س) = ٢ س^{٢} + ٥ س − ١ **فأوجد :**

١ دالة متوسط التغير فى د عند س = ٢ ثم احسب م (٢ , ٠)

٢ متوسط التغير فى د عندما تتغير س من ٥ , ٥ إلى ٤

الحـــل

١ د (س) = ٢ س^{٢} + ٥ س − ١

عند س = ٢

تكون م (هـ) = $\frac{\text{د (٢ + هـ) − د (٢)}}{\text{هـ}}$ حيث هـ ≠ ٠

= $\frac{١}{\text{هـ}}$ [(٢ (٢ + هـ)^{٢} + ٥ (٢ + هـ) − ١) − (٢ × ٤ + ٥ × ٢ − ١)]

= $\frac{١}{\text{هـ}}$ (٨ + ٨ هـ + ٢ هـ^{٢} + ١٠ + ٥ هـ − ١ − ١٧)

= $\frac{١}{\text{هـ}}$ (١٣ هـ + ٢ هـ^{٢})

= ١٣ + ٢ هـ وهذه دالة متوسط التغير عند س = ٢

∴ م (٢ , ٠) = ١٣ + ٢ × ٠ , ٢ = ١٣ , ٤

٢ ∵ متوسط التغير فى د = $\frac{\text{د (س}_{٢}\text{) − د (س}_{١}\text{)}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

، عندما تتغير س من ٥ , ٥ إلى ٤ ∴ س$_{١}$ = ٥ , ٥ ، س$_{٢}$ = ٤

∴ متوسط التغير فى د = $\frac{\text{د (٤) − د (٥ , ٥)}}{٤ - ٥ , ٥}$

= $\frac{(٣٢ + ٢٠ - ١) - (٦٠ , ٥ + ٢٧ , ٥ - ١)}{-١ , ٥}$ = ٢٤

ويمكن الحل بإيجاد دالة متوسط التغير عند س = ٥ , ٥ ثم إيجاد م (−١ , ٥)

Scanned by CamScanner

معدل التغير

إذا كان لدالة متوسط التغير السابقة م (هـ) نهاية محددة عندما هـ ← ٠ فإن هذه النهاية تسمى معدل التغير للدالة عند س = $س_١$

∴ معدل التغير للدالة عند $س_١$ = $\underset{هـ \to ٠}{نهـا}$ م (هـ) = $\underset{هـ \to ٠}{نهـا}$ $\frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$

مثال ٣

إذا كانت : د (س) = $س^٢$ − ٣ س فأوجد معدل التغير للدالة د : عند س = ٢

الحل

عند س = ٢ تكون م (هـ) = $\frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{هـ}$ حيث هـ ≠ ٠

$= \frac{١}{هـ}\left[\left((٢ + هـ)^٢ - ٣(٢ + هـ)\right) - (٤ - ٦)\right]$

$= \frac{١}{هـ}(٤ + ٤هـ + هـ^٢ - ٦ - ٣هـ + ٢)$

$= \frac{١}{هـ}(هـ + هـ^٢) = ١ + هـ$

∴ معدل التغير للدالة د عند س = ٢ هو $\underset{هـ \to ٠}{نهـا}$ (١ + هـ) = ١

مثال ٤

إذا كانت : ص = $\frac{١}{س - ٢}$ حيث س ≠ ٢ أوجد :

١ دالة متوسط التغير فى ص عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١$ + هـ

وأوجد هذا المتوسط عندما : $س_١$ = ٣ ، هـ = ١

٢ معدل التغير فى ص عندما س = $س_١$ وأوجد هذا المعدل عندما س = ٧

الحل

نفرض أن : ص = د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢

Scanned by CamScanner

١ عند $س = س_١$ تكون $م(هـ) = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ (حيث $هـ \neq ٠$)

$$= \frac{١}{هـ}\left[\frac{١}{س_١ + هـ - ٢} - \frac{١}{س_١ - ٢}\right] = \frac{١}{هـ} \times \frac{س_١ - ٢ - س_١ - هـ + ٢}{(س_١ + هـ - ٢)(س_١ - ٢)}$$

$$= \frac{-١}{(س_١ + هـ - ٢)(س_١ - ٢)}$$

، عند $س_١ = ٣$ ، $هـ = ١$ $\therefore م(هـ) = \frac{-١}{(٣ + ١ - ٢)(٣ - ٢)} = -\frac{١}{٢}$

٢ عند $س = س_١$ يكون معدل التغير

$$= \underset{هـ \to ٠}{نهـا}\ م(هـ) = \underset{هـ \to ٠}{نهـا}\ \frac{-١}{(س_١ + هـ - ٢)(س_١ - ٢)}$$

$$= \frac{-١}{(س_١ - ٢)(س_١ - ٢)} = \frac{-١}{(س_١ - ٢)^٢}$$

، عند $س = ٧$ يكون معدل التغير $= \frac{-١}{(٧ - ٢)^٢} = -\frac{١}{٢٥}$

مثال ٥

إذا كانت : $د(س) = \sqrt{س}$ حيث $س \geq ٠$ **فأوجد معدل تغير الدالة د :** عند $س = س_١$

ثم أوجد هذا المعدل : عندما $س_١ = ٢٥$

الحل

$\because$ عند $س = س_١$ يكون :

$$م(هـ) = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = \frac{\sqrt{س_١ + هـ} - \sqrt{س_١}}{هـ}$$

$$\therefore \text{معدل التغير للدالة د} = \underset{هـ \to ٠}{نهـا}\ م(هـ) = \underset{هـ \to ٠}{نهـا}\ \frac{(س_١ + هـ)^{\frac{١}{٢}} - (س_١)^{\frac{١}{٢}}}{هـ}$$

$$= \frac{١}{٢}(س_١)^{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{١}{٢\sqrt{س_١}}$$

وعندما $س_١ = ٢٥$ يكون معدل التغير للدالة $= \frac{١}{٢\sqrt{٢٥}} = ٠,١$

Scanned by CamScanner

مثال ٦

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالتسخين بحيث تظل محتفظة بشكلها **أوجد :**

١ متوسط التغير فى مساحتها عندما يتغير طول ضلعها من ١٠ سم إلى ١٠,٢ سم

٢ معدل التغير فى مساحتها عندما يكون طول ضلعها ٢٠ سم

الحل

بفرض أن طول ضلع الصفيحة = س سم ومساحتها = ص سم^{٢}

∴ ص = د (س) = س^{٢}

١ ∵ Δ ص = د (س$_{٢}$) − د (س$_{١}$) = د (١٠,٢) − د (١٠) = (١٠,٢)^{٢} − (١٠)^{٢} = ٤,٠٤

، Δ س = ١٠,٢ − ١٠ = ٠,٢

∴ متوسط التغير فى المساحة = $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$ = $\frac{٤,٠٤}{٠,٢}$ = ٢٠,٢

٢ عند س$_{١}$ = ٢٠ يكون م (هـ) = $\frac{\text{د (٢٠ + هـ) − د (٢٠)}}{\text{هـ}}$ ، هـ ≠ ٠

= $\frac{١}{\text{هـ}}$ [(٢٠ + هـ)^{٢} − (٢٠)^{٢}]

= $\frac{١}{\text{هـ}}$ (٤٠٠ + ٤٠ هـ + هـ^{٢} − ٤٠٠) = ٤٠ + هـ

∴ عندما طول الضلع = ٢٠ سم يكون معدل التغير فى المساحة = نهـا$_{\text{هـ} \to ٠}$ (٤٠ + هـ) = ٤٠

مثال ٧

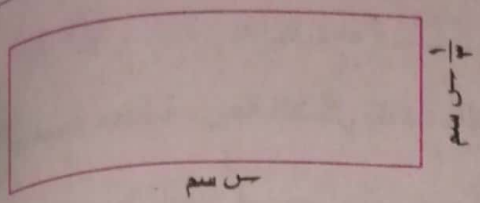
صفيحة معدنية رقيقة مستطيلة الشكل طولها ثلاثة أمثال عرضها تتمدد بحيث تظل محتفظة بشكلها وبالنسبة الثابتة بين بعديها **أوجد :**

١ معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لطولها عندما يكون طولها = ٦ سم

٢ معدل التغير فى مساحتها بالنسبة لعرضها عندما يكون عرضها = ٢ سم

Scanned by CamScanner

الحـــل



١ بفرض أن طول الصفيحة = س سم

∴ عرض الصفيحة = $\frac{١}{٣}$ س سم

وبفرض أن :

مساحة الصفيحة = ص سم^{٢}

∴ ص = س × $\frac{١}{٣}$ س

∴ ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٢}

عندما س = ٦ (طول المستطيل = ٦)

لاحظ أنه

* لإيجاد معدل التغير فى المساحة بالنسبة للطول
نفرض أن : الطول = س سم
* لإيجاد معدل التغير فى المساحة بالنسبة للعرض
نفرض أن : العرض = س سم

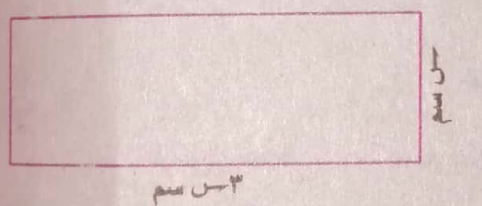
$$\therefore \text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(٦ + \text{هـ}) - \text{د}(٦)}{\text{هـ}} = \frac{\frac{١}{٣}(٦ + \text{هـ})^{٢} - \frac{١}{٣}(٦)^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{\frac{١}{٣}(٣٦ + ١٢\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}) - \frac{١}{٣} \times ٣٦}{\text{هـ}} = \frac{١٢ + ٤\,\text{هـ} + \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{٢} - ١٢}{\text{هـ}}$$

$$= ٤ + \frac{١}{٣}\,\text{هـ}$$

∴ عند س = ٦ يكون معدل التغير فى المساحة بالنسبة لطول ضلع الصفيحة

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(٤ + \frac{١}{٣}\,\text{هـ}\right) = ٤$$



٢ بفرض أن : عرض الصفيحة = س سم

∴ طول الصفيحة = ٣ س سم

وبفرض أن مساحة الصفيحة = ص سم^{٢}

∴ ص = س × ٣ س = ٣ س^{٢}

، عند س = ٢ (عرض الصفيحة = ٢)

$$\therefore \text{م}(\text{هـ}) = \frac{\text{د}(٢ + \text{هـ}) - \text{د}(٢)}{\text{هـ}} = \frac{٣(٢ + \text{هـ})^{٢} - ٣(٢)^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{٣(٤ + ٤\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢}) - ٣ \times ٤}{\text{هـ}} = \frac{١٢ + ١٢\,\text{هـ} + ٣\,\text{هـ}^{٢} - ١٢}{\text{هـ}} = ١٢ + ٣\,\text{هـ}$$

∴ عند س = ٢ يكون معدل التغير فى المساحة بالنسبة لعرض الصفيحة

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} (١٢ + ٣\,\text{هـ}) = ١٢$$

Scanned by CamScanner

تمارين 9

على معدل التغير

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ إذا كانت : د (س) = س^{٢} − س + ١ أوجد دالة التغير ت عند س = ٣
ثم أوجد ت (٢ , ٠) ، ت (−٣ , ٠)
«١,٠٤ ، −١,٤١»

٢ إذا كانت : د (س) = س^{٢} − ٣ س + ٤ أوجد :
(١) دالة التغير فى د عند س = ٣ ثم احسب قيمة ت (٥ , ٠)
(٢) مقدار التغير فى د (س) عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٤
«١,٧٥ ، ٠,٥٦»

٣ إذا كانت الدالة د : د (س) = س^{٢} + ٢ س − ١ أوجد التغير فى د (س) عندما :
(١) تتغير س من ٢ إلى ٢,٢
(٢) تتغير س من ٢ إلى ١,٨
(٣) تتغير س من ١ إلى ١ + هـ
(٤) س = ٢ ، هـ = $\frac{١}{٢}$
(٥) س = ٣ ، Δ س = ٠,٢
«١,٢٤ ، −١,١٦ ، هـ^{٢} + ٤ هـ ، ٣,٢٥ ، ١,٦٤»

٤ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : د (س) = س^{٢} + ٢ س وذلك عند س = ٢
ثم احسب متوسط التغير لهذه الدالة عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,١
«٦,١»

٥ إذا كانت : د (س) = س^{٢} + ٣ س − ١ فأوجد :
(١) دالة متوسط التغير عند س = ٢ ، ثم أوجد م (٢ , ٠)
(٢) متوسط التغير عندما تتغير س من ٤,٥ إلى ٣
«٧,٢ ، ١٠,٥»

٦ إذا كانت الدالة د : د (س) = س^{٢} − س فأوجد متوسط التغير للدالة د عندما
تزداد س بمقدار ٠,٣
«٢ س − ٠,٧»

Scanned by CamScanner

٧ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : د (س) = ٢ س^{٢} − ٣ س + ٤ عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + هـ ثم أوجد :

(١) متوسط التغير للدالة عند س = ٣ ثم احسب م (٢ ، ٠)

(٢) متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من ٣,٥ إلى ٤

(٣) معدل التغير للدالة عند س = ٢

«٩,٤ ، ١٢ ، ٥»

٨ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : د (س) = $\frac{١}{س}$ ومن ثم احسب معدل التغير لهذه الدالة عند س = $\sqrt{٥}$

«$\frac{-١}{٥}$»

٩ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : د (س) = $\frac{٣}{س - ٢}$

عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + هـ ثم استنتج معدل التغير فى د عند س = ٥ «$\frac{-١}{٣}$»

١٠ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\frac{س + ٢}{س - ٢}$ أوجد :

(١) دالة متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + هـ

(٢) متوسط التغير للدالة عندما تتغير س من ٣ إلى ٣$\frac{١}{٣}$

(٣) معدل التغير للدالة عند س = ٤

«$\frac{-٤}{(س_{١} - ٢)(س_{١} + هـ - ٢)}$ ، −٣ ، −١»

١١ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د : د (س) = $\sqrt{س + ٤}$ عندما تتغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + هـ ثم أوجد هذا المتوسط عندما س$_{١}$ = ٥ ، هـ = ١,٢٤

ثم أوجد معدل التغير للدالة عند س = ٥

«$\frac{٥}{٣١}$ ، $\frac{١}{٦}$»

١٢ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د حيث : د (س) = $\sqrt{س - ٥}$ عند س = س$_{١}$ ثم استنتج معدل التغير فى د عندما س = ٩

هل يمكن حساب معدل التغير فى د عندما س = ٥ ؟ فسر إجابتك. «$\frac{١}{٤}$»

١٣ إذا كانت الدالة د : د (س) = ظا س فأوجد معدل التغير للدالة عند س = π «١»

١٤ إذا كانت : د (س) = س^{٥} فأوجد معدل تغير الدالة د عندما س = ٢ «٨٠»

Scanned by CamScanner

١٥ إذا كانت : د (س) = س^{٢} + أ س − ٣ فأوجد دالة التغير ت (هـ) عندما س = ٢
وإذا كانت : ت $\left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{١٩}{٤}$ فأوجد : قيمة أ «٥»

١٦ إذا كانت : د (س) = أ س^{٢} + ب س + ٤ فأوجد عند س = ٣ دالة التغير ت (هـ)
وإذا كانت : د (٣) = ٤ ، ت $\left(\frac{١}{٢}\right) = ١\frac{٣}{٤}$ فما قيمة كل من : أ ، ب ؟ «١ ، −٣»

١٧ إذا كانت الدالة د : د (س) = ١ + أ س + ب س^{٢} وكان التغير لهذه الدالة عندما تتغير س من ٣ إلى ٢ يساوى ٧ وكان معدل التغير للدالة عند س = ٣ يساوى −٩
فأوجد قيمتى : أ ، ب «٣ ، −٢»

١٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت الدالة د : د (س) = ٣ س − ٢ فإن دالة التغير ت (هـ) = ...
عند س = ١

(أ) ٣ (ب) هـ (جـ) ٣ هـ (د) ٦ هـ

(٢) إذا كانت : د (س) = ٤ س + ١ فإن التغير فى د عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,١ يساوى .....

(أ) ٠,١ (ب) ٠,٤ (جـ) ٤ (د) ٤,١

(٣) متوسط تغير الدالة د حيث د (س) = س^{٢} عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,١ يساوى .....

(أ) ٠,٦١ (ب) ٦,١ (جـ) ٩ (د) ٩,٦١

(٤) إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٢,٤ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير فى د يساوى .....

(أ) ٠,٣٢ (ب) ٠,٤٨ (جـ) ٣,٦ (د) ٧,٢

(٥) إذا كان متوسط التغير فى د يساوى ٥ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ ، د (٢) = ٦
فإن : د (٤) = ...

(أ) −٤ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٦

Scanned by CamScanner

⑥ إذا كانت د دالة وكان التغير فى د يساوى ١٤ عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ فإن متوسط التغير فى د يساوى .....

(أ) ١٤ (ب) ٧ (جـ) $\frac{٧}{٢}$ (د) -٧

⑦ دائرة طول نصف قطرها نق فإن متوسط التغير فى محيط الدائرة عندما تتغير نق من نق$_١$ إلى نق$_٢$ هو .....

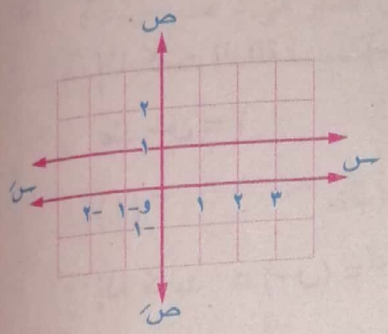
(أ) ٢ π نق$_١$ (ب) ٢ π (نق$_٢$ − نق$_١$)

(جـ) π نق$_١$ (د) ٢ π

⑧ متوسط التغير فى حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى .....

(أ) ١٢٥ (ب) ٣٤٣ (جـ) ٢١٨ (د) ١٠٩

⑨ فى الشكل المقابل :



متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من -١ إلى ٢ يساوى .....

(أ) صفر (ب) -١

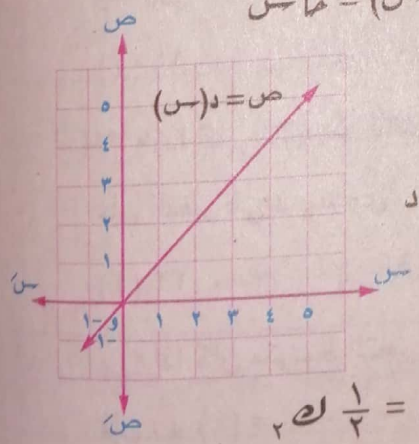
(جـ) ٢ (د) ٣

⑩ أى الدوال الآتية يكون التغير فى د يساوى صفر لجميع قيم س التى تتغير من أ إلى أ + هـ ؟

(أ) د (س) = س^٢ (ب) د (س) = ٣ س − ٢

(جـ) د (س) = ٧ (د) د (س) = جا س

⑪ فى الشكل المقابل :



إذا كان متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ١ إلى ٢ هو ك$_١$ وكان متوسط التغير للدالة د عندما تتغير س من ٢ إلى ٤ هو ك$_٢$ فإن : .....

(أ) ك$_١$ = ٢ ك$_٢$ (ب) ك$_١$ = $\frac{١}{٢}$ ك$_٢$

(جـ) ك$_١$ = ك$_٢$ (د) ك$_١$ = ٤ ك$_٢$

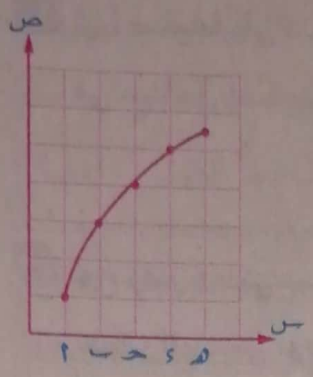
Scanned by CamScanner

(١٢) يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة د

حيث : ص = د (س)

فى أى الفترات التالية يكون متوسط

التغير فى د هو الأكبر ؟



(أ) [أ ، ب]　　(ب) [ب ، حـ]

(جـ) [حـ ، ء]　　(د) [أ ، هـ]

---

١٩ يوضح الشكل المقابل المنحنى

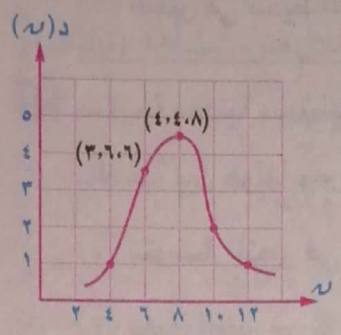
ر = د (ن) حيث ر جملة مبيعات أحد

منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلى مقدرًا

بملايين الجنيهات ، ن الزمن مقدرًا بالشهور.

أوجد من الرسم متوسط التغير فى جملة المبيعات

عندما يتغير الزمن من :



(١) ن = ٤ إلى ن = ٨　　(٢) ن = ٨ إلى ن = ١٠

(٣) ن = ٤ إلى ن = ١٢

«٠,٨٥ ، -١,٢ ، صفر»

---

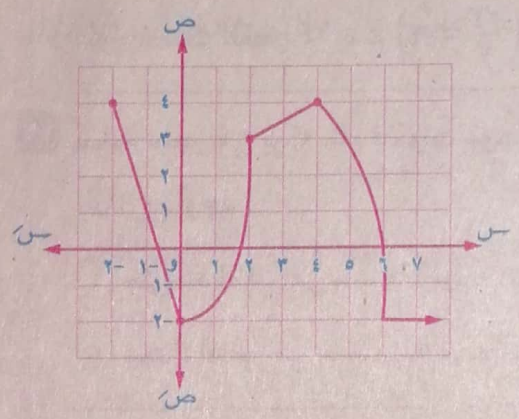
٢٠ تفكير ناقد :

يوضح الشكل المقابل منحنى

الدالة د حيث : ص = د (س)

حدد الفترات التى يكون فيها متوسط

التغير فى د ثابتًا ، وفسر إجابتك.



«]-٢ ، ٠[،]٢ ، ٤[،]٦ ، ∞[»

---

٢١ صفيحة على شكل مربع يتمدد بانتظام محتفظة بشكلها ، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها عندما يتغير طول ضلعها من ٣ سم إلى ٣,٤ سم ، ثم احسب معدل التغير فى مساحة سطحها عندما يكون طول ضلعها ٥ سم

«٦,٤ ، ١٠»

Scanned by CamScanner

٢٢ صفيحة على شكل مربع تنكمش بالتبريد محتفظة بشكلها المربع ، احسب معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها عندما يكون طول الضلع ٨ سم

«١٦»

٢٣ لوح رقيق معدنى مستطيل الشكل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ سم يتمدد بحيث يحتفظ بشكله الهندسى أوجد :

(١) التغير فى مساحة اللوح عندما يتغير عرضه من ٤ سم إلى ٤,٢ سم

(٢) التغير فى محيط اللوح عندما يتغير عرضه من ٣,٥ سم إلى ٣,٧ سم «٢,٢٤ ، ٠,٨»

٢٤ صفيحة معدنية مستطيلة الشكل طولها ضعف عرضها تتمدد بالحرارة بحيث تحتفظ بالنسبة بين طولها وعرضها أوجد :

(١) متوسط التغير فى مساحتها عندما يتغير طولها من ١٥ سم إلى ١٦,٥ سم

(٢) معدل التغير فى كل من مساحتها ومحيطها عندما يكون طولها ١٥ سم «١٥,٧٥ ، ١٥ ، ٣»

٢٥ صفيحة دائرية الشكل تتمدد بانتظام بحيث تحتفظ بشكلها. أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف القطر ١٤ سم $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «٨٨»

٢٦ سقط حجر فى بركة ماء فتكونت موجة دائرية تزداد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها الدائرى أوجد :

(١) متوسط التغير فى مساحة الموجة عندما يتغير طول نصف قطرها من ٦ سم إلى ٦,٣ سم

(٢) معدل التغير فى مساحتها عندما يكون طول نصف قطرها ٥ سم «١٢,٣ π ، ١٠ π»

٢٧ مكعب من المعدن يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظًا بشكله أوجد :

(١) متوسط التغير فى مساحته الكلية عندما يتغير طول حرفه من ٢ سم إلى ٢,١ سم

(٢) معدل التغير فى مساحته الكلية عندما يكون طول حرفه ٣ سم

(٣) معدل التغير فى حجم المكعب عندما يكون طول حرفه ٤ سم «٢٤,٦ ، ٣٦ ، ٤٨»

Scanned by CamScanner

٢٨ فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروى، احسب متوسط التغير فى مساحة سطحها الكروى عندما يتغير طول نصف قطرها من ٠,٥ سم إلى ٠,٦ سم ، علمًا بأن مساحة سطح الكرة يساوى ٤ π نق^{٢} حيث نق طول نصف قطر الكرة. «٤,٤ π»

---

٢٩ إذا كانت الكمية ص (مقيسة بالكيلوجرام) التى تنتجها شجرة برتقال متوسطة الإنتاج، يتوقف على عدد الكيلوجرامات س من المبيد الحشرى المستخدم لرش الشجرة طبقًا للعلاقة ص = ١٠٠ − $\frac{٤٢}{س + ١}$ احسب متوسط التغير فى ص عندما تتغير س من ١ إلى ٢ «٧»

---

٣٠ إذا كانت المسافة ف التى يقطعها جسم متحرك فى خط مستقيم خلال فترة زمنية ن (بالثانية) تعطى بالعلاقة : ف = ن^{٢} + ٣ ن + ٢ حيث ف مقيسة بالمتر أوجد :

(١) متوسط التغير فى المسافة عندما تتغير ن من ٢ ثانية إلى ٤ ثانية.

(٢) معدل التغير فى المسافة بالنسبة للزمن (السرعة) عندما ن = ٥ ثانية. «٩ ، ١٣»

---

٣١ يعطى حجم مزرعة للبكتيريا عند أى لحظة زمنية ن (مقيسة بالدقائق) بالعلاقة د (ن) = ٢ ن^{٣} + ١٠٠ ملليجرام أوجد معدل النمو اللحظى للدالة د عندما ن = ٥ «١٥٠»

---

٣٢ إذا كان نمو أحد المجتمعات يتبع العلاقة د (ن) = ٦ ن^{٢} + ٥٠٠٠٠ حيث ن مقيسة بالأيام فأوجد :

(١) متوسط معدل النمو عندما تتغير ن من ن$_{١}$ إلى ن$_{١}$ + هـ

(٢) متوسط معدل النمو خلال فترة زمنية طولها ٦ أيام اعتبارًا من بداية اليوم الثالث.

(٣) متوسط معدل النمو خلال اليوم السابع.

(٤) معدل النمو اللحظى عندما ن = ٤ «٦ هـ + ١٢ ن$_{١}$ ، ٦٠ ، ٧٨ ، ٤٨»

---

٣٣ صفيحة على شكل مثلث طول قاعدتها يساوى ضعف ارتفاعها المناظر ، تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها. احسب متوسط التغير فى مساحتها إذا تغير ارتفاعها من ٨ سم إلى ٨,٤ سم «١٦,٤»

Scanned by CamScanner

٣٤ صفيحة رقيقة على شكل مثلث متساوى الأضلاع تتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها أوجد :

(١) متوسط التغير فى مساحة الصفيحة عندما يتغير طول ضلعها من ٣,٥ سم إلى ٤,٥ سم

(٢) معدل التغير فى مساحة الصفيحة عندما يكون ارتفاعها ٣ $\sqrt{٣}$ سم «٢ $\sqrt{٣}$ ، ٣ $\sqrt{٣}$»

للمتفوقين

٣٥ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢ س^{٢} - ٣ ، & س \geq ٢ \\ ٢ س + ١ ، & س < ٢ \end{cases}$ فأوجد :

(١) متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ١ إلى ٢

(٢) متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٤ إلى ٤,٥ «٦ ، ٢»

Scanned by CamScanner

الدرس 2

الاشتقاق

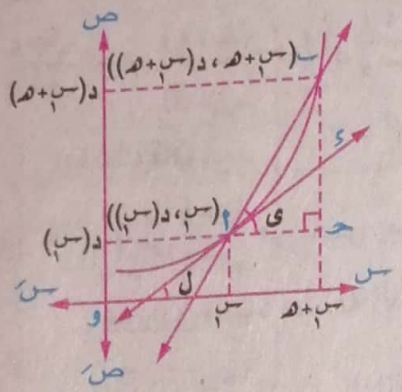
التفسير الهندسى لمتوسط ومعدل التغير

نفرض أن الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص = د (س)

وأن النقطتين أ (س$_1$ ، د (س$_1$))

، ب(س$_1$ + هـ ، د (س$_1$ + هـ))

تقعان على منحنى الدالة فيكون :



١ أحـ = هـ ، ب حـ = د (س$_1$ + هـ) − د (س$_1$)

∴ متوسط التغير = $\frac{\text{د (س}_1\text{ + هـ) − د (س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$ = ظا ى = ميل القاطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

٢ إذا ثبتنا النقطة أ وتصورنا أن النقطة ب تتحرك على منحنى الدالة مقتربة من النقطة أ فإن حـ تقترب أيضًا من أ أى أحـ = هـ ← الصفر وفى الوضع النهائى يقترب القاطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ من الانطباق على المماس $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ الذى يمس المنحنى عند أ (س$_1$ ، د (س$_1$))

وتؤول الزاوية ى إلى الزاوية ل

أى أن

ميل المماس لمنحنى الدالة (ص = د (س)) عند النقطة (س$_1$ ، د (س$_1$))

= ظا ل = $\underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{د (س}_1\text{ + هـ) − د (س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$ إن وجدت

= معدل تغير الدالة عند (س = س$_1$)

Scanned by CamScanner

المشتقة الأولى للدالة

المقدار $\underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ له قيمة وحيدة عند كل قيمة للمتغير س ∈ مجال الدالة لذلك فهو دالة في س يطلق عليها «الدالة المشتقة» أو «المشتقة الأولى للدالة» أو «المعامل التفاضلي الأول للدالة».

تعريف

إذا كانت د :]أ ، ب[← ح ، س ∈]أ ، ب[فإن الدالة المشتقة دَ :

$دَ(س) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ بشرط أن تكون النهاية موجودة.

وإذا كانت ص = د (س) فيرمز للمشتقة الأولى لهذه الدالة بأحد الرموز :

$\frac{ءص}{ءس}$ أو صَ أو دَ (س) أو $\frac{ء}{ءس}$ [د (س)]

ملاحظتان

١ الرمز $\frac{ءص}{ءس}$ هو تعبير رياضي لا يفسر على أنه خارج قسمة مقدارين ءص ، ءس بل هو رمز معناه مشتقة الدالة ص بالنسبة للمتغير س ويقرأ «دال ص دال س»

٢ ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة $(س_١ ، د(س_١))$ هو $دَ(س_١)$

مثال ١

باستخدام تعريف المشتقة أوجد مشتقة الدالة د :

د (س) = $س^٢$ + ٢ س − ٥ ثم أوجد ميل المماس عند النقطة (٣ ، ١٠)

الحل

∵ د (س) = $س^٢$ + ٢ س − ٥

∴ د (س + هـ) = $(س + هـ)^٢$ + ٢ (س + هـ) − ٥

= $س^٢$ + ٢ س هـ + $هـ^٢$ + ٢ س + ٢ هـ − ٥

∴ د (س + هـ) − د (س) = ٢ س هـ + $هـ^٢$ + ٢ هـ = هـ (٢ س + هـ + ٢)

، ∵ $دَ(س) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

Scanned by CamScanner

∴ دَ (س) = نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{هـ (٢ س + هـ + ٢)}{هـ}$ = نهـا$_{هـ \to ٠}$ (٢ س + هـ + ٢) = ٢ س + ٢

، ∵ د (٣) = (٣)^{٢} + ٢ (٣) − ٥ = ١٠ ∴ النقطة (٣ ، ١٠) تقع على المنحنى.

∴ ميل المماس عند (س = ٣) = دَ (٣) = ٢ × ٣ + ٢ = ٨

مثال ٢

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د : د (س) = س^{٣} − ٣ عند النقطة أ (٢ ، ٥) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة أ لأقرب دقيقة.

الحل

∵ د (٢) = (٢)^{٣} − ٣ = ٥ ∴ النقطة (٢ ، ٥) تقع على المنحنى

∴ ميل المماس عند (س = ٢) = نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{د (٢ + هـ) - د (٢)}{هـ}$

= نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{(٢ + هـ)^{٣} - ٣ - (٢)^{٣} + ٣}{هـ}$

= نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{(٢ + هـ)^{٣} - (٢)^{٣}}{هـ}$

= ٣ (٢)^{٢} = ١٢

∴ ظا (ل) = ١٢ ∴ ق (∠ ل) = ظا$^{-١}$ (١٢) ≈ ٨٥° ١٤َ

للحظ أن

ميل المماس = ظا ل حيث ل هى قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

قابلية الدالة للاشتقاق عند نقطة

يقال إن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ (حيث أ ∈ مجال د)

إذا وفقط إذا كانت دَ (أ) لها وجود حيث دَ (أ) = نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{د (أ + هـ) - د (أ)}{هـ}$

* إذا وجدت مشتقة للدالة د عند كل نقطة تنتمى إلى الفترة]حـ ، ء[نقول إن الدالة د قابلة للاشتقاق فى هذه الفترة.

* أى دالة كثيرة حدود تكون قابلة للاشتقاق على ح

Scanned by CamScanner

المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى

إذا كانت س = أ تنتمى لمجال الدالة د وكانت الدالة تغير قاعدتها على يمين ويسار أ فعند البحث عن قابلية الاشتقاق عند س = أ لابد من بحث المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى للدالة عند س = أ والمقارنة بينهما حيث

المشتقة اليمنى للدالة = دَ (أ$^{+}$) = $\underset{\text{هـ} \to 0^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د (أ + هـ) − د (أ)}}{\text{هـ}}$

والمشتقة اليسرى للدالة = دَ (أ$^{-}$) = $\underset{\text{هـ} \to 0^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{د (أ + هـ) − د (أ)}}{\text{هـ}}$

فإذا كان :

- دَ (أ$^{+}$) = دَ (أ$^{-}$) فإن الدالة د قابلة للاشتقاق عند س = أ ويكون دَ (أ) = دَ (أ$^{+}$) = دَ (أ$^{-}$)
- دَ (أ$^{+}$) ≠ دَ (أ$^{-}$) فإن الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند س = أ

العلاقة بين الاشتقاق والاتصال

نظرية «بدون برهان»

إذا كانت الدالة ص = د (س) قابلة للاشتقاق عند النقطة س = أ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

ملاحظات

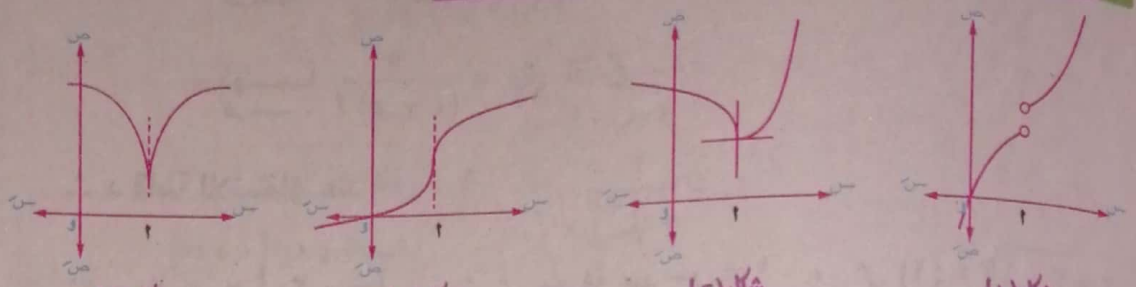
١ البحث فى اتصال دالة أو قابلية اشتقاقها عند نقطة يتطلب أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أى تكون هذه النقطة ضمن مجال تعريف الدالة.

٢ إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فليس من الضرورى أن تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة أما إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند نقطة فمن الضرورى أن تكون متصلة عند هذه النقطة.

٣ إذا كانت الدالة د غير متصلة عند نقطة ما فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

Scanned by CamScanner

ملاحظات هامة على بعض منحنيات الدوال



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

المنحنيات السابقة تمثل دوال غير قابلة للاشتقاق عند س = أ أى عندها دَ (أ) غير موجودة وذلك لأحد الأسباب التالية :

* المنحنى غير متصل عند س = أ أى المنحنى به قفزة أو ثغرة كما بالشكل (١)
* المنحنى به (ركن حاد مدبب عند س = أ) وذلك لأن المشتقتين اليسرى واليمنى موجودتان ولكنهما غير متساويتين كما بالشكل (٢)
* المنحنى له مماس رأسى عند س = أ كما بالشكلين (٣) ، (٤)

ملاحظة هامة

عند بحث اشتقاق دالة عند نقطة فى مجالها ، لا يلزم بحث اتصالها عند هذه النقطة أولًا بل يمكن بحث قابلية اشتقاقها عند هذه النقطة مباشرة.

ولكن يفضل بحث الاتصال أولًا فإذا كانت متصلة عند هذه النقطة نبحث الاشتقاق وإذا كانت غير متصلة فالدالة غير قابلة للاشتقاق.

مثال ٣

ابحث قابلية الاشتقاق عند س = ١ لكل من الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين :

١ د (س) = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ٣}$ ٢ ر (س) = $\sqrt{\text{س} + ٣}$

الحل

١ ∵ مجال د = ح − {−٣} ∴ د معرفة عند س = ١ ، د (١) = $\frac{١ - ٢}{١ + ٣} = \frac{-١}{٤}$

∴ دَ (١) = $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د (١ + هـ) − د (١)}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \left[\frac{١ + \text{هـ} - ٢}{١ + \text{هـ} + ٣} + \frac{١}{٤}\right]$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{هـ}} \left[\frac{\text{هـ} - ١}{\text{هـ} + ٤} + \frac{١}{٤}\right] = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{\text{هـ}} \times \frac{٤(\text{هـ} - ١) + (\text{هـ} + ٤)}{٤(\text{هـ} + ٤)}\right)$

Scanned by CamScanner

$$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{٤هـ - ٤ + هـ + ٤}{٤هـ(هـ + ٤)} \right) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥هـ}{٤هـ(هـ + ٤)}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٥}{٤(هـ + ٤)} = \frac{٥}{١٦} \in ح$$

∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١

٢ ∵ مجال ر = [-٣ ، ∞[∴ ر معرفة عند س = ١ ، ر (١) = $\sqrt{١ + ٣}$ = ٢

$$\therefore ر'(١) = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ر(١ + هـ) - ر(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١ + هـ + ٣} - ٢}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{هـ + ٤} - ٢}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(هـ + ٤)^{\frac{١}{٢}} - (٤)^{\frac{١}{٢}}}{هـ} = \frac{١}{٢}(٤)^{\frac{١}{٢} - ١}$$

$$= \frac{١}{٤} \in ح$$

∴ ر قابلة للاشتقاق عند س = ١

مثال ٤

إذا كانت الدالة د : د (س) = $\sqrt{س}$ + ٥ أوجد : دَ (س) ثم أوجد : دَ (١) ، دَ (٩)

الحل

∵ د (س) = $\sqrt{س}$ + ٥ ∴ د (س + هـ) = $\sqrt{س + هـ}$ + ٥

∴ د (س + هـ) − د (س) = $\sqrt{س + هـ}$ + ٥ − ($\sqrt{س}$ + ٥) = $\sqrt{س + هـ}$ − $\sqrt{س}$

$$\therefore \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + هـ} - \sqrt{س}}{هـ} \times \frac{(\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}{(\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س + هـ - س}{هـ(\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{هـ}{هـ(\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س})}$$

$$= \underset{هـ \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt{س + هـ} + \sqrt{س}}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{س} + \sqrt{س}}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

$$\therefore دَ(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$$

$$\therefore دَ(١) = \frac{١}{٢\sqrt{١}} = \frac{١}{٢} \quad ، \quad دَ(٩) = \frac{١}{٢\sqrt{٩}} = \frac{١}{٦}$$

لاحظ أن

مجال د هو [٠ ، ∞[

، مجال دَ هو]٠ ، ∞[

وبالتالى تكون د (٠) = ٥ (معرفة)

بينما دَ (٠) غير معرفة.

مثال ٥

ابحث اتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢س - ٥ & ، س \le ٢ \\ ٢س + ٥ & ، س > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

الحل

∵ د(٢^+) = ٢ × ٢ − ٥ = −١ ، د(٢^-) = ٢ × ٢ + ٥ = ٩

∴ د(٢^+) ≠ د(٢^-) ∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٢

وبالتالى تكون د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

مثال ٦

ابحث اتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ٢س & ، س \le ١ \\ ٤س - ١ & ، س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

الحل

• بحث الاتصال عند س = ١

∵ د(١) = $(١)^٢$ + ٢ × ١ = ٣

، د(١^-) = $\underset{س \to ١^-}{\text{نهـا}}$ ($س^٢$ + ٢س) = ٣ ، د(١^+) = $\underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}}$ (٤س − ١) = ٣

∴ د(١^-) = د(١^+) = د(١) = ٣ ∴ د متصلة عند س = ١

Scanned by CamScanner

* بحث قابلية الاشتقاق عند س = ١

$$د'(١^-) = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{(١+هـ)^٢ + ٢(١+هـ) - ٣}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{١ + ٢هـ + هـ^٢ + ٢ + ٢هـ - ٣}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{٤هـ + هـ^٢}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} (٤ + هـ) = ٤$$

$$د'(١^+) = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{د(١+هـ) - د(١)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{٤(١+هـ) - ١ - ٣}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{٤ + ٤هـ - ١ - ٣}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{٤هـ}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} ٤ = ٤$$

∴ $د'(١^-) = د'(١^+) = ٤$ ∴ د قابلة للاشتقاق عند س = ١ ويكون $د'(١) = ٤$

مثال ٧

ابحث اتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د : د (س) = |س − ٣| عند س = ٣

الحل

$$∵ د(س) = \begin{cases} س - ٣ & ، س > ٣ \\ ٠ & ، س = ٣ \\ ٣ - س & ، س < ٣ \end{cases}$$

* بحث الاتصال عند س = ٣

∵ د (٣) = ٠ ، $د(٣^-) = \underset{س \to ٣^-}{نهـا} (٣ - س) = ٠$ ، $د(٣^+) = \underset{س \to ٣^+}{نهـا} (س - ٣) = ٠$

∴ $د(٣^-) = د(٣^+) = د(٣) = صفر$ ∴ د متصلة عند س = ٣

* بحث قابلية الاشتقاق عند س = ٣

$$د'(٣^-) = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{د(٣+هـ) - د(٣)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{٣ - (٣+هـ) - ٠}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{-هـ}{هـ} = -١$$

$$، د'(٣^+) = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{د(٣+هـ) - د(٣)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{(٣+هـ) - ٣ - ٠}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{هـ}{هـ} = ١$$

∴ $د'(٣^-) \neq د'(٣^+)$ ∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٣

مثال ٨

إذا كانت الدالة د حيث : $د(س) = \begin{cases} س + ٥ & عندما\ س < ٢ \\ ٢س^٢ + أ & عندما\ س \geq ٢ \end{cases}$ متصلة عند س = ٢

فأوجد قيمة : الثابت أ ، ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة د عند س = ٢

الحل

∵ د متصلة عند س = ٢ ، ∵ $د(٢^-) = ٢ + ٥ = ٧$ ، $د(٢^+) = ٨ + أ$

∴ ٨ + أ = ٧ ∴ أ = −١

$$، ∵ د'(٢^-) = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{٢ + هـ + ٥ - ٧}{هـ} = ١$$

$$، د'(٢^+) = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{د(٢+هـ) - د(٢)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{٢(٢+هـ)^٢ - ١ - ٧}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{٨ + ٨هـ + ٢هـ^٢ - ٨}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} (٨ + ٢هـ) = ٨$$

∴ $د'(٢^-) \neq د'(٢^+)$ ∴ د غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

مثال ٩

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة د : $د(س) = \begin{cases} جا\ س & ، س \geq \frac{\pi}{٢} \\ ١ + جتا\ س & ، س < \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$

الحل

$$∵ د\left(\frac{\pi}{٢}\right) = جا \frac{\pi}{٢} = ١$$

$$، ∵ د'\left(\frac{\pi}{٢}^-\right) = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{د\left(\frac{\pi}{٢} + هـ\right) - د\left(\frac{\pi}{٢}\right)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{جا\left(\frac{\pi}{٢} + هـ\right) - ١}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^-}{نهـا} \frac{جتا\ هـ - ١}{هـ} = صفر$$

$$، د'\left(\frac{\pi}{٢}^+\right) = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{د\left(\frac{\pi}{٢} + هـ\right) - د\left(\frac{\pi}{٢}\right)}{هـ} = \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{١ + جتا\left(\frac{\pi}{٢} + هـ\right) - ١}{هـ}$$

$$= \underset{هـ \to ٠^+}{نهـا} \frac{-جا\ هـ}{هـ} = -١$$

∴ $د'\left(\frac{\pi}{٢}^-\right) \neq د'\left(\frac{\pi}{٢}^+\right)$ ∴ د غير قابلة للاشتقاق عند $س = \frac{\pi}{٢}$

Scanned by CamScanner

مثال ١٠

إذا كانت د (س) = أ س^{٢} + ب حيث أ ، ب ثابتان وكان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١ ، −١) الواقعة عليه يساوى ٨ أوجد قيم : أ ، ب

الحل

∵ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (١ ، −١) = دَ (١) ∴ دَ (١) = ٨

، ∵ دَ (١) = $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د (١ + هـ) − د (١)}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ (١ + هـ)}^{٢} + \text{ب} - \text{(أ + ب)}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ} + ٢\text{أ هـ} + \text{أ هـ}^{٢} + \text{ب} - \text{أ} - \text{ب}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{أ هـ} + \text{أ هـ}^{٢}}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}}$ ٢ أ + أ هـ = ٢ أ

∴ ٢ أ = ٨ ∴ أ = ٤

، ∵ النقطة (١ ، −١) ∈ منحنى الدالة. ∴ د (١) = −١

∴ أ + ب = −١ ∴ ٤ + ب = −١ ∴ ب = −٥

Scanned by CamScanner

تمارين 10

على الاشتقاق

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ باستخدام تعريف المشتقة أوجد دَ (س) لكل من الدوال الآتية :

(١) د (س) = ٨

(٢) د (س) = ٥ س − ٧

(٣) د (س) = س^{٢} + ٥

(٤) د (س) = ٩ س + س^{٢}

(٥) د (س) = س^{٣} − ٢

(٦) د (س) = $\frac{١}{س}$

(٧) د (س) = $\frac{٧}{س}$ − ٢

(٨) د (س) = ٥ − ٤ $\sqrt{س}$

(٩) د (س) = $\sqrt{٣ س + ١}$

(١٠) د (س) = $\frac{س}{س + ٥}$

٢ باستخدام تعريف المشتقة أوجد ميل المماس لكل من منحنيات الدوال الآتية عند النقطة المبينة ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند نفس النقطة لأقرب دقيقة :

(١) د (س) = ٣ س^{٢} − ٥ عند النقطة (٢ ، ٧) «١٢ ، ٨٥° ١٤َ»

(٢) د (س) = ١ − ٥ س − ٣ س^{٢} عند النقطة (−١ ، ٣) «١ ، ٤٥°»

(٣) د (س) = س^{٣} − ٤ عند النقطة (١ ، −٣) «٣ ، ٧١° ٣٤َ»

(٤) د (س) = $\sqrt[٣]{س + ٣}$ عند النقطة (٥ ، ٢) «$\frac{١}{١٢}$ ، ٤° ٤٦َ»

٣ أثبت أن الدالة د : د (س) = س^{٢} − س + ١ قابلة للاشتقاق عند س = ١

٤ ابحث اتصال وقابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة :

(١) د (س) = { ٢ س − ١ ، س < ٣ ؛ ٧ − س ، س ≥ ٣ } عند س = ٣

(٢) د (س) = { س^{٢} ، س > ٢ ؛ ٤ س − ١ ، س ≤ ٢ } عند س = ٢

(٣) د (س) = { س^{٢} − ٥ ، س < ٢ ؛ ٤ س − ٩ ، س ≥ ٢ } عند س = ٢

Scanned by CamScanner

④ د (س) = { ١ − س^{٣} ، س > −١ ؛ ٥ + $\frac{٣}{س}$ ، س ≤ −١ } عند س = −١

٥ ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :

① د (س) = { ٢ س − ٣ ، س ≤ ١ ؛ س^{٢} − ٢ ، س > ١ } عند س = ١

② د (س) = { ٤ − س^{٢} ، س ≤ ١ ؛ ٢ س + ١ ، س > ١ } عند س = ١

③ د (س) = { س^{٢} + ٤ س − ٣ ، س < ١ ؛ ٣ س^{٢} − ١٢ س + ١١ ، س ≥ ١ } عند س = ١

٦ بين أن الدالة د : د (س) = { س^{٢} ، س ≤ ٢ ؛ س + ٢ ، س > ٢ } غير قابلة للاشتقاق عند س = ٢

٧ ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :

① د (س) = $\frac{س − ١}{س + ١}$ عند س = ٢

② د (س) = س + $\frac{١}{س}$ عند س = ١

③ د (س) = $\sqrt{س − ٤}$ عند س = ٤

④ د (س) = $\sqrt{س + ١}$ عند س = ٣

⑤ د (س) = $\sqrt[٣]{(س + ٢)^{٢}}$ عند س = ٦

⑥ د (س) = |س − ٢| عند س = ٢

⑦ د (س) = $\sqrt{س^{٢} + ٦ س + ٩}$ عند س = −٣

⑧ د (س) = ٣ + |س + ٢| عند س = −٢

⑨ د (س) = س |س| عند س = ٠

Scanned by CamScanner

٨ ابحث قابلية اشتقاق كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة :

① د (س) = { س |س| + ٥ ، س ≤ ٠ ؛ س / |س| + ٦ ، س > ٠ } عند س = ٠

② د (س) = { ٢ س + ٣ ، س ≤ ٠ ؛ ٣ + ظا ٢ س ، س > ٠ } عند س = ٠

③ د (س) = { جتا ٢ س ، س ≤ π/٢ ؛ − جا س ، س > π/٢ } عند س = π/٢

٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : نهـا (س ← ٢⁻) د (س) = ٢ ك + ٣ ، نهـا (س ← ٢⁺) د (س) = ك − ١ وكانت الدالة قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) −٤

② ميل المماس لمنحنى الدالة د عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة عليه يساوى .....

(أ) د (س١ + هـ) − د (س١) (ب) (د (س١ + هـ) − د (س١)) / هـ

(جـ) نهـا (هـ ← ٠) (د (س١ + هـ) − د (س١)) / هـ (د) نهـا (س١ ← ٠) (د (س١) − د (هـ)) / (س١ − هـ)

③ جميع العبارات التالية خطأ ماعدا .....

(أ) إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فإنها تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

(ب) إذا كانت الدالة غير قابلة للاشتقاق عند نقطة فإن الدالة تكون غير معرفة عند تلك النقطة.

(جـ) إذا كانت الدالة د غير متصلة عند نقطة فإن الدالة تكون غير قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة.

(د) إذا كانت الدالة لها مشتقة يمنى ومشتقة يسرى عند نقطة فإنها تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

④ إذا كانت : د دالة وكان د (١) = ٥ ، دَ (١) = ٤ فإن : نهـا (س ← ١) د (س) = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٩ (د) غير موجودة.

Scanned by CamScanner

⑤ إذا كانت : د (س) = { س² ، س ≤ ٢ ؛ ٤س ، س > ٢ } فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) غير موجودة.

⑥ إذا كانت : د (س) = { س² + أ ، س ≤ ٢ ؛ أس + ب ، س > ٢ }

قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) −٨ (د) ٨

⑦ الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن قيمة س التى تكون عندها الدالة

غير قابلة للاشتقاق هى .....

(أ) −٢ (ب) ٢

(جـ) ٤ (د) (أ ، ب) معًا.

⑧ إذا كان منحنى الدالة د فى الشكل المقابل يمثله

المستقيم ل فإن متوسط التغير للدالة د هو .....

(أ) ظا ٣٠° (ب) جا ٣٠°

(جـ) جتا ٣٠° (د) − ظا ٣٠°

⑨ الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : ح ⟵ ح حيث ص = د (س)

، ↔ حـ ء قاطعًا للمنحنى فى حـ ، ء

فإن متوسط التغير للدالة د = ...

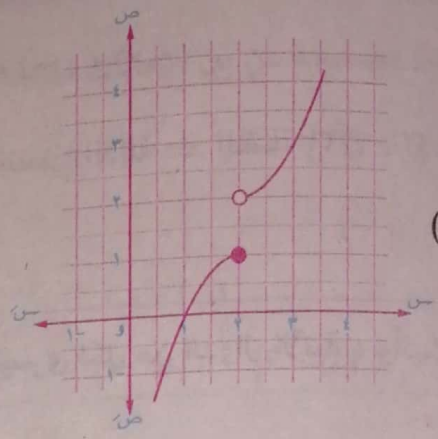
(أ) ٣/٥ (ب) ٤/٣

(جـ) ٣/٤ (د) ٤/٥

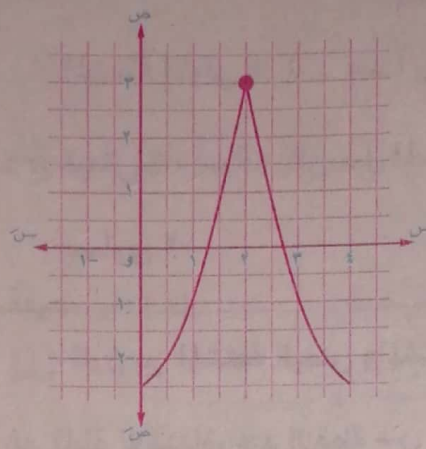
Scanned by CamScanner

(١٠) أى الدوال الآتية قابلة للاشتقاق عند س = ٢ ؟

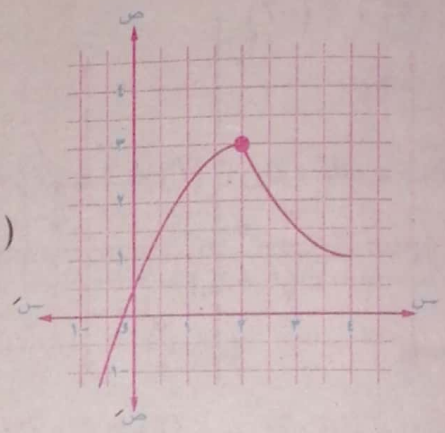
(أ)



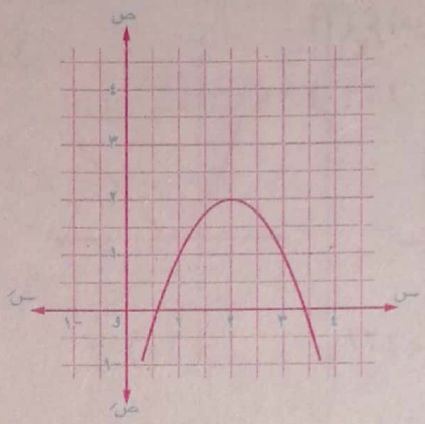
(ب)



(جـ)



(د)



---

١٠ إذا كانت كل من الدوال الآتية متصلة عند النقطة المبينة أوجد قيمة أ ثم ابحث قابلية هذه الدوال للاشتقاق عند نفس النقطة :

(١) د (س) = { أ س^{٢} + ١ ، س ≤ ٢ ؛ ٤ س − ٣ ، س > ٢ } عند س = ٢ «١»

(٢) د (س) = { ٣ س + ٢ ، س < ٢ ؛ أ س^{٣} ، س ≥ ٢ } عند س = ٢ «١»

---

١١ أوجد قيم أ ، ب إذا كانت كل من الدوال الآتية قابلة للاشتقاق عند النقطة المبينة :

(١) د (س) = { ٤ − أ س^{٢} ، س ≤ ٢ ؛ س + ب ، س > ٢ } عند س = ٢ «$-\frac{١}{٤}$ ، ٣»

(٢) د (س) = { س^{٢} − ٤ ، س ≤ ٢ ؛ أ س + ب ، س > ٢ } عند س = ٢ «٤ ، −٨»

Scanned by CamScanner

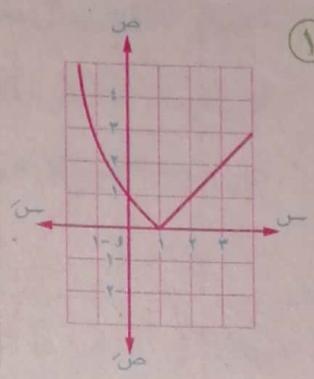
١٢ إذا كان : د (س) = أ س^{٢} + ب حيث أ ، ب ثابتان أوجد :

(١) المشتقة الأولى للدالة د عند أى نقطة (س ، ص)

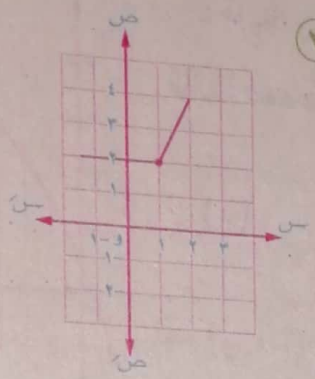
(٢) قيمتى أ ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (٢ ، −٣) الواقعة عليه يساوى ١٢ «٣ ، −١٥»

١٣ قارن بين المشتقة اليمنى والمشتقة اليسرى لكل من الدوال الآتية ، وأثبت أن كلاً منها غير قابلة للاشتقاق عند النقطة س = ١

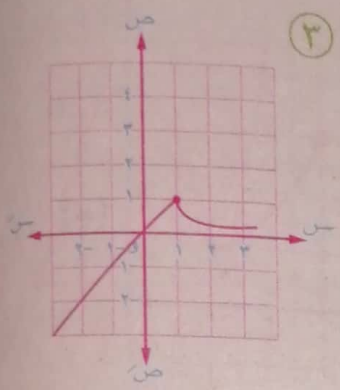
(١)



(٢)



(٣)



١٤ إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{أ س} - ٢ \text{ ، س} < ٢ \\ ٤ \text{ ، س} = ٢ \\ \text{أ} + \text{ب س} \text{ ، س} > ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ فأوجد قيم : أ ، ب ثم ابحث قابلية اشتقاق د عند س = ٢ «١ ، ١,٥»

١٥ د (س) = $\begin{cases} \text{م س} + ٣\text{ حـ} \text{ ، س} < ١ \\ \text{حـ س}^{٢} + ٤\text{ م} \text{ ، س} \geq ١ \end{cases}$

متصلة عند س = ١ ، د (١) = ١١

أوجد قيم الثابتين : م ، حـ ثم ابحث قابلية اشتقاق الدالة عند س = ١ «٢ ، ٣»

Scanned by CamScanner

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان د (أ) = صفر ، دَ (أ) = ب حيث ب > ٠ وكان : ر (س) = | د (س) |

فإن : رَ (أ) = ...

(أ) ب (ب) − ب (جـ) صفر (د) غير معرفة.

② $\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(هـ + ٣) - د(هـ - ٢) + د(-٢) - د(٣)}{هـ}$ = ...

(أ) دَ (٣) + دَ (−٢) (ب) دَ (٣)

(جـ) دَ (−٢) (د) دَ (٣) − دَ (−٢)

③ إذا كانت د دالة وكان دَ (١) = ٢ د (١) = ٤

فإن : $\lim_{هـ \to ٠} \frac{٣ هـ}{د(١ + هـ) - ٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) ١٢ (د) $\frac{١}{٤}$

④ إذا كانت د دالة وكان : د (٢) = ٤ ، دَ (٢) = ١

فإن : $\lim_{س \to ٢} \frac{س د(٢) - ٢ د(س)}{س - ٢}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

⑤ إذا كان منحنى الدالة د : د (س) = $س^٢$ − ١ يمر بالنقطتين :

أ (٢ ، د (٢)) ، ب (٣ ، د (٣)) فإن : $\frac{\text{ميل القاطع } \overleftrightarrow{أب}}{\text{ميل المماس للمنحنى عند أ}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) $\frac{٥}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) ١

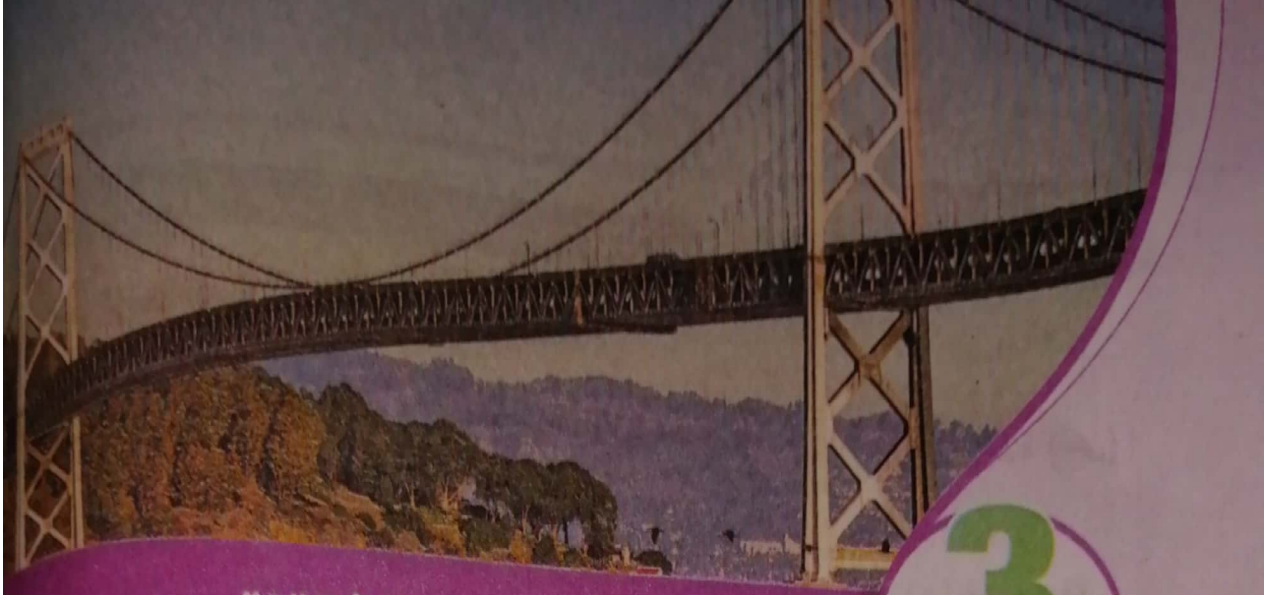
---

١٧ إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} ٢س + ٣ & ، س < ٢ \\ أ س^٢ + ب س - ١ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

متصلة عند س = ٢ وكان متوسط تغير د عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوى ٤,٥

أوجد قيمتى : أ ، ب ثم ابحث قابلية اشتقاق هذه الدالة عند س = ٢ «١ ، ٢»

Scanned by CamScanner



الدرس 3

قواعد الاشتقاق

إن إيجاد مشتقة الدالة من خلال التعريف قد يستغرق وقتًا وجهدًا ولتسهيل ذلك إليك بعض القواعد التى توفر لك أسلوبًا سهلاً للحصول على المشتقة.

١ مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت : د (س) = أ حيث أ ثابت فإن : دَ (س) = صفر

فمثلًا : – إذا كانت : د (س) = ٤ فإن : دَ (س) = صفر

– إذا كانت : د (س) = ٢٥ جا $\frac{\pi}{٣}$ فإن : دَ (س) = صفر

٢ مشتقة الدالة د : د (س) = $س^{ن}$

إذا كانت : د (س) = $س^{ن}$ حيث ن ∈ ح فإن : دَ (س) = ن $س^{ن-١}$

فمثلًا : – إذا كانت : د (س) = $س^{٤}$ فإن : دَ (س) = ٤ $س^{٣}$

– إذا كانت : د (س) = $س^{-\frac{٥}{٢}}$ فإن : دَ (س) = $-\frac{٥}{٢}$ $س^{-\frac{٧}{٢}}$

إذا كانت : د (س) = أ $س^{ن}$ حيث أ ثابت ، ن ∈ ح فإن : دَ (س) = أ ن $س^{ن-١}$

Scanned by CamScanner

فمثلًا : - إذا كانت : د (س) = ٢ س^{٥} فإن : دَ (س) = ١٠ س^{٤}

- إذا كانت : ص = ٦ $\sqrt{\text{س}}$ = ٦ س$^{\frac{١}{٢}}$ فإن : صَ = ٣ س$^{-\frac{١}{٢}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{\text{س}}}$

- إذا كانت : ص = س^{٢} $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ = س$^{\frac{٢}{٣}}$ فإن : صَ = $\frac{٨}{٣}$ س$^{١\frac{٢}{٣}}$

لاحظ أنه

* إذا كانت : ص = س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١
* إذا كانت : ص = $\sqrt{\text{س}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$
* إذا كانت : ص = $\frac{١}{\text{س}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$

٣ مشتقة مجموع دالتين أو الفرق بينهما

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : ص = د (س) ± ر (س) فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = دَ (س) ± رَ (س)

وبصفة عامة : إذا كانت د$_{١}$ ، د$_{٢}$ ، ..... ، د$_{ن}$ دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت ص = د$_{١}$ (س) ± د$_{٢}$ (س) ± ..... ± د$_{ن}$ (س)

فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = د$_{١}$َ (س) ± د$_{٢}$َ (س) ± ..... ± د$_{ن}$َ (س)

فمثلًا : - إذا كانت : د (س) = ٥ س^{٢} + ٢ س + ٧ فإن : دَ (س) = ١٠ س + ٢

- إذا كانت : ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٦} - ٤ س$^{\frac{٧}{٢}}$ فإن : صَ = ٣ س^{٥} - ١٤ س$^{\frac{٥}{٢}}$

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

١ ص = ٢ س^{٥} + ٣ س^{٣} - ٤ س + ٦

٢ د (س) = (س - ٣) (٢ س - ١)

٣ د (س) = ٢ س $\sqrt{\text{س}}$ + ٤ $\sqrt{\text{س}}$ - ١

٤ د (س) = $\frac{\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} + \text{س} + ٤}{\text{س}^{٣}}$ حيث س ≠ ٠

Scanned by CamScanner

الحـــل

١ $ص' = ١٠ س^{٤} + ٩ س^{٢} - ٤$

٢ $\because د(س) = ٢ س^{٢} - ٧ س + ٣$ $\therefore د'(س) = ٤ س - ٧$

٣ $\because د(س) = ٢ س^{\frac{٣}{٢}} + ٤ س^{\frac{١}{٢}} - ١$

$\therefore د'(س) = ٢ \times \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}} + ٤ \times \frac{١}{٢} . س^{-\frac{١}{٢}} = ٣ \sqrt{س} + \frac{٢}{\sqrt{س}}$

٤ $\because د(س) = \frac{س^{٣}}{س^{٢}} + \frac{٥ س^{٢}}{س^{٢}} + \frac{س}{س^{٢}} + \frac{٤}{س^{٣}} = ١ + ٥ س^{-١} + س^{-٢} + ٤ س^{-٣}$

$\therefore د'(س) = صفر - ٥ س^{-٢} - ٢ س^{-٣} - ١٢ س^{-٤} = -\frac{٥}{س^{٢}} - \frac{٢}{س^{٣}} - \frac{١٢}{س^{٤}}$

مثال ٢

إذا كانت : $د(س) = س^{٣} + ٦ س^{٢} - ٣٦ س + ٤$ **فأوجد :**

١ $د'(١)$ ، $د'(٠)$ ٢ قيم س التى تجعل $د'(س) = ٠$

الحـــل

$\because د'(س) = ٣ س^{٢} + ١٢ س - ٣٦$

١ $د'(١) = ٣ \times ١ + ١٢ \times ١ - ٣٦ = -٢١$ ، $د'(٠) = -٣٦$

٢ بوضع $د'(س) = ٠$ $\therefore ٣ س^{٢} + ١٢ س - ٣٦ = ٠$

$\therefore س^{٢} + ٤ س - ١٢ = ٠$ $\therefore (س + ٦)(س - ٢) = ٠$

$\therefore س = -٦$ أ، $س = ٢$

٤ مشتقة حاصل ضرب دالتين

إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س وكانت $ص = د(س) \times ر(س)$

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = د(س) \times ر'(س) + ر(س) \times د'(س)$

أى أن المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

Scanned by CamScanner

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = (س^{٢} + ٣) (٢ س^{٣} − ٥)

٢ ص = (س + $\frac{١}{س}$) (س^{٣} − ٢)

الحل

١ $\frac{ءص}{ءس}$ = (س^{٢} + ٣) × ٦ س^{٢} + (٢ س^{٣} − ٥) × ٢ س

= ٦ س^{٤} + ١٨ س^{٢} + ٤ س^{٤} − ١٠ س = ١٠ س^{٤} + ١٨ س^{٢} − ١٠ س

٢ ∵ ص = (س + س$^{-١}$) (س^{٣} − ٢)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ س^{٢} (س + س$^{-١}$) + (١ − س$^{-٢}$) (س^{٣} − ٢)

ملاحظة

يمكن الاكتفاء بهذه النتيجة وعدم فك الأقواس أما إذا كان المطلوب وضع الناتج فى أبسط صورة فيجب إكمال الحل بفك الأقواس وجمع الحدود الجبرية المتشابهة.

نتيجة

إذا كانت : د ، ر ، ق دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : ص = د (س) × ر (س) × ق (س)

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ (س) × ر (س) × ق (س) + رَ (س) × د (س) × ق (س)

+ قَ (س) × د (س) × ر (س)

وبقسمة الطرفين على ص = د (س) × ر (س) × ق (س) نجد أن :

$\frac{١}{ص} \times \frac{ءص}{ءس} = \frac{دَ(س)}{د(س)} + \frac{رَ(س)}{ر(س)} + \frac{قَ(س)}{ق(س)}$

مثال ٤

أوجد المشتقة الأولى للدالة د حيث : د (س) = (٢ س^{٣} + ٣) (س^{٢} − ٥) (س^{٣} − ٤ س + ١)

ثم أوجد : دَ (٠)

الحل

دَ(س) = ٦ س^{٢} (س^{٢} − ٥) (س^{٣} − ٤ س + ١) + ٢ س (٢ س^{٣} + ٣) (س^{٣} − ٤ س + ١)

+ (٣ س^{٢} − ٤) (٢ س^{٣} + ٣) (س^{٢} − ٥)

، دَ(٠) = ٠ × (−٥) × ١ + ٠ × ٣ × ١ + (−٤) × ٣ × (−٥) = ٦٠

Scanned by CamScanner

٥ مشتقة خارج قسمة دالتين

إذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت : $ص = \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث $ر(س) \neq ٠$

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ر(س) \times دَ(س) - د(س) \times رَ(س)}{(ر(س))^{٢}}$

أى أن المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق

$= \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

مثال ٥

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ $ص = \frac{٣س - ٤}{٢س + ٥}$

٢ $ص = \frac{٣س^{٢} + ١}{س^{٢} - ٤}$

الحل

١ $صَ = \frac{٣(٢س + ٥) - ٢(٣س - ٤)}{(٢س + ٥)^{٢}}$

$= \frac{٢٣}{(٢س + ٥)^{٢}}$

٢ $صَ = \frac{٦س(س^{٢} - ٤) - ٢س(٣س^{٢} + ١)}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$

$= \frac{-٢٦س}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$

Scanned by CamScanner

مثال ٦

إذا كانت : $د(س) = \frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ + س - ٢}$ فأوجد : $دَ(٢)$ ، $دَ(-٢)$

الحل

$$دَ(س) = \frac{(٢س - ١)(س^٢ + س - ٢) - (٢س + ١)(س^٢ - س - ٢)}{(س^٢ + س - ٢)^٢}$$

$$= \frac{(٢س^٣ + س^٢ - ٥س + ٢) - (٢س^٣ - س^٢ - ٥س - ٢)}{(س^٢ + س - ٢)^٢}$$

$$= \frac{٢س^٢ + ٤}{(س^٢ + س - ٢)^٢}$$

$$\therefore دَ(٢) = \frac{٢(٢)^٢ + ٤}{(٤ + ٢ - ٢)^٢} = \frac{١٢}{١٦}$$

$= \frac{٣}{٤}$ ، $دَ(-٢)$ غير موجودة حيث $-٢ \notin$ مجال الدالة.

مثال ٧

إذا كانت الدالة د : $د(س) = \begin{cases} أس + ب & ، س \leq ١ \\ س^٢ - ٣ & ، س > ١ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

فما قيمة كل من : أ ، ب

الحل

$\because$ د قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

$\therefore$ د متصلة عند $س = ١$

$\therefore د(١^+) = د(١^-)$

$$\therefore \lim_{س \to ١^+} (أس + ب) = \lim_{س \to ١^-} (س^٢ - ٣)$$

$\therefore أ + ب = -٢$ (١)

$$، دَ(س) = \begin{cases} أ & ، س \leq ١ \\ ٢س & ، س > ١ \end{cases}$$

$\therefore دَ(١^+) = دَ(١^-)$ $\therefore أ = ٢$

وبالتعويض فى (١) : $\therefore ب = -٤$

ملاحظة

الدالة د قابلة للاشتقاق عند $س = ١$

$\therefore$ يمكن استخدام قواعد الاشتقاق مباشرة دون استخدام التعريف.

Scanned by CamScanner

اختبر نفسك

تمارين 11

على قواعد الاشتقاق

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(١) $ص = ٧$

(٢) $ص = ٥ س$

(٣) $ص = س^{٤}$

(٤) $ص = \frac{٤}{٣} \pi س^{٣}$

(٥) $ص = \frac{-٤}{س^{٥}}$

(٦) $د(س) = ٣ س^{٢} - ٤ س + ٥$

(٧) $ص = ٨ - \frac{٢}{٣} س^{٣} + \frac{١}{٥} س^{٥}$

(٨) $ص = ٢ س^{٦} + س^{-٩}$

(٩) $ص = س^{٧} + \frac{١}{س^{٧}}$

(١٠) $ص = س^{٤} - ٣ س^{٢} + ٥ - \frac{٢}{س^{٢}} - \frac{٣}{س^{٤}}$

(١١) $د(س) = \frac{١}{٢} س^{١٤} - \frac{١}{٤} س^{٢٠} + \frac{١}{٦} س^{٣٦}$

(١٢) $ص = س(٣ س^{٢} - ٢ س) + ١٢ س$

(١٣) $ص = \frac{٥ س^{٥} - ٢ س^{٣} + ١٠ س^{٢} - ٢٠}{١٠ س^{٣}}$

(١٤) $ص = \frac{٢}{س^{٢}} (س^{٤} - ٤ س^{٢} + س - ٣)$

(١٥) $ص = (٤ س^{٢} + ١)(١ - ٤ س^{٢})$

(١٦) $ص = \frac{(س - ٢)(س + ٢)(س^{٢} + ٤)}{س^{٢}}$

(١٧) $ص = (س - ١)(س + ١)(س^{٢} + ١)(س^{٤} + ١)(س^{٨} + ١)(س^{١٦} + ١)$

٢ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(١) $ص = \sqrt[٣]{س^{٥}}$

(٢) $ص = ٢ س^{٦} + ٣ \sqrt{س}$

(٣) $ص = \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}}$

(٤) $ص = س(٣ س^{٢} - \sqrt{س})$

(٥) $ص = \frac{\sqrt{س} - ٢ س}{\sqrt{س}}$

(٦) $ص = \frac{٤ س^{٢} - ٣ س + ٢ \sqrt{س}}{س}$

Scanned by CamScanner

⑦ $ص = \frac{٥}{س} + س\sqrt{س} + \sqrt{٣}\,س - ٤$

⑧ $ص = \sqrt{س}\left(س\sqrt{س} - \frac{س}{\sqrt{س}} - ٣\right)$

⑨ $ص = \sqrt[٣]{س^{٢}} + ٣\sqrt[٣]{س} - ٢ + \frac{٦}{\sqrt[٣]{س}} - \frac{٩}{\sqrt[٣]{س^{٢}}}$

٣ أوجد قيمة كل مما يأتي :

① $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{س^{٣}}\right)$

② $\frac{ء}{ءس}\left(س^{\frac{١}{٣}}\right)$

③ $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}\right)$

④ $\frac{ء}{ءس}\left(س\sqrt{س}\right)$

⑤ $\frac{ء}{ءس}\left(\sqrt[٣]{س^{٢}}\right)$

⑥ $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س^{-٥}}}\right)$

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

① $ص = (س^{٢} + ٣)(س^{٣} - ٣س + ١)$

② $د(س) = (س + ٤)(س^{٢} + ٥س + ٧)$

③ $ص = (٤س^{٢} - ١)(٧س^{٣} + س)$ عند $س = ١$ «١٣٠»

④ $ص = (س^{٢} + ١)(س^{٣} + ٣)$ عند $س = -١$ «٢»

⑤ $د(س) = (٤س^{٢} - ٣س + ٧)(س^{٢} + ٢س + ٣)$ عند النقطة $(٠ ، ٢١)$ «٥»

⑥ $د(س) = س(س + ٢)(س + ٣)(س + ٥)$ عند النقطة $(-١ ، -٨)$ «-٦»

⑦ $د(س) = س(٣س - ٤)(س^{٢} - ٢)$ عند $س = ٠$ «٨»

⑧ $ص = (٢س + ١)(٣س^{٢} - ٢)(٤س^{٣} + ٣)$

⑨ $ص = (س^{٣} + ٥)\left(س\sqrt{س} - ٣\right)\left(س\sqrt{س} + ٣\right)$ ثم أوجد : $دَ(١)$ «-٦»

٥ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

① $ص = \frac{٤}{س^{٢}}$

② $ص = \frac{٥}{٢س + ٣}$

③ $د(س) = \frac{س}{٢س + ١}$

④ $ص = \frac{٥س - ٢}{٥س + ١}$

Scanned by CamScanner

⑤ د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ١}$

⑥ د (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٣} + ١}$

⑦ ص = $\frac{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٧}{\text{س} - ٢}$

⑧ ص = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ١}$

⑨ د (س) = ١ − $\frac{١}{\text{س} - ١}$ ثم أوجد : دَ (٣) $\frac{١}{٤}$

⑩ د (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} + ٢} - \frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ٢}$ ثم أوجد : دَ (٠) $\frac{٣}{٤}$

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) −١ (د) ٢

② إذا كانت : دَ (٢) = ٥ ، د (س) = $\text{س}^{٢}$ + م س + ٥ فإن : م = ...

(أ) ٥ (ب) ٢ (جـ) ١٠ (د) ١

③ إذا كانت : د (س) = $\text{س}^{٥}$ فإن : $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د (س + هـ) − د (س)}}{\text{هـ}}$ = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ $\text{س}^{٤}$ (جـ) $\text{س}^{٥}$ (د) غير موجودة.

④ إذا كانت : ص = $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) $\frac{-١}{٢\sqrt{\text{س}}}$ (ب) $\frac{-١}{٢\text{س}}$ (جـ) $\frac{-١}{٢\text{س}\sqrt{\text{س}}}$ (د) $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

⑤ إذا كانت : د (س) = $\text{أ}^{٢}$ حيث أ ثابت فإن : دَ (س) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ أ (جـ) ٢ (د) $\text{أ}^{٢}$

⑥ إذا كانت : ص = ٣ $\sqrt[٤]{\text{س}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) ١٢ $\text{س}^{٣}$ (ب) ١٢ $\sqrt[٣]{\text{س}}$ (جـ) $\frac{٣}{٤\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}}$ (د) $\frac{٣}{٤\sqrt[٤]{\text{س}^{٣}}}$

⑦ إذا كانت : ص = $\frac{٢}{\text{س}} + \frac{\text{س}}{٢}$ + ٢ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{\text{س}^{٣}} + \frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{٢\text{س}^{٢}}$ (د) $\frac{\text{س}^{٢} - ٢}{٢\text{س}^{٢}}$

Scanned by CamScanner

(٨) إذا كان : س ص = ٨١ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ٩

(أ) −٩ (ب) −١ (جـ) ١ (د) ٩

(٩) إذا كانت : د (س) = $س^{ن} + س^{-ن}$ فإن : دَ (١) = ...

(أ) ن (ب) ن + $\frac{١}{ن}$ (جـ) ن − $\frac{١}{ن}$ (د) صفر

(١٠) إذا كانت ن ∈ $ص_{+}$ وكان : د (س) = ن $س^{ن}$ ، دَ (١) = ٩

فإن : ن = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

(١١) $\frac{ء}{ءس}$ (٥ $\pi^{٢}$) = ...

(أ) ٥ (ب) ١٠ π (جـ) صفر (د) ٥ $\pi^{٢}$

(١٢) إذا كانت : د (س) = س + $\frac{٩}{س}$ فإن : دَ (س) = صفر عندما س = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ± ٣ (د) ± ٩

(١٣) إذا كان : د (س) = ٤ $س^{٢}$ + ر (س) وكان : دَ (٣) = ٧

فإن : رَ (٣) = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٣١ (جـ) −١٧ (د) −٢٤

(١٤) إذا كان : د (س) = ٥ ر (س) + ٢٠ فإن : رَ (س) = ...

(أ) دَ (س) (ب) دَ (س) − ٢٠ (جـ) ٥ دَ (س) (د) $\frac{١}{٥}$ دَ (س)

(١٥) إذا كانت : د (س) = (س + أ) ($س^{٢}$ − أ) وكان : دَ (−١) = ٤

فإن : أ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) − $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) − $\frac{٢}{٣}$

(١٦) إذا كانت ص = $\frac{س^{٢} + ٢ س + ٤}{س^{٢} - ٢ س + ٤}$ وكانت : $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر فإن : س = ...

(أ) ± ٢ (ب) ± ٤ (جـ) ٢ أ، ٣ (د) −٢ أ، −٣

(١٧) إذا كان : د (س) = $س^{٢}$ + أ س + ب وكان : دَ (٥) = ٢ دَ ($\frac{٧}{٢}$)

فإن : أ = ...

(أ) −٤ (ب) −٣ (جـ) ٢ (د) ٣

Scanned by CamScanner

(١٨) إذا كانت : د (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٥ س + ٦

فإن : $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(١ + ٢\text{هـ}) - \text{د}(١)}{\text{هـ}}$ = ...

(أ) −٨ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) −١٦

(١٩) إذا كانت : د (س) = (س − ٤) (س − ٥) (س − ٦) (س − ٧)

فإن : دَ (٧) = ...

(أ) −٧ (ب) −٦ (جـ) صفر (د) ٦

(٢٠) إذا كانت : د (س) = س^{٢} − س + ٤ وكان : دَ (ك) = دَ (٢) + د (٢)

فإن : ك = ...

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٣ (د) ١

(٢١) إذا كانت د (س) دالة زوجية وقابلة للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح

فإن : دَ (أ) + دَ (−أ) = ...

(أ) صفر (ب) ٢ دَ (أ) (جـ) ٢ دَ (−أ) (د) −٢ دَ (أ)

(٢٢) إذا كانت : د (س) = $\frac{١}{\text{س}^{٢} + ١}$ وكان : د (أ) = دَ (أ) فإن : د (أ) = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٤}$

---

٧ أوجد قيم أ ، ب إذا كانت كل من الدوال الآتية قابلة للاشتقاق عند النقطة المبينة :

(١) د (س) = { س^{٣} + ٤ ، س ≤ ١ ؛ أ س + ب ، س > ١ } عند س = ١ «٣ ، ٢»

(٢) د (س) = { س^{٢} − أ ، س ≤ ٢ ؛ أ س + ب ، س > ٢ } عند س = ٢ «٤ ، −٨»

(٣) د (س) = { أ س^{٢} + ب س + ٧ ، س ≤ ٢ ؛ $\frac{٥}{\text{س} - ١}$ ، س > ٢ } عند س = ٢ «−٢ ، ٣»

---

٨ إذا كانت : ص = $\frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س}^{٣}}$ أثبت أن : س^{٤} $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)$ = ٣

Scanned by CamScanner

٩ إذا كانت : ص = $\frac{٢}{\sqrt{س}}$ + $\sqrt{س}$ أثبت أن : ٢ س^{٢} ص $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ = س^{٢} − ٤

١٠ إذا كانت : ص = $\frac{٣}{س - ١}$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − $\frac{١}{٣}$ ص^{٢}

١١ إذا كانت : ص = $\frac{ل^{٢}}{س + ل^{٢}}$ ، ل ثابت أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ + $\left(\frac{ص}{ل}\right)^{٢}$ = ٠

١٢ إذا كانت : د (س) = أ س^{٣} + ب س وكانت : د (١) = ٢ ، دَ (١) = صفر

فما قيمة كل من : أ ، ب ؟ «−١ ، ٣»

١٣ أوجد قيم س التى تجعل دَ (س) = ٧ حيث د (س) = س^{٣} − ٥ س + ٢ «± ٢»

١٤ أوجد قيمة الثابت أ إذا كانت : د (س) = $\frac{س + أ}{س - أ}$ ، دَ (٢) = − ٢ «٤ أ ، ١»

١٥ إذا كانت : د (س) = $\frac{س^{٢} + أ س + ب}{س^{٢} - س + ٢}$ وكان د (٠) = ١ ، دَ (٠) = ١

فما قيمة كل من : أ ، ب ؟ «١ ، ٢»

١٦ إذا كان : ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} ، $\frac{ءص}{ءس}$ = ٨ عندما س = ١ وكان متوسط تغير ص

عندما تتغير س من −١ إلى ٢ يساوى ٧ أوجد قيمتى الثابتين : أ ، ب «٢ ، ١»

١٧ إذا كانت : ص = أ س^{٣} + ب س وكان متوسط تغير الدالة عندما تتغير س

من −٢ إلى ١ يساوى ٥ وكان $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١١}{٤}$ عند س = $\frac{١}{٢}$ أوجد قيمتى : أ ، ب «١ ، ٢»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : دَ (س) × ر (س) + رَ (س) × د (س) = س + $\frac{١}{س}$

فإن : $\frac{ء}{ءس}$ [د (س) × ر (س)] = ... عند س = ٢

(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{٥}{٢}$ (د) ٣

Scanned by CamScanner

(٢) إذا كان : د (س) = (٢ س + ١) × هـ (س) وكان : د (٢) = ١٥ ، هـَ (٢) = ٤

فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢٦ (ب) ٢٨ (جـ) ٣٠ (د) ٣٢

(٣) إذا كان : ٢ د (١) = دَ (١) = ٤ ، ٣ هـ (١) = هـَ (١) = ٣

فإن : $\frac{ء}{ءس}\left[\frac{د(س)}{هـ(س)}\right]$ = ... عند س = ١

(أ) −٤ (ب) −٢ (جـ) ١ (د) ٣

(٤) إذا كانت : د (س) = $\frac{هـ(س)}{٢س^{٢}+٣}$ وكانت : هـ (١) = −٥ ، هـَ (١) = ٦

فإن : دَ (١) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٥) إذا كانت : د (س) = (س − ١) (س − ٢) (س − ٣)

فإن : $\sum_{ك=١}^{٣}$ دَ (ك) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

Scanned by CamScanner

الدرس 4

مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

إذا كانت ص دالة فى ع ولتكن ص = د (ع) ، وكانت ع دالة فى س ولتكن ع = ر (س)

فإن : الدالة ص الناتجة من تركيب الدالتين د ، ر تسمى دالة الدالة فى س حيث :

ص = (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) **ولإيجاد مشتقة دالة الدالة نتبع النظرية الآتية :**

نظرية «قاعدة السلسلة»

إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى ع

، ع = ر (س) دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : ص = د [ر (س)] تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

ويكون : $\boxed{\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}}$

مثال ١

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

١ ص = ع^{٨} + ١ ، ع = ٢ س − ٣

٢ ص = $\frac{ع}{ع - ١}$ ، ع = س^{٢} + ٣ س + ٣ ثم أوجد : $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س=١}$

الحل

١ $\frac{ءص}{ءع}$ = ٨ ع^{٧} ، $\frac{ءع}{ءس}$ = ٢

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ = ٨ ع^{٧} × ٢ = ١٦ ع^{٧} = ١٦ (٢ س − ٣)^{٧}

Scanned by CamScanner

٢ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ع - ١ - ع}{(ع - ١)^{٢}} = \frac{-١}{(ع - ١)^{٢}}$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ٢س + ٣$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = \frac{-١}{(ع - ١)^{٢}} \times (٢س + ٣)$

$= \frac{-(٢س + ٣)}{((س^{٢} + ٣س + ٣) - ١)^{٢}} = \frac{-(٢س + ٣)}{(س^{٢} + ٣س + ٢)^{٢}}$

$\therefore \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = ١} = \frac{-(٢ + ٣)}{(١ + ٣ + ٢)^{٢}} = \frac{-٥}{٣٦}$

مشتقة الدالة $[د(س)]^{ن}$

إذا كانت : $ص = [د(س)]^{ن}$ حيث د قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س ، ن عدد حقيقى

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = ن[د(س)]^{ن - ١} \times دَ(س)$

أى أن مشتقة (قوس)^{ن} = ن (القوس)$^{ن - ١}$ × مشتقة ما بداخل القوس.

مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ $ص = (٢س^{٣} + ٥)^{٤}$

٢ $ص = \left(\frac{٣س}{٢س + ١}\right)^{٥}$

٣ $ص = \sqrt[٣]{(س^{٢} - ٣س - ٤)^{٢}}$

الحل

١ $\frac{ءص}{ءس} = ٤(٢س^{٣} + ٥)^{٣} \times ٦س^{٢} = ٢٤س^{٢}(٢س^{٣} + ٥)^{٣}$

٢ $\frac{ءص}{ءس} = ٥\left(\frac{٣س}{٢س + ١}\right)^{٤} \times \frac{٣(٢س + ١) - ٢ \times ٣س}{(٢س + ١)^{٢}}$

$= ٥\left(\frac{٣س}{٢س + ١}\right)^{٤} \times \frac{٣}{(٢س + ١)^{٢}} = \left(\frac{٣س}{٢س + ١}\right)^{٤} \times \frac{١٥}{(٢س + ١)^{٢}}$

٣ $\because ص = (س^{٢} - ٣س - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢}{٣}(س^{٢} - ٣س - ٤)^{-\frac{١}{٣}}(٢س - ٣) = \frac{٢(٢س - ٣)}{٣\sqrt[٣]{س^{٢} - ٣س - ٤}}$

Scanned by CamScanner

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ $ص = (٢س + ١)^{٣} (٣س - ٢)^{٤}$

٢ $ص = \frac{(س^{٢} + ١)^{٣}}{(٢س - ٣)^{٢}}$

الحل

١ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ (٢س + ١)^{٢} \times ٢ \times (٣س - ٢)^{٤} + ٤ (٣س - ٢)^{٣} \times ٣ \times (٢س + ١)^{٣}$

$= ٦ (٢س + ١)^{٢} (٣س - ٢)^{٤} + ١٢ (٢س + ١)^{٣} (٣س - ٢)^{٣}$

$= ٦ (٢س + ١)^{٢} (٣س - ٢)^{٣} \left((٣س - ٢) + ٢ (٢س + ١)\right)$

$= ٦ (٢س + ١)^{٢} (٣س - ٢)^{٣} (٣س - ٢ + ٤س + ٢)$

$= ٦ (٢س + ١)^{٢} (٣س - ٢)^{٣} (٧س)$

$= ٤٢س (٢س + ١)^{٢} (٣س - ٢)^{٣}$

٢ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٣ (س^{٢} + ١)^{٢} \times ٢س \times (٢س - ٣)^{٢} - ٢ (٢س - ٣) \times ٢ \times (س^{٢} + ١)^{٣}}{\left((٢س - ٣)^{٢}\right)^{٢}}$

$= \frac{٦س (س^{٢} + ١)^{٢} (٢س - ٣)^{٢} - ٤ (س^{٢} + ١)^{٣} (٢س - ٣)}{(٢س - ٣)^{٤}}$

$= \frac{٢ (س^{٢} + ١)^{٢} (٢س - ٣) \left(٣س (٢س - ٣) - ٢ (س^{٢} + ١)\right)}{(٢س - ٣)^{٤}}$

$= \frac{٢ (س^{٢} + ١)^{٢} (٦س^{٢} - ٩س - ٢س^{٢} - ٢)}{(٢س - ٣)^{٣}}$

$= \frac{٢ (س^{٢} + ١)^{٢} (٤س^{٢} - ٩س - ٢)}{(٢س - ٣)^{٣}}$

Scanned by CamScanner

ملاحظة

إذا كانت : $ص = \sqrt{د(س)}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{د(س)}} \times دَ(س) = \frac{دَ(س)}{٢\sqrt{د(س)}}$

أى أن : مشتقة الجذر التربيعى لدالة = $\frac{١}{٢\,(\text{الجذر})}$ × مشتقة ما تحت الجذر.

مثال ٤

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ لكل مما يأتى :

١ $ص = \sqrt{٢س + ٣}$

٢ $ص = \sqrt{٥س^٣ - ١٢س^٢ + ٨س + ١}$

الحل

١ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{٢س + ٣}} \times ٢ = \frac{١}{\sqrt{٢س + ٣}}$

٢ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١٥س^٢ - ٢٤س + ٨}{٢\sqrt{٥س^٣ - ١٢س^٢ + ٨س + ١}}$

مثال ٥

إذا كانت : $ص = \frac{ع^٢}{ع^٢ + ١}$ ، $ع = \sqrt{٣س - ٢}$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ عند $س = ١$

الحل

$\because \frac{ءص}{ءع} = \frac{٢ع(ع^٢ + ١) - ٢ع(ع^٢)}{(ع^٢ + ١)^٢} = \frac{٢ع^٣ + ٢ع - ٢ع^٣}{(ع^٢ + ١)^٢} = \frac{٢ع}{(ع^٢ + ١)^٢}$

، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣س - ٢}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = \frac{٢ع}{(ع^٢ + ١)^٢} \times \frac{٣}{٢\sqrt{٣س - ٢}}$

وبالتعويض عن ع :

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٢\sqrt{٣س - ٢}}{(٣س - ٢ + ١)^٢} \times \frac{٣}{٢\sqrt{٣س - ٢}} = \frac{٣}{(٣س - ١)^٢}$

$\therefore \left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{س = ١} = \frac{٣}{(٣ \times ١ - ١)^٢} = \frac{٣}{٤}$

Scanned by CamScanner

حل آخر : في بعض الأحيان نجد أنه من الأفضل التعويض عن ع في ص وذلك لجعل ص دالة في س ثم إيجاد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ كالآتي :

$\because$ ع = $\sqrt{\text{٣س} - ٢}$

$\therefore$ ص = $\frac{(\sqrt{\text{٣س} - ٢})^{٢}}{(\sqrt{\text{٣س} - ٢})^{٢} + ١} = \frac{\text{٣س} - ٢}{\text{٣س} - ٢ + ١} = \frac{\text{٣س} - ٢}{\text{٣س} - ١}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣(\text{٣س} - ١) - ٣(\text{٣س} - ٢)}{(\text{٣س} - ١)^{٢}} = \frac{\text{٩س} - ٣ - \text{٩س} + ٦}{(\text{٣س} - ١)^{٢}}$

$= \frac{٣}{(\text{٣س} - ١)^{٢}}$

$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س}=١} = \frac{٣}{(٣ \times ١ - ١)^{٢}} = \frac{٣}{٤}$

نتيجة

إذا كانت ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س

فإن : $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^{\text{ن}}) = \text{ن ص}^{\text{ن} - ١} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

مثال ٦

أوجد كلاً مما يأتي :

١ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^{٣})$ | ٢ $\frac{\text{ء}}{\text{ءص}}(\text{ص}^{٣})$ | ٣ $\frac{\text{ء}}{\text{ءن}}(\text{ص}^{٣})$

٤ $\frac{\text{ء}}{\text{ءع}}(\text{ف}^{٨})$ | ٥ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص})$

الحل

١ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}^{٣}) = ٣\,\text{ص}^{٢} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

٢ $\frac{\text{ء}}{\text{ءص}}(\text{ص}^{٣}) = ٣\,\text{ص}^{٢}$ (لاحظ أن الاشتقاق هنا بالنسبة إلى ص)

٣ $\frac{\text{ء}}{\text{ءن}}(\text{ص}^{٣}) = ٣\,\text{ص}^{٢} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

٤ $\frac{\text{ء}}{\text{ءع}}(\text{ف}^{٨}) = ٨\,\text{ف}^{٧} \times \frac{\text{ءف}}{\text{ءع}}$

٥ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{ص}) = ١ \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

Scanned by CamScanner

مثال ٧

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

١ $ص^{٣} = س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١$ ٢ $ص^{٤} = س^{٥} - س$

الحـــل

١ $\because ص^{٣} = س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١$ $\therefore ٣ ص^{٢} \times \frac{ءص}{ءس} = ٤ س^{٣} - ٤ س$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٤ س^{٣} - ٤ س}{٣ ص^{٢}} = \frac{٤ س^{٣} - ٤ س}{٣ \sqrt[٣]{(س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١)^{٢}}}$$

حل آخر : $\because ص = (س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١)^{\frac{١}{٣}}$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٣} (س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١)^{-\frac{٢}{٣}} (٤ س^{٣} - ٤ س) = \frac{٤ س^{٣} - ٤ س}{٣ \sqrt[٣]{(س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١)^{٢}}}$$

٢ $\because ص^{٤} = س^{٥} - س$ $\therefore ٤ ص^{٣} \times \frac{ءص}{ءس} = ٥ س^{٤} - ١$

$$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{٥ س^{٤} - ١}{٤ ص^{٣}} = \frac{٥ س^{٤} - ١}{٤ \sqrt[٤]{(س^{٥} - س)^{٣}}}$$

مثال ٨

إذا كانت : $ص = ع^{٢} + ٣ ع + ٥$ ، $ع = \frac{١}{٢} س^{٢} + ٢$

أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} - ٧ \frac{ءع}{ءس} - س^{٣} =$ صفر

الحـــل

$\because \frac{ءص}{ءع} = ٢ ع + ٣$ ، $\frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{٢} \times ٢ س = س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = (٢ ع + ٣) \times س$ وبالتعويض عن قيمة ع

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \left(٢ \left(\frac{١}{٢} س^{٢} + ٢\right) + ٣\right) \times س = (س^{٢} + ٤ + ٣) \times س = س^{٣} + ٧ س$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} - ٧ \frac{ءع}{ءس} - س^{٣} = س^{٣} + ٧ س - ٧ س - س^{٣} =$ صفر (وهو المطلوب)

Scanned by CamScanner

ملاحظة

إذا كانت : ص = (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = دَ (ر (س)) . رَ (س)

مثال ٩

إذا كان : د (٢ س − ١) = س^{٢} + ٣ **أوجد :** دَ (٥)

الحل

∵ د (٢ س − ١) = س^{٢} + ٣ ∴ دَ (٢ س − ١) × ٢ = ٢ س

وبوضع ٢ س − ١ = ٥ ∴ س = ٣

∴ دَ (٥) × ٢ = ٦ ∴ دَ (٥) = ٣

Scanned by CamScanner

تمارين 12

على مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

(١) ص = ع^{٢} ، ع = ٣ س^{٢} − ٢ عند س = ٢ «٢٤٠»

(٢) ص = ع^{٧} ، ع = س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٤ عند س = ١ «٤٩»

(٣) ص = ع^{٥} + ٣ ، ع = (س − ١)^{٣} عند س = ٢ «١٥»

(٤) ص = ع^{٣} + ع − ٢ ، ع = س^{٢} − س عند النقطة (٠ ، −٢) «−١»

(٥) ص = ع^{٣} − ع − ١ ، ع = س − $\frac{٤}{س}$ عند س = ٢ «−٢»

(٦) ص = $\sqrt{ع}$ ، ع = $\frac{س − ٢}{س + ١}$ عند س = ٣ «$\frac{٣}{١٦}$»

(٧) ص = $\frac{ع − ١}{ع + ١}$ ، ع = $\frac{س + ١}{س − ١}$ عند س = ٢ «$\frac{١}{٤}$−»

(٨) ص = ع^{٢} − ع + ١ ، ع = $\sqrt[٣]{(س − ١)^{٢}}$ عند س = ٢ «$\frac{٢}{٣}$»

٢ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

(١) ص = ٣ ع^{٢} − ١ ، ع = $\frac{٥}{س}$

(٢) ص = $\sqrt[٣]{ع}$ ، ع = س^{٢} − ٣ س + ٢

(٣) ص = ع + $\frac{١}{ع}$ ، س ع = ١

(٤) ص = $\frac{ع^{٢}}{ع^{٢} + ١}$ ، ع = $\sqrt{٢ س + ١}$

٣ إذا كانت : ص = $\frac{س − ٥}{س + ٥}$ ، س = ٢ ع + ٣ أوجد : $\frac{ءص}{ءع}$ عند ع = ١ «$\frac{١}{٥}$»

٤ إذا كانت : ع = $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} + ص − ٢ ، ص = س^{٢} + س + ١

أوجد : $\frac{ءع}{ءس}$ عند س = $\frac{−١}{٢}$ «صفر»

٥ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

(١) ص = (س + ٤)^{١٢}

(٢) ص = (١ − ٣ س)^{٥}

(٣) ص = (س^{٢} − ٣)^{٦}

(٤) ص = (٣ س^{٢} − ٤ س + ١)^{٤}

Scanned by CamScanner

⑤ ص = $(٦ س^{٣} + ٣ س + ١)^{١٠}$

⑥ ص = $\left(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٧}$

⑦ ص = $\frac{٧}{(٣ س - ١)^{٦}}$

⑧ ص = $\frac{٧}{(س^{٢} - ٩)^{٥}}$

٦ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

① ص = $س^{٥} (س + ٣)^{٧}$ عند س = −٢ «−١٤٤»

② ص = $(س - ٣) (س - ٥)^{٨}$ عند النقطة (٤ ، ١) «−٧»

③ ص = $(١ - س)^{٦} (١ + س)^{٦}$ عند س = $\sqrt{٢}$ «$١٢\sqrt{٢}$»

④ ص = $(س^{٢} + ١)^{٥} (س^{٢} - س + ١)^{-٤}$ عند س = ١ «٣٢»

⑤ ص = $\left(\frac{٣ س - ٢}{٥ س - ٤}\right)^{٩}$ عند س = ١ «−١٨»

⑥ ص = $\left(\frac{س^{٢} + ١}{س - ٣}\right)^{٥}$ عند س = ١ «$\frac{-١٥}{٢}$»

⑦ ص = $\frac{س^{٧}}{(٣ س - ٢)^{٤}}$ عند النقطة (١ ، ١) «−٥»

⑧ ص = $\frac{(س - ١)^{٤}}{(س^{٢} + ١)^{٥}}$

⑨ ص = $\frac{(س^{٢} + ١)^{٣}}{(٣ س - ٢)^{٢}}$

٧ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

① ص = $\sqrt{س^{٢} + ١}$

② ص = $\sqrt[٣]{(٢ س + ١)^{٥}}$

③ ص = $\sqrt{٩ - ٢ س^{٢}}$ عند س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ «$-\frac{١}{٢}$»

④ ص = $\sqrt[٣]{(٢ س^{٣} + ٤ س + ٣)^{٢}}$ عند س = ٢ «$\frac{٥٦}{٩}$»

⑤ ص = $س \sqrt{س - ١}$ عند النقطة (٥ ، ١٠) «$٣\frac{١}{٤}$»

⑥ ص = $(س^{٢} - ١) \sqrt{٢ س + ٣}$ عند س = −١ «−٢»

⑦ ص = $\frac{٩ س}{\sqrt{٥ س^{٢} - ٤}}$ عند النقطة (١ ، ٩) «−٣٦»

⑧ ص = $\frac{٨ س}{\sqrt[٣]{س - ٢}}$ عند س = ٣ «صفر»

Scanned by CamScanner

٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : ص س = ٥ ، س ع = ٣ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ...

(أ) ١٥ (ب) $\frac{٥}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٥}$ (د) صفر

② إذا كانت : د (س) = $\sqrt{\text{س}^٢ + ٩}$ فإن : دَ (−٤) = ...

(أ) $\frac{-٤}{٥}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{١٠}$ (د) $\frac{-١}{١٠}$

③ إذا كان : ص = $(\text{س}^٢ - ٢)^٥$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) ٥ $(\text{س}^٢ - ٢)^٤$ (ب) ١٠ س $(\text{س}^٢ - ٢)^٤$

(جـ) ٢٢ $\text{س}^٥$ (د) ٢ س $(\text{س}^٢ - ٢)^٥$

④ إذا كانت : ص = $(\text{ع} + ١)^٣$ ، ع = $\text{س}^٥ - ١$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) $\text{س}^{١٥}$ (ب) $\text{س}^٨$ (جـ) ١٥ $\text{س}^{١٤}$ (د) ٨ $\text{س}^٧$

⑤ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ $(٢ - ٣\text{س})^{-٢}$ = ...

(أ) ١٢ $\text{س}^{-٢}$ − ٢٧ $\text{س}^{-٤}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ $(٢ - ٣\text{س})^{-١}$

(جـ) ٦ $(٢ - ٣\text{س})^{-٣}$ (د) −٢ $(٢ - ٣\text{س})^{-٣}$

⑥ إذا كان : ص = $\sqrt{٢ - \text{س}}$ فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ...

(أ) − $\frac{١}{٢\text{ص}}$ (ب) −١

(جـ) −٢ ص − ١ (د) −٢ ص

⑦ إذا كان : ص = $(\text{س} + \text{ك})^٣$ ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١٢ عند س = صفر فإن : ك = ...

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) −٢ (د) ٤

⑧ إذا كان : ص = $\frac{١}{\sqrt{\text{س}^٢ + ١}}$ فإن : صَ = ...

(أ) $\frac{-\text{س}}{\sqrt{\text{س}^٢ + ١}}$ (ب) $\frac{-\text{س}}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢ + ١}}$

(جـ) $\frac{-\text{س}}{\sqrt{(\text{س}^٢ + ١)^٣}}$ (د) $\frac{-\text{س}}{\sqrt[٣]{(\text{س}^٢ + ١)^٢}}$

Scanned by CamScanner

⑨ إذا كان : $ص^{٤} = س^{٣}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس} =$ .....

(أ) $\frac{٣}{٤} س^{\frac{١}{٤}}$ (ب) $\frac{س^{٢}}{٤ ص^{٣}}$ (جـ) $\frac{٣ س^{٢}}{ص^{٣}}$ (د) $\frac{٣}{٤ \sqrt[٤]{س}}$

⑩ إذا كانت : $د(س) = س^{٢} + ٣$ فإن : $\frac{ء}{ءس}[د(د(س))] =$ .....

عند س = ١

(أ) ١ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

⑪ إذا كانت : $د(٣ - ٢س) = ٣س^{٢} + ١$ فإن : $دَ(٧) =$ .....

(أ) -١٢ (ب) -٢ (جـ) ٦ (د) ٤٢

---

٩ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\frac{ء}{ءس}(ص^{٥})$

② $\frac{ء}{ءص}(ص^{٥})$

③ $\frac{ء}{ءن}(ص^{٥})$

④ $\frac{ء}{ءس}(ص^{ن})$

---

١٠ أوجد كلاً مما يأتى :

① $\frac{ء}{ءس}(س\sqrt{٢س^{٢} + ١})$ عند س = ٠ «١»

② $\frac{ء}{ءس}(\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}})^{٤}$ عند س = ١ «صفر»

③ $\frac{ء}{ءس}(س^{٢} + ٢ص^{٢})$

---

١١ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ فى كل مما يأتى :

① $ص^{٥} = س^{٣} - ٢س^{٢}$

② $ص^{٣} = ٣س^{٢} - ٤$

③ $٤ص^{٢} = س^{٥} - ٢س^{٣} + س$

④ $ص^{٣} = (س^{٢} - ٤س + ٤)^{-٢}$

⑤ $٢\sqrt{ص} = س^{٢} - ٣$

⑥ $س^{٢} - ص^{٣} = ٢س$

---

١٢ إذا كانت : $ص = س^{٢} - ١$ ، $س = ع^{٣} - ٢$ أوجد : $\frac{ءص}{ءع}$

ثم أثبت أن : $\frac{ءص}{ءع} + ٤\frac{ءس}{ءع} = ٦ع^{٥}$ «$٦ع^{٥} - ١٢ع^{٢}$»

Scanned by CamScanner

١٣ إذا كانت : $ص = ع^{٢} + ع$ ، $ع = ٢ س^{٢}$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} - \frac{ءع}{ءس} = ١٦ س^{٢}$

١٤ إذا كانت : $ص = \frac{ع}{ع - ١}$ ، $ع = \frac{س}{س + ١}$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} + ١ =$ صفر

١٥ إذا كانت : $ص = \frac{ع + ٣}{ع - ١}$ ، $ع = \frac{س + ١}{س - ٣}$ فأوجد : $\frac{ءص}{ءس}$ عندما $س = ٤$ «١»

١٦ إذا كانت : $ص = \sqrt{١ + س^{٢}}$ ، $ع = ٣ س^{٢} - ٧$

أثبت أن : $ص \left(\frac{ءص}{ءس}\right) + \frac{ءع}{ءس} = ٧ س$

١٧ إذا كانت : $ص = س^{٣} + س^{٢} + ٧ س$ ، $ع = س (س - ١) (س - ٢)$

أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} - \frac{ءع}{ءس} = ٨ س + ٥$

١٨ إذا كانت : $ص = (س - ٥)^{٣}$ أثبت أن : $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^{٣} - ص (س - ٥) \left(\frac{ءص}{ءس}\right) = ٢٤ ص^{٢}$

١٩ إذا كانت : $س^{٣} - ص^{٣} = ٨$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} = \left(\frac{س}{ص}\right)^{٢}$

٢٠ إذا كانت : $س^{٢} + ص^{٢} = ص$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٢ س}{١ - ٢ ص}$

٢١ إذا كانت : $(س + ص)^{٣} = ٥$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} = -١$

٢٢ أوجد قيم س التى تجعل $دَ (س) = ٧$ حيث $د (س) = (س - ٥)^{٧}$ «٦ أ، ٤»

٢٣ إذا كانت : $ص = (أ س + ب)^{٢}$ وعندما $س = ٢$ فإن : $ص = ١$ ، $\frac{ءص}{ءس} = ٤$

أوجد قيمتى : أ ، ب «± ٢ ، ∓ ٣»

٢٤ الربط بالحجوم : يصب زيت بمعدل ١٠ سم^{٣}/ث فى برميل أسطوانى الشكل طول نصف قطر قاعدته ٩٠ سم.

أوجد معدل ارتفاع الزيت فى البرميل. «$\frac{١}{٨١٠ \pi}$ سم/ث»

Scanned by CamScanner

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : د (٢) = دَ (٢) = ٣ وكان : ر (س) = (س^{٢} د (س))^{٢}

فإن : رَ (٢) = ...

(أ) ٥٧٦ (ب) ٧٦٨ (جـ) ٦٧٢ (د) ٤٨٠

② إذا كانت د دالة زوجية وقابلة للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح حيث د ليست دالة ثابتة

فإن دَ (س) تكون دالة .....

(أ) زوجية. (ب) فردية.

(جـ) ليست زوجية وليست فردية. (د) زوجية وفردية معًا.

③ إذا كان : ٥ د (س) + ٣ د $\left(\frac{١}{س}\right)$ = س + ٢ وكانت : ص = س د (س)

فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ... عند س = ١

(أ) ١ (ب) $\frac{٧}{٨}$ (جـ) ١٠ (د) ١٤

④ إذا كانت : د (س) = ٢ س − ٥ فإن : $\frac{ء}{ءس}$ [د$^{-١}$ (س)] = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٤}$

⑤ إذا كان : د (س) = س^{٢} + ٢ ، هـ (س) = س + ٢

فإن : $\frac{ء}{ءس}$ [(د ○ هـ) (س)] = ... عند س = ١

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

⑥ إذا كانت : ك (س) = د (ر (س)) حيث د (−٢) = ٨ ، دَ (−٢) = ٤

، دَ (٥) = ٣ ، ر (٥) = −٢ ، رَ (٥) = ٦ فإن : كَ (٥) = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٠ (جـ) ١٢ (د) ٨

⑦ إذا كانت ق دالة عكسية للدالة د وكان : دَ (س) = $\frac{١}{س^{٣} + ١}$

فإن : قَ (س) = ...

(أ) $\frac{١}{[ق (س)]^{٣} + ١}$ (ب) $\frac{١}{[د (س)]^{٣} + ١}$

(جـ) [ق (س)]^{٣} + ١ (د) [د (س)]^{٣} + ١

Scanned by CamScanner

⑧ إذا كانت : $ص = \sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + \sqrt{س + \dots}}}}$

فإن : $\frac{ءص}{ءس} = \dots\dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{س ص}$ (جـ) $\frac{١}{٢ص + ١}$ (د) $\frac{١}{٢ص - ١}$

٢٦ إذا كانت : $ص = \frac{س}{\sqrt{أ^٢ - س^٢}}$ أثبت أن : $س^٣ \left(\frac{ءص}{ءس}\right) = أ^٢ ص^٣$

٢٧ إذا كانت : $ص = \frac{٢س}{\sqrt{١ + س^٢}}$ ، $ع = \frac{\sqrt{١ + س^٢}}{٥س}$ أثبت أن : $٥ ع^٢ \frac{ءص}{ءس} + ٢ \frac{ءع}{ءس} = ٠$

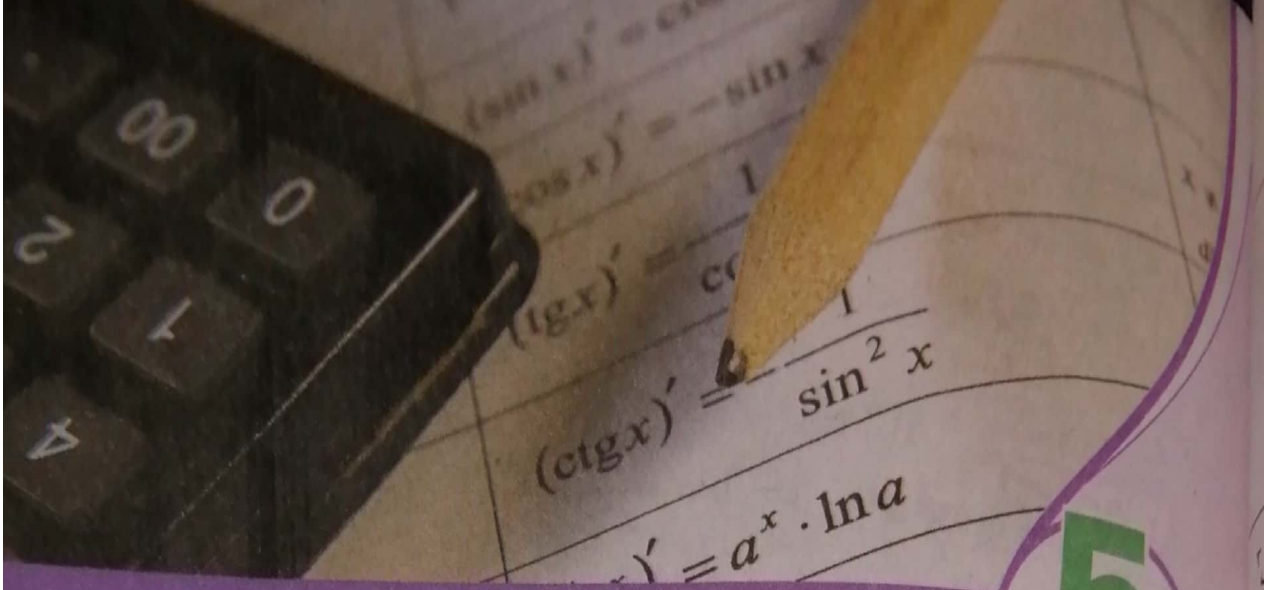
٢٨ إذا كانت : $ص = \left(\frac{س^٢ - ٢}{س^٢ + ٢}\right)^ن$ أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{٨ ن س ص}{س^٤ - ٤}$

٢٩ إذا كان : $\frac{٢}{\sqrt{س} + \sqrt{ص}} = ٥$ أثبت أن : $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢ = \frac{ص}{س}$

٣٠ إذا كان : $(ص - أ)^ن - (س - أ)^ن = أ^ن$ حيث أ ثابت

أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس} = \left(\frac{س - أ}{ص - أ}\right)^{ن - ١}$

Scanned by CamScanner



الدرس 5 مشتقات الدوال المثلثية

١ إذا كانت : ص = حا س	فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = حتا س
٢ إذا كانت : ص = حتا س	فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − حا س
٣ إذا كانت : ص = ظا س	فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢} س

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

١ ∵ ص = حا س ∴ د (س) = حا س ، د (س + هـ) = حا (س + هـ)

$$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{حا س}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا س حتا هـ} + \text{حتا س حا هـ} - \text{حا س}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{حتا س حا هـ}}{\text{هـ}} + \frac{\text{حا س (حتا هـ} - ١)}{\text{هـ}}\right]$$

$$= \text{حتا س} \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا هـ}}{\text{هـ}} + \text{حا س} \times \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حتا هـ} - ١}{\text{هـ}}$$

$$= \text{حتا س} \times ١ + \text{حا س} \times ٠ = \text{حتا س}$$ أى أن : $\boxed{\frac{ءص}{ءس} = \text{حتا س}}$

٢ وبالمثل يمكن استخدام التعريف فى إثبات أن :

إذا كان : ص = حتا س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = − حا س

Scanned by CamScanner

٣ ∵ ص = طا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{جتا س × جتا س − جا س × (− جا س)}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$

= $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{ س + جا}^{٢}\text{ س}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ = $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ = قا^{٢} س أى أن : $\boxed{\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{قا}^{٢}\text{ س}}$

بصفة عامة :

١ إذا كانت : ص = جا ع فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا ع . $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

٢ إذا كانت : ص = جتا ع فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − جا ع . $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

٣ إذا كانت : ص = طا ع فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا^{٢} ع . $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

حيث ع دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س

مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١ ص = جا ٣ س

٢ ص = ٢ جتا (٤ − س)

٣ ص = جا (٢ س + π) + طا ٣ س

٤ ص = س^{٤} + طا (٥ س − ٢)

٥ ص = جا (٣ س^{٣} + ٢ س + ١)

٦ ص = جتا $\frac{\text{س}}{٣}$ + جتا $\frac{\pi}{٣}$

الحل

١ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا ٣ س × ٣ = ٣ جتا ٣ س

٢ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ × − جا (٤ − س) × − ١ = ٢ جا (٤ − س)

٣ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا (٢ س + π) × ٢ + قا^{٢} ٣ س × ٣ = ٢ جتا (٢ س + π) + ٣ قا^{٢} ٣ س

٤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٤ س^{٣} + قا^{٢} (٥ س − ٢) × ٥ = ٤ س^{٣} + ٥ قا^{٢} (٥ س − ٢)

Scanned by CamScanner

٥ $\frac{ءص}{ءس}$ = حتا (٣ س^{٣} + ٢ س + ١) × (٩ س^{٢} + ٢)

= (٩ س^{٢} + ٢) حتا (٣ س^{٣} + ٢ س + ١)

٦ $\frac{ءص}{ءس}$ = − حا $\frac{س}{٣}$ × $\frac{١}{٣}$ + صفر

= − $\frac{١}{٣}$ حا $\frac{س}{٣}$

لاحظ أن

حتا $\frac{\pi}{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ = مقدار ثابت

∴ المشتقة = صفر

مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

١ ص = حا ٢ س حتا ٣ س

٢ ص = $\frac{حا (٢ س + ١)}{حتا (٣ س − ١)}$

٣ ص = س^{٣} طا ٥ س

٤ ص = حا $\sqrt{س}$

٥ ص = حتا^{٢} (٢ س − ١)

٦ ص = طا^{٣} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢})

الحل

١ $\frac{ءص}{ءس}$ = حا ٢ س × − حا ٣ س × ٣ + حتا ٣ س × حتا ٢ س × ٢

= − ٣ حا ٢ س حا ٣ س + ٢ حتا ٢ س حتا ٣ س

٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{حتا (٣ س − ١) × حتا (٢ س + ١) × ٢ − حا (٢ س + ١)) × − حا (٣ س − ١) × ٣}{حتا^{٢} (٣ س − ١)}$

= $\frac{٢ حتا (٣ س − ١) حتا (٢ س + ١) + ٣ حا (٢ س + ١) حا (٣ س − ١)}{حتا^{٢} (٣ س − ١)}$

٣ $\frac{ءص}{ءس}$ = س^{٣} × قا^{٢} ٥ س × ٥ + طا ٥ س × ٣ س^{٢}

= ٥ س^{٣} قا^{٢} ٥ س + ٣ س^{٢} طا ٥ س

٤ $\frac{ءص}{ءس}$ = حتا ($\sqrt{س}$) × $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ = $\frac{حتا \sqrt{س}}{٢\sqrt{س}}$

٥ ∵ ص = (حتا (٢ س − ١))^{٢}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ حتا (٢ س − ١) × − حا (٢ س − ١) × ٢

= − ٤ حتا (٢ س − ١) حا (٢ س − ١)

Scanned by CamScanner

٦ ∵ ص = (طا (١ + ٥ س + ٣ س^{٢}))^{٣}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣ طا^{٢} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢}) × قا^{٢} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢}) × (٥ + ٦ س)

= ٣ (٥ + ٦ س) طا^{٢} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢}) قا^{٢} (١ + ٥ س + ٣ س^{٢})

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

١ ص = طا ٦ س^{٢}

٢ ص = طا^{٢} ٦ س

٣ ص = جتا (طا ٤ س)

٤ ص = ٤ س جا س جتا س جتا ٢ س

٥ ص = $\frac{\text{طا س} + \sqrt{٣}}{١ - \sqrt{٣}\ \text{طا س}}$

الحل

١ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢} (٦ س^{٢}) × (١٢ س) = ١٢ س قا^{٢} ٦ س^{٢}

٢ ∵ ص = (طا ٦ س)^{٢}

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ (طا ٦ س) × قا^{٢} ٦ س × ٦ = ١٢ طا ٦ س قا^{٢} ٦ س

٣ $\frac{ءص}{ءس}$ = − جا (طا ٤ س) × قا^{٢} ٤ س × ٤ = − ٤ قا^{٢} ٤ س جا (طا ٤ س)

٤ ∵ ص = ٢ س × (٢ جا س جتا س) جتا ٢ س = ٢ س جا ٢ س جتا ٢ س

= س × ٢ جا ٢ س جتا ٢ س = س جا ٤ س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = س × جتا ٤ س × ٤ + جا ٤ س × ١ = ع س جتا ع س + جا ع س

٥ ∵ طا $\frac{\pi}{٣}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ ص = $\frac{\text{طا س} + \text{طا}\frac{\pi}{٣}}{١ - \text{طا س طا}\frac{\pi}{٣}}$ = طا (س + $\frac{\pi}{٣}$)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢} (س + $\frac{\pi}{٣}$)

Scanned by CamScanner

مثال ٤

إذا كانت : $\text{ص} = \frac{\text{جتا س}}{١ - \text{جا س}}$ فاثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{١ - \text{جا س}}$

الحل

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{جا س} \times (١ - \text{جا س}) - \text{جتا س} \times (-\text{جتا س})}{(١ - \text{جا س})^{٢}} = \frac{-\text{جا س} + \text{جا}^{٢}\text{ س} + \text{جتا}^{٢}\text{ س}}{(١ - \text{جا س})^{٢}}$$

$$= \frac{-\text{جا س} + ١}{(١ - \text{جا س})^{٢}} = \frac{١ - \text{جا س}}{(١ - \text{جا س})^{٢}} = \frac{١}{١ - \text{جا س}}$$

مثال ٥

إذا كانت : $\text{ص} = \sqrt{٧ - ٣\text{ع}}$ ، $\text{ع} = \text{ظا}\frac{\text{س}}{٢}$ فاثبت أن : $٤\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٣ = ٠$ عند $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

الحل

$$\because \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{-٣}{٢\sqrt{٧ - ٣\text{ع}}} \quad ، \quad \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٣}{٢\sqrt{٧ - ٣\text{ع}}} \times \frac{١}{٢}\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}$$

$$= \frac{-٣\,\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{٤\sqrt{٧ - ٣\text{ع}}}$$ وبالتعويض عن ع

$$= \frac{-٣\,\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{٤\sqrt{٧ - ٣\,\text{ظا}\frac{\text{س}}{٢}}}$$

$$\therefore \left[\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right]_{\text{س} = \frac{\pi}{٢}} = \frac{-٣\,\text{قا}^{٢}\frac{\pi}{٤}}{٤\sqrt{٧ - ٣\,\text{ظا}\frac{\pi}{٤}}} = \frac{-٣ \times ٢}{٤\sqrt{٧ - ٣ \times ١}} = \frac{-٣}{٤}$$

$$\therefore ٤\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٣ = ٤ \times \frac{-٣}{٤} + ٣ = \text{صفر}$$

Scanned by CamScanner

تمارين 13

على مشتقات الدوال المثلثية

اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(١) ص = جا ٤ س

(٢) ص = جتا $\frac{١}{٢}$ س

(٣) ص = ٢ جا (٣ س + ٤)

(٤) ص = ٥ جا (٣ − π س)

(٥) ص = جتا (٥ س + ٣)

(٦) ص = ٣ ظا (٢ س + ٣)

(٧) ص = جا (س^{٢} + ٣)

(٨) ص = ظا (− ٥ س^{٢} + ١٩)

(٩) ص = ٢ جتا (٤ − ٣ س^{٢})

(١٠) ص = س − جا ٢ س + ظا ٥ س

(١١) ص = س^{٣} + جتا ٣ س + $\frac{١}{٤}$ جا ٤ س

(١٢) ص = جا $\frac{\pi}{٤}$ − ٧ جا س

(١٣) ص = جتا (٢ س − ١) + جا (٤ − ٥ س)

(١٤) ص = جتا ($\frac{\pi}{٢}$ − س) + جا (π − ٢ س)

(١٥) ص = س^{٤} + جتا $\frac{\pi}{٢}$ − جا $\frac{س}{٣}$

(١٦) ص = جتا ($\sqrt{س}$)

(١٧) ص = ظا ($\sqrt{س}$)

(١٨) ص = جتا ($\frac{٢}{س}$)

(١٩) ص = جا ($\frac{١}{س^{٢}}$)

---

٢ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(١) ص = س جا ٢ س

(٢) ص = س جا (٣ س − ٢)

(٣) ص = س ظا (٤ س − ٥)

(٤) ص = س^{٢} جا ٢ س

(٥) ص = س ظا (٣ س) + جتا س

(٦) ص = س^{٣} جتا ٥ س

(٧) ص = س جا س + $\sqrt{س}$

(٨) ص = ٢ جا $\frac{١}{٢}$ س − س جتا $\frac{١}{٢}$ س

(٩) ص = ٢ جا ٢ س جتا ٣ س

(١٠) ص = ٢ جا (٢ س + ١) جتا (٢ س + ١)

(١١) ص = س^{٢} جا (٢ س^{٢} + ٥)

(١٢) ص = $\frac{ظا س}{س}$

(١٣) ص = $\frac{س}{جتا س}$

(١٤) ص = $\frac{جا س}{١ + جتا س}$

Scanned by CamScanner

(١٥) $\text{ص} = \frac{\text{جا } ٢\text{س}}{\text{جتا س}}$

(١٦) $\text{ص} = \frac{١ + \text{جتا } ٢\text{س}}{١ - \text{جتا } ٢\text{س}}$

(١٧) ص = ظتا س

(١٨) ص = قتا س

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتي :

(١) $\text{ص} = \text{جتا } (\pi - ٣\text{س})^{٢}$

(٢) $\text{ص} = \text{ظا}^{٢}\ ٣\text{س}$

(٣) $\text{ص} = \text{جا}^{٣}\ ٤\text{س}$

(٤) $\text{ص} = \text{ظا}^{٤}\ \frac{١}{٢}\text{س}$

(٥) $\text{ص} = \text{جتا}^{٢}\ (٤\text{س}^{٢} - ٧)$

(٦) $\text{ص} = ٤\ \text{جتا}^{٥}\ \text{س}$

(٧) $\text{ص} = \text{جتا}^{٣}\ \left(\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}\right)$

(٨) $\text{ص} = \text{ظا}^{٣}\ (٤\text{س} - ٧ - ٢\text{س}^{٣})$

(٩) $\text{ص} = \text{س}\sqrt{\text{جا س}}$

(١٠) $\text{ص} = \sqrt{\text{جتا } (٥\text{س})}$

(١١) $\text{ص} = ٢\ \text{جتا س جتا } \frac{\text{س}}{٢}\ \text{جا } \frac{\text{س}}{٢}$

(١٢) $\text{ص} = \frac{\text{جا } ٢\text{س}}{١ - \text{جتا } ٢\text{س}}$

(١٣) $\text{ص} = \frac{\text{جا}^{٢}\ \text{س}}{١ + \text{جتا س}}$

(١٤) $\text{س} = \text{ص جتا س}$

(١٥) $\text{ص} = \text{س}^{٥}\ \text{جتا } \frac{\pi}{\text{س}}$

(١٦) $\text{س}^{٢} = \text{ص قا } (٣\text{س} - ٢)$

(١٧) ص = جتا (جتا س)

(١٨) ص = جا (ظا ٣ س)

(١٩) ص = جا (جتا^{٢} س)

(٢٠) $\text{ص} = \text{قا}^{٢}\ \text{س} - ١$

(٢١) س ص + جا س = ٥

(٢٢) $\text{ص} = \sqrt{\text{ظا}^{٥}\ \text{س}}$

(٢٣) $\text{ص} = \frac{\text{ظا س} + \text{ظا } \frac{\pi}{٤}}{١ - \text{ظا س ظا } \frac{\pi}{٤}}$

(٢٤) $\text{ص} = \frac{\sqrt{٣} + \text{ظا } ٤\text{س}}{١ - \sqrt{٣}\ \text{ظا } ٤\text{س}}$

٤ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في كل مما يأتي :

(١) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{جا س}}$ عند $\text{س} = \frac{٣\pi}{٢}$ «−١»

(٢) $\text{ص} = \text{س}^{٢}\ \text{جا س}$ عند $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$ «π»

(٣) ص = جا ٢ س جتا س عند النقطة (π ، ٠) «−٢»

(٤) $\text{ص} = (\text{س} - ٥)\ \text{جتا } \frac{\pi\text{س}}{٨}$ عند س = ٤ «$\frac{\pi}{٨}$»

Scanned by CamScanner

⑤ ص = جا س ظا ٤ س — عند س = $\frac{\pi}{٤}$ «$\sqrt{٢}$ ٢»

⑥ ص = $\sqrt{١ + جتا س}$ — عند س = $\frac{\pi}{٢}$ «$-\frac{١}{٢}$»

⑦ ص = $\sqrt{جا س + جتا س}$ — عند س = ٠ «$\frac{١}{٢}$»

⑧ ص = $\frac{س^٣}{جتا س}$ — عند س = π «$-٣\pi^٢$»

⑨ ص = $\frac{جا س}{١ - جا س}$ — عند س = $\frac{\pi}{٦}$ «$٢\sqrt{٣}$»

⑩ ص = $\frac{٢ جتا ٣ س}{س + ١}$ — عند س = صفر «-٢»

⑪ ص = (١ + جا س) (١ − جتا س) — عند س = π «-٢»

⑫ ص = جا^٤ س — عند س = $\frac{\pi}{٤}$ «١»

⑬ ص = (جا ٢ س − جتا ٤ س)^٤ — عند س = صفر «-٨»

---

٥ إذا كانت : ص = ٢ س جا س جتا س — أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = جا ٢ س + ٢ س جتا ٢ س

٦ إذا كانت : ص = ٣ + جا^٢ س — أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = جا ٢ س

٧ إذا كانت : ص = س جا س — أثبت أن : س ($\frac{ءص}{ءس}$ − س جتا س) = ص

٨ إذا كانت : ص = $\frac{١}{٣}$ جتا^٣ س − جتا س — أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = جا^٣ س

٩ إذا كانت : ص = (جا س + جتا س)^٢ — أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ جتا ٢ س

١٠ إذا كانت : ص = جا^٢ س − جتا^٢ س — أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ جا ٢ س

١١ إذا كانت : ص = $\frac{جا س}{١ + جتا س}$ — أثبت أن : (١ + جتا س) $\frac{ءص}{ءس}$ = ١

١٢ إذا كانت : ص = $\frac{جا س}{جا س + جتا س}$ — أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{١}{١ + جا ٢ س}$

١٣ إذا كانت : ص = $\frac{١ + ظا س}{١ - ظا س}$ — أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^٢ (س + ٤٥°)

Scanned by CamScanner

١٤ إذا كانت : ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{١ + جا س}}$ أثبت أن : $\frac{\text{١}}{\text{ص}^{\text{٢}}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{طا س قا س}$

١٥ إذا كانت : ص = $\frac{\text{١ + جا}^{\text{٢}}\text{ س}}{\text{١ − جا}^{\text{٢}}\text{ س}}$ أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤ طا س قا}^{\text{٢}}\text{ س}$

١٦ إذا كانت : ص = (قا س + طا س) (قا س − طا س) أوجد : صَ « صفر »

١٧ إذا كانت : ٢ س + ص = جا ٢ س أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{٤ جا}^{\text{٢}}\text{ س} = \text{صفر}$

١٨ إذا كانت : ص = قا س + جتا س أثبت أن : (صَ)$^{\text{٢}}$ + ص$^{\text{٢}}$ = ٢

١٩ إذا كانت : ص = قا س (جا س + جتا س) أثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \text{طا}^{\text{٢}}\text{ س} = \text{١}$

٢٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت : د (س) = طا (٥ س − π) فإن : دَ ($\frac{\pi}{٤}$) = ...

(أ) ٥ (ب) ٥ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$

(٢) إذا كانت : ص = جا ٢ س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = $\frac{\pi}{٦}$ تساوى .....

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\sqrt{٣}$

(٣) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (جتا$^{\text{٢}}$ س + جا$^{\text{٢}}$ س) = ...

(أ) ١ (ب) صفر

(جـ) س (د) ٢ (جتا س + جا س)

(٤) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ (طا $\frac{\pi}{٤}$) = ...

(أ) ١ (ب) قا$^{\text{٢}}$ $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) صفر (د) ٢

(٥) إذا كان : د (س) = جا$^{\text{٢}}$ س فإن : دَ (س) = ...

(أ) جتا$^{\text{٢}}$ س (ب) ٢ جتا$^{\text{٢}}$ س (جـ) ٢ جا س (د) ٢ جا س جتا س

(٦) إذا كان : ص = قا س فإن : صَ = ...

(أ) قتا س (ب) قا س طا س (جـ) $\frac{\text{١}}{\text{جا س}}$ (د) $\frac{\text{− ١}}{\text{جتا ٢ س}}$

Scanned by CamScanner

⑦ إذا كان : ص = جا س فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) جا $\left(\frac{\pi}{٢} + س\right)$ (ب) جا $\left(س - \frac{\pi}{٢}\right)$

(جـ) جا $\left(\frac{٣\pi}{٢} + س\right)$ (د) جا $\left(\frac{٣\pi}{٢} - س\right)$

⑧ إذا كانت : ص = جا^{٢} (٢٧٠° − س) فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) جا ٢ س (ب) − جا ٢ س (جـ) جتا ٢ س (د) − جتا ٢ س

٢١ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان ص = جا س حيث س مقيسة بالتقدير الستيني.

٢٢ إذا كان : ص = جا^{٢} س − جتا ٢ س − ٤ س

① أوجد معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س

② أوجد قيم س ∈]٠ ، π[عندما يكون معدل التغير مساويًا − ١

«$\frac{\pi}{٤}$»

٢٣ إذا كانت : ص = ظا ٤ س

أوجد معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

«صفر»

٢٤ أثبت أن :

① $\frac{ء}{ءس}$ (جا^{٢} س) = − $\frac{ء}{ءس}$ (جتا^{٢} س)

② $\frac{ء}{ءس}$ (جا^{٢} س + جتا^{٢} س) = $\frac{ء}{ءس}$ (قا^{٢} س − ظا^{٢} س)

③ $\frac{ء}{ءس}$ $\left(\frac{١}{٢}\text{ظا س} + \text{جا ٢ س}\right)$ = جا ٢ س

٢٥ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ في كل مما يأتي :

① ص = ع − جا ع ، ع = ٥ س + π عند س = ٠

«١٠»

② ص = (٣ ع + ١)° ، ع = $\frac{١}{٣}$ جتا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

«−١٠»

③ ص = $\sqrt{٤ - ٢ع}$ ، ع = ظا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٨}$

«−٢ $\sqrt{٢}$»

Scanned by CamScanner

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : جا س جتا ص − جا ص جتا س = $\frac{١}{٢}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) صفر (ب) جا (س + ص)

(جـ) جتا (س + ص) (د) ١

② إذا كان : ص = $\frac{٢ \text{ ظا س}}{١ - \text{ظا}^٢ \text{ س}}$ فإن : $\frac{ءص}{ءس}$ = ...

(أ) ٢ ظا ٢ س (ب) ٢ قا^٢ ٢ س (جـ) ١ (د) صفر

③ $\frac{ء}{ءس}$ [س^٢ + $\frac{ء}{ءس}$ (س + جا س)] = ...

(أ) جتا ٢ س − جا س (ب) ٢ س − جا س

(جـ) ٢ س + ١ + جتا س (د) ٢ س + جا س

④ نهـا$_{س \leftarrow أ}$ $\frac{\text{جا س} - \text{جا أ}}{\text{س} - \text{أ}}$ = ...

(أ) جتا س (ب) ١ (جـ) جتا أ (د) جا (س − أ)

⑤ نهـا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٤} + \text{هـ}\right) - \text{جا}\left(\frac{\pi}{٤}\right)}{\text{هـ}}$ = ...

(أ) $\frac{\text{جا هـ}}{\text{هـ}}$ (ب) جا هـ (جـ) جتا هـ (د) جتا $\frac{\pi}{٤}$

⑥ إذا كانت : ص = جتا $\sqrt{\text{س}}$ فإن : نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ = ...

(أ) − جا $\sqrt{\text{س}}$ (ب) جتا $\sqrt{\text{س}}$ (جـ) $\frac{-١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٢}$

---

٢٧ إذا كانت : ص = ع^٤ − ٢ ع^٢ + ١ ، ع = جا ٤ س

أثبت أن : $\frac{ءص}{ءس}$ + ١٦ ص ظا ٤ س = ٠

---

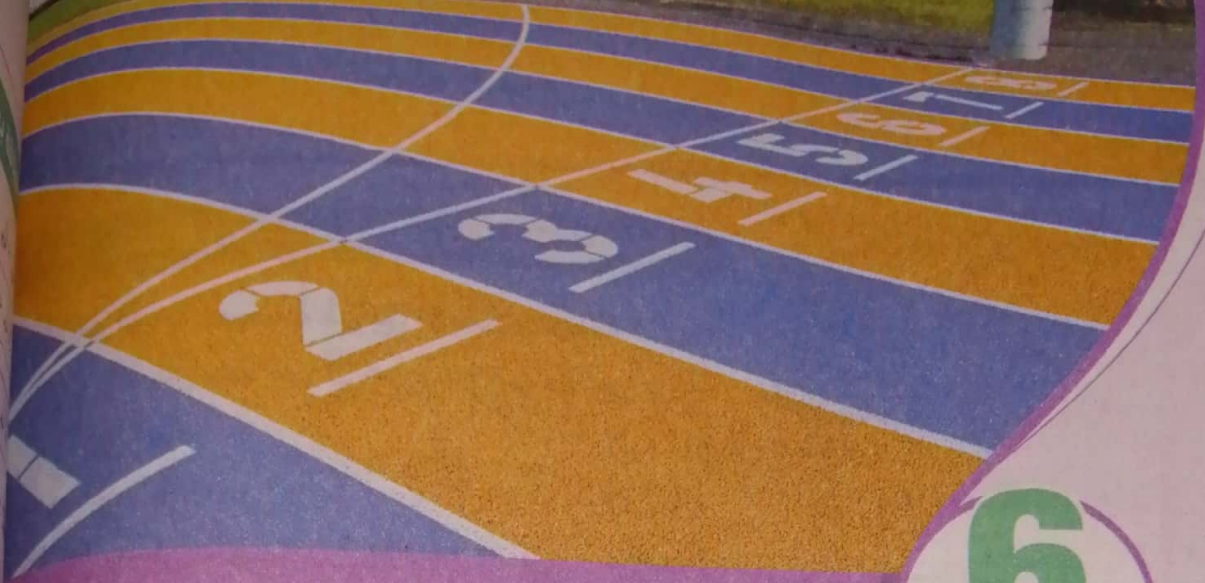
٢٨ الربط بالميكانيكا : قوة مقدارها ق أثرت على جسم وزنه (و) فى اتجاه يصنع زاوية قياسها θ مع اتجاه الحركة وكان مقدار القوة يعطى بالقاعدة

ق = $\frac{\text{م و}}{\text{م جا θ} + \text{جتا θ}}$ حيث م ثابت يسمى بمعامل الاحتكاك.

① أوجد معدل تغير القوة بالنسبة للزاوية θ

② اكتب الشرط اللازم لكى يكون معدل التغير يساوى صفرًا.

Scanned by CamScanner



الدرس 6

تطبيقات على المشتقة

تذكر أن :

أولًا ميل الخط المستقيم

١ ميل الخط المستقيم الذى معادلته : أ س + ب ص + حـ = ٠ هو $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$

فمثلًا : ميل المستقيم الذى معادلته : ٥ س + ٢ ص + ٧ = ٠ هو $\frac{-٥}{٢}$

٢ ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : (س$_١$ ، ص$_١$) ، (س$_٢$ ، ص$_٢$) يساوى $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

فمثلًا : ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -٣) ، (٤ ، ١) هو $\frac{١ + ٣}{٤ - ٢} = ٢$

٣ ميل المستقيم = ظا هـ

حيث (هـ) قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

فمثلًا : ميل المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو ظا ١٣٥° = -١

٤ إذا كان : $\overleftarrow{\text{ى}}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

فمثلًا : إذا كان (٢ ، ٣) متجه اتجاه لمستقيم فإن ميل هذا المستقيم = $\frac{٣}{٢}$

٥ ميل المستقيم يكون موجبًا إذا كان يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٦ ميل المستقيم يكون سالبًا إذا كان يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٧ ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات) = صفر

٨ ميل محور الصادات = ميل أى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات) = $\frac{١}{\text{صفر}}$ «غير معرف»

Scanned by CamScanner

ثانيًا العلاقة بين المستقيمين المتوازيين والمستقيمين المتعامدين

إذا كان : $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمين ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب فإن :

١ $ل_١ // ل_٢ \Longleftrightarrow م_١ = م_٢$

٢ $ل_١ \perp ل_٢ \Longleftrightarrow م_١ \times م_٢ = -١$ (ما لم يوازى أحدهما أحد المحورين)

فمثلًا : إذا كان ميل المستقيم = $\frac{٣}{٢}$ فإن : ميل المستقيم الذى يوازيه = $\frac{٣}{٢}$

وميل المستقيم العمودى عليه = $\frac{-٢}{٣}$

ثالثًا معادلة الخط المستقيم

١ بدلالة نقطة عليه ($س_١$ ، $ص_١$) والميل (م) هى $(ص - ص_١) = م (س - س_١)$

٢ بدلالة الميل (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات هى $ص = م س + جـ$

٣ بدلالة الجزءين المقطوعين من محورى الإحداثيات هى $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

ملاحظات

١ معادلة المستقيم الذى يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى $ص = ك$

٢ معادلة المستقيم الذى يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ل ، ك) هى $س = ل$

٣ معادلة محور السينات هى $ص = ٠$

٤ معادلة محور الصادات هى $س = ٠$

٥ معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل هى $ص = م س$

٦ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س

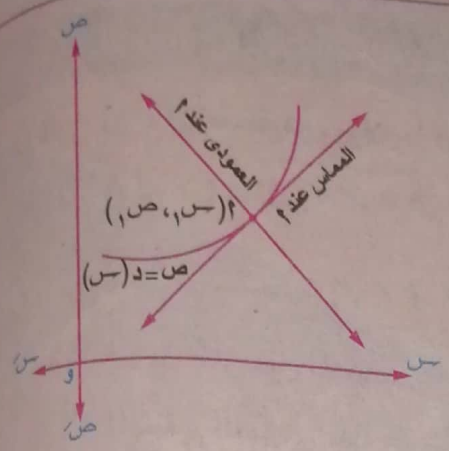
٧ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص

٨ لإيجاد نقط تقاطع منحنيين نحل معادلتيهما آنيًا.

استخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميلى المماس والعمودى عليه لمنحنى

نعلم مما سبق دارسته أن المشتقة الأولى للدالة د حيث ص = د (س) تعنى ميل المماس لمنحنى هذه الدالة عند أى نقطة (س ، ص) واقعة عليه

Scanned by CamScanner



ففى الشكل المقابل :

* ميل المماس لمنحنى الدالة [ص = د (س)]

عند النقطة أ (س١ ، ص١) الواقعة عليه

هو $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١ ، ص_١)}$

* ميل العمودى على منحنى الدالة [ص = د (س)]

عند النقطة أ (س١ ، ص١) الواقعة عليه

هو $\frac{-١}{\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١ ، ص_١)}}$

معادلتا المماس والعمودى عليه لمنحنى

إذا كانت (س١ ، ص١) نقطة تقع على منحنى الدالة د حيث : ص = د (س)، م ميل المماس عند هذه النقطة أى م = $\left[\frac{ءص}{ءس}\right]_{(س_١ ، ص_١)}$ فإن :

* معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س١ ، ص١) هى $\boxed{ص - ص_١ = م (س - س_١)}$

* معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (س١ ، ص١) هى $\boxed{ص - ص_١ = \frac{-١}{م} (س - س_١)}$

مثال ١

أوجد ميل المماس والعمودى عليه للمنحنى : ص = ظا $\left(\pi - \frac{٣}{٤} س\right)$ عند النقطة (π ، ١)

الحل

∵ $\frac{ءص}{ءس} = -\frac{٣}{٤}$ قا^٢ $\left(\pi - \frac{٣}{٤} س\right)$

∴ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (π ، ١) = $-\frac{٣}{٤}$ قا^٢ $\left(\pi - \frac{٣}{٤} \pi\right)$

$= -\frac{٣}{٤}$ قا^٢ $\frac{\pi}{٤} = \frac{-٣}{٤} \times \left(\sqrt{٢}\right)^٢ = \frac{-٣}{٢}$

، ميل العمودى على المنحنى عند النقطة (π ، ١) = $\frac{٢}{٣}$

Scanned by CamScanner

مثال ٢

أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^{٢} − ٤ س + ٣ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا محور السينات.

الحل

∵ ص = س^{٢} − ٤ س + ٣ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س − ٤

، ∵ المماس يوازى محور السينات. ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

∴ ٢ س − ٤ = ٠ ∴ س = ٢ ومنها ص = −١

∴ النقطة هى (٢ ، −١)

مثال ٣

أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى :

د (س) = (س^{٣} − ١) (س + ٢) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (−١ ، −٢) الواقعة على المنحنى.

الحل

∵ دَ (س) = (س^{٣} − ١) + ٣ س^{٢} (س + ٢)

، ∵ دَ (−١) = ١ ∴ ميل المماس للمنحنى عند النقطة (−١ ، −٢) = ١

∴ ظا هـ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى عند النقطة (−١ ، −٢) = ٤٥°

مثال ٤

أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = ٣ س^{٣} − ١١ س + ٥ والتى عندها يكون المماس للمنحنى :

١ موازيًا للمستقيم ٢ س + ص − ٥ = ٠ ٢ عموديًا على المستقيم ٢٥ ص + س = ٦

الحل

∵ ص = ٣ س^{٣} − ١١ س + ٥ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٩ س^{٢} − ١١

١ ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-٢}{١}$ = −٢ ∴ ميل المماس = −٢

∴ ٩ س^{٢} − ١١ = −٢ ∴ س^{٢} = ١ ∴ س = ± ١

∴ عند س = ١ فإن : ص = −٣

، عند س = −١ فإن : ص = ١٣

∴ النقط هى (١ ، −٣) ، (−١ ، ١٣)

Scanned by CamScanner

٢ ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-١}{٢٥}$ ∴ ميل المماس = ٢٥

∴ ٩ س^{٢} − ١١ = ٢٥ ∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ±٢

∴ عند س = ٢ فإن : ص = ٧

، عند س = −٢ فإن : ص = ٣

∴ النقط هى (٢ ، ٧) ، (−٢ ، ٣)

مثال ٥

أوجد معادلتى المماس والعمودى عليه للمنحنى : ص = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤

عند النقطة (−١ ، ٢) الواقعة عليه.

الحل

∵ ص = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٥ س^{٢} + ٦ س

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س=-١}$ = ٩ ∴ ميل المماس = ٩

∴ معادلة المماس هى (ص − ٢) = ٩ (س + ١) أى ص − ٩ س − ١١ = ٠

، ∵ ميل العمودى = $\frac{-١}{٩}$

∴ معادلة العمودى هى (ص − ٢) = $\frac{-١}{٩}$ (س + ١) أى س + ٩ ص − ١٧ = ٠

مثال ٦

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى : ص = (س − ٢) (س^{٣} − ٤) عند النقطة (٢ ، ٠)

الواقعة على المنحنى.

الحل

∵ ص = (س − ٢) (س^{٣} − ٤) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = (س − ٢) (٣ س^{٢}) + (س^{٣} − ٤)

∴ $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)_{س=٢}$ = ٤ ∴ ميل المماس = ٤

∴ معادلة المماس هى (ص − ٠) = ٤ (س − ٢) أى ٤ س − ص − ٨ = ٠

، ميل العمودى = $\frac{-١}{٤}$

∴ معادلة العمودى هى (ص − س) = $\frac{-١}{٤}$ (س − ٢) أى ٤ ص + س − ٢ = ٠

Scanned by CamScanner

مثال ٧

أوجد معادلة العمودى لمنحنى الدالة ص = س^{٢} + ٢ س − ٣ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع

١ محور السينات. ٢ محور الصادات.

الحل

١ نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بوضع ص = ٠

∴ س^{٢} + ٢ س − ٣ = ٠ ∴ (س + ٣) (س − ١) = ٠

∴ س = −٣ أ، س = ١ ∴ نقط التقاطع هى (−٣ ، ٠) ، (١ ، ٠)

، ∵ ميل المماس للمنحنى عند أى نقطة (س ، ص) عليه = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س + ٢

• عند النقطة (−٣ ، ٠) ∴ ميل المماس = −٤ وميل العمودى = $\frac{١}{٤}$

∴ معادلة العمودى هى : (ص − ٠) = $\frac{١}{٤}$ (س + ٣) أى ٤ ص − س − ٣ = ٠

• عند النقطة (١ ، ٠) ∴ ميل المماس = ٤ ∴ ميل العمودى = −$\frac{١}{٤}$

∴ معادلة العمودى هى : (ص − ٠) = −$\frac{١}{٤}$ (س − ١) أى س + ٤ ص − ١ = ٠

٢ نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع س = ٠

∴ ص = −٣ ∴ نقطة التقاطع هى (٠ ، −٣)

∴ ميل المماس = ٢ وميل العمودى = $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة العمودى هى (ص + ٣) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٠) أى س + ٢ ص + ٦ = ٠

مثال ٨

إذا كانت : ص = ظا س حيث س ∈]٠ ، ٢ π[− {$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$}

فأوجد النقط الواقعة على منحنى هذه الدالة والتى عندها يكون المماس موازيًا للمستقيم :

٢ ص − ٨ س + ٧ = ٠

الحل

∵ ص = ظا س ∴ صَ = قا^{٢} س

Scanned by CamScanner

، ∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-(-٨)}{٢}$ = ٤ ∴ قا^{٢} س = ٤ ∴ قا س = ± ٢

∴ جتا س = ± $\frac{١}{٢}$ ∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi ٢}{٣}$ ، $\frac{\pi ٤}{٣}$ ، $\frac{\pi ٥}{٣}$

ومنها ص = $\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$ على الترتيب.

∴ النقط هى : $\left(\frac{\pi}{٣} ، \sqrt{٣}\right)$ ، $\left(\frac{\pi ٢}{٣} ، -\sqrt{٣}\right)$ ، $\left(\frac{\pi ٤}{٣} ، \sqrt{٣}\right)$ ، $\left(\frac{\pi ٥}{٣} ، -\sqrt{٣}\right)$

مثال ٩

إذا كانت : س ∈ [٠ ، π] فأوجد نقطة على المنحنى ص = جا ٢ س − جتا س يكون المماس عندها مائلًا بزاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأوجد معادلة هذا المماس.

الحل

∵ ص = جا ٢ س − جتا س

∴ صَ = ٢ جتا ٢ س + جا س ، عندما ميل المماس = ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ = −١

∴ ٢ جتا ٢ س + جا س = −١ (لكن جتا ٢ س = ١ − ٢ جا^{٢} س)

∴ ٢ − ٤ جا^{٢} س + جا س = −١ ∴ ٤ جا^{٢} س − جا س − ٣ = ٠

∴ (٤ جا س + ٣) (جا س − ١) = ٠

∴ جا س = $\frac{-٣}{٤}$ (مرفوض لأن س ∈ [٠ ، π])

أ، جا س = ١ ومنها س = $\frac{\pi}{٢}$ ومنها ص = ٠ ∴ نقطة التماس هى $\left(\frac{\pi}{٢} ، ٠\right)$

∴ معادلة المماس هى : (ص − ٠) = −١ $\left(س − \frac{\pi}{٢}\right)$ أى س + ص − $\frac{\pi}{٢}$ = صفر

مثال ١٠

إذا كان المنحنى : ص = $\frac{أ}{س + ب}$ يمر بالنقطة (−١ ، ٢) والمماس للمنحنى عند هذه النقطة يوازى المستقيم س + ص − ٣ = ٠ فأوجد قيمتى : أ ، ب

Scanned by CamScanner

الحل

∵ المنحنى ص = $\frac{\text{أ}}{\text{س} + \text{ب}}$ يمر بالنقطة (−١ ، ٢)

∴ ٢ = $\frac{\text{أ}}{-١ + \text{ب}}$ ∴ أ = ٢ (−١ + ب) (١)

، ∵ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-\text{أ}}{(\text{س} + \text{ب})^{٢}}$ ∴ $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{\text{س} = -١} = \frac{-\text{أ}}{(-١ + \text{ب})^{٢}}$

، ∵ المماس يوازى المستقيم س + ص − ٣ = ٠ ∴ ميل المماس = −١

∴ $\frac{-\text{أ}}{(-١ + \text{ب})^{٢}} = -١$ ∴ $\frac{\text{أ}}{(-١ + \text{ب})^{٢}} = ١$ بشرط ب ≠ ١ (٢)

بالتعويض عن قيمة أ من (١) فى (٢) :

∴ $\frac{٢(-١ + \text{ب})}{(-١ + \text{ب})^{٢}} = ١$ ∴ $\frac{٢}{(-١ + \text{ب})} = ١$

∴ −١ + ب = ٢ ∴ ب = ٣

وبالتعويض فى (١) : ∴ أ = ٢ (−١ + ٣) = ٤

مثال ١١

أثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى ص = $\frac{٢}{\text{س}}$ حيث س > ٠ عند أى نقطة عليه ومحورى الإحداثيات تساوى ٤ وحدة مربعة.

الحل

∵ ص = $\frac{٢}{\text{س}}$ = ٢ $\text{س}^{-١}$ ∴ صَ = $\frac{-٢}{\text{س}^{٢}}$ وبفرض أن نقطة التماس هى $\left(\text{أ} ، \frac{٢}{\text{أ}}\right)$

∴ صَ = $\frac{-٢}{\text{أ}^{٢}}$ ∴ معادلة المماس هى $\left(\text{ص} - \frac{٢}{\text{أ}}\right) = \frac{-٢}{\text{أ}^{٢}}$ (س − أ)

أى ٢ س + $\text{أ}^{٢}$ ص − ٤ أ = ٠ ، بوضع ص = ٠

∴ س = ٢ أ ∴ المماس يقطع محور السينات عند (٢ أ ، ٠)

، بوضع س = ٠ ∴ ص = $\frac{٤}{\text{أ}}$

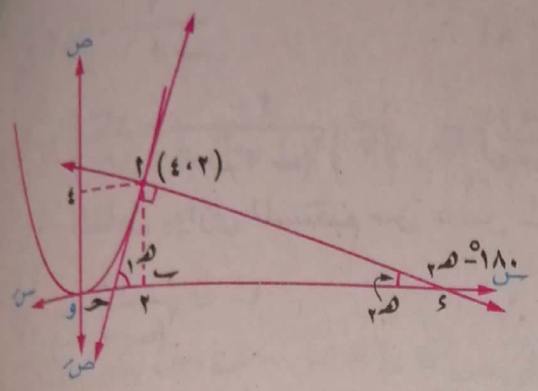
∴ المماس يقطع محور الصادات عند $\left(٠ ، \frac{٤}{\text{أ}}\right)$

∴ مساحة المثلث المطلوب = $\frac{١}{٢}$ × ٢ أ × $\frac{٤}{\text{أ}}$ = ٤ وحدة مربعة.

Scanned by CamScanner

مثال ١٢

أوجد مساحة المثلث المحدد بمحور السينات والمماس والعمودى لمنحنى الدالة د : د (س) = س^{٢} عند النقطة (٢ ، ٤) الواقعة عليه.



الحل

د َ (س) = ٢ س ، عند النقطة (٢ ، ٤)

∴ د َ (س) = ٤

∵ ميل المماس = طا هـ١

∴ طا هـ١ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

∴ ٤ = $\frac{٤}{\text{ب حـ}}$ ∴ ب حـ = ١ وحدة.

، ∵ ميل العمودى = $\frac{-١}{٤}$ ∴ طا (١٨٠° − هـ٢) = $-\frac{١}{٤}$

∴ − طا هـ٢ = $\frac{-١}{٤}$ ∴ طا هـ٢ = $\frac{١}{٤}$

، ∵ طا هـ٢ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ء ب}}$ ∴ $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٤}{\text{ء ب}}$

∴ ء ب = ١٦ وحدة. ∴ ء حـ = ١٦ + ١ = ١٧ وحدة.

∴ مساحة Δ أ ء حـ = $\frac{١}{٢}$ × ء حـ × أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٧ × ٤ = ٣٤ وحدة مربعة.

حل آخر :

∵ المماس للمنحنى عند النقطة (٢ ، ٤) ميله = ٤

∴ معادلة المماس هى (ص − ٤) = ٤ (س − ٢) أى ص − ٤ س + ٤ = ٠

لإيجاد نقط تقاطع المماس مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س = ١ ∴ حـ = (١ ، ٠)

، ∵ العمودى للمنحنى عند النقطة (٢ ، ٤) ميله = $\frac{-١}{٤}$

∴ معادلة العمودى هى (ص − ٤) = $\frac{-١}{٤}$ (س − ٢) أى ٤ ص + س − ١٨ = ٠

لإيجاد نقط تقاطع العمودى مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ س = ١٨ ∴ ء = (١٨ ، ٠)

∴ طول $\overline{\text{حـ ء}}$ = ١٨ − ١ = ١٧ وحدة طولية.

∴ مساحة Δ أ حـ ء = $\frac{١}{٢}$ حـ ء × أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ١٧ × ٤ = ٣٤ وحدة مربعة.

Scanned by CamScanner

تمارين 14

على تطبيقات على المشتقة

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية :

(١) $ص = \frac{١ - ٢س}{س - ٢}$ عند النقطة (١ ، ١) « ٣ »

(٢) $ص = \sqrt{س^٢ + س + ٢}$ عند النقطة (٢ ، ٢) « $\frac{٥}{١٢}$ »

(٣) $ص = ٥ - جا س$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$ « $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ »

(٤) $ص = س جتا ٢س$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$ « -١ »

(٥) $ص = س \sqrt{جا س}$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$ « ١ »

---

٢ أوجد ميل العمودى على كل من المنحنيات الآتية :

(١) $ص = ٢س^٣ - ٣س^٢ - ١٢س + ٥$ عند النقطة (-٢ ، ١) « $\frac{-١}{٢٤}$ »

(٢) $ص = (س - ١)(س^٣ + ٢)$ عند النقطة (١ ، ٠) « $\frac{-١}{٣}$ »

(٣) $ص = ظا(\pi - \frac{٢}{٣}س)$ عند النقطة $(\pi ، \sqrt{٣})$ « $\frac{٣}{٨}$ »

(٤) $ص = س^٢ (س - \frac{٢}{س})(س + \frac{٢}{س})$ عند $س = ٢$ « $\frac{-١}{٣٢}$ »

---

٣ أوجد ميل المماس للمنحنى : $ص = (س + ٢)(س^٣ + ١)$ عند نقط تقاطعه مع محور السينات.

« -٧ ، ٣ »

---

٤ أوجد ميل المماس للمنحنى : $د(س) = س^٣ - ٢س^٢ + ٣س - ١$ عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات.

« ٣ »

---

٥ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة المبينة :

(١) $ص = س^٢ + \frac{١}{س} - ١$ عند $س = ١$ « ٤٥° »

(٢) $ص = \sqrt{٢س^٢ + ٧}$ عند النقطة (-٣ ، ٥) « ١٢٩° ٤٨َ ٢٠ً »

(٣) $ص = س^٢ |س| - ٢$ عند $س = -٢$ « ٩٤° ٤٥َ ٤٩ً »

Scanned by CamScanner

٦ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^{٣} − ٦ س^{٢} − ١٥ س + ٢٠ والتى يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات. « (٥ ، −٨٠) ، (−١ ، ٢٨) »

٧ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = (س − ٣) (س^{٢} + ٢) والتى عندها ميل المماس يساوى ١١ « (٣ ، ٠) ، (−١ ، −١٢) »

٨ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة : ص = (س − ٣)^{٢} − ١ والتى عندها المماس يوازى المستقيم ٢ س + ص − ٣ = ٠ « (٢ ، ٠) »

٩ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^{٢} − ٢ س + ٣ والتى عندها يكون المماس للمنحنى :

(١) موازيًا محور السينات. (٢) عموديًا على المستقيم س − ٤ ص + ١ = ٠ « (١ ، ٢) ، (−١ ، ٦) »

١٠ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٥ س + ١٢ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٥ ، ٩) « (٣ ، −٣) ، (−١ ، ١٣) »

١١ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = $\frac{س - ٢}{س + ٢}$ والتى يصنع المماس عندها زاوية موجبة قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. « (٠ ، −١) ، (−٤ ، ٣) »

١٢ أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = ٣ س^{٣} − ١١ س + ٥ والتى يكون عندها المماس :

(١) موازيًا المستقيم ٢ س + ص − ٥ = ٠ (٢) عموديًا على المستقيم ٢٥ ص + س = ٦

(٣) يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ظلها = −١١

١٣ أوجد معادلة المماس لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(١) ص = ٣ س^{٣} − ٧ س^{٢} + س − ٢ عند النقطة (١ ، −٥)

(٢) ص = $\sqrt{س}$ + $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ عند النقطة (٤ ، ٤)

(٣) ص = ظا س + جا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

(٤) ص = ٢ جا س + جتا س عند النقطة (٠ ، ١)

(٥) ص = ٢ س جا س جتا س عند س = π

(٦) د (س) = ٤ س − ظا س عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، د ($\frac{\pi}{٤}$))

Scanned by CamScanner

١٤ أوجد معادلة العمودى على كل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(١) $ص = س^{٥} - ٤ س^{٣} + ٢$ عند $س = -١$

(٢) $ص = \frac{س^{٢} - ١}{٢ - س^{٢}}$ عند $س = ٠$

(٣) $ص = ظا س$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$

---

١٥ أوجد معادلة كل من المماس والعمودى عليه لكل من المنحنيات الآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها :

(١) $ص = جا س ظا ٦ س$ عند $س = \frac{\pi}{٦}$

(٢) $ص = س جا ٢ س$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٤})$

(٣) $ص = \sqrt{جا س + جتا س}$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$

---

١٦ أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى : $ص = \frac{س + ٣}{س + ١}$ عند النقطة الواقعة على المنحنى والتى إحداثيها السينى = ١ هل النقطة أ (-٣ ، ٤) تقع على المماس ؟ **فسر إجابتك.**

---

١٧ أوجد معادلة المماس للمنحنى : $ص = ٢ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٥ س$ الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. « ص + س + ٢ = ٠ »

---

١٨ أوجد معادلة المماس للمنحنى : $ص^{٢} = س - ١$ إذا كان ميل المماس = $\frac{-١}{٢}$

« ٢ ص + س = ٠ »

---

١٩ أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة : ص = (س - ٢) (س + ١) عند كل من نقطتى تقاطعه مع محور السينات. « ص - ٣ س + ٦ = ٠ ، ص + ٣ س + ٢ = ٠ »

---

٢٠ أوجد قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس للمنحنى : ص + جا ٢ س = صفر مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة $(\frac{\pi}{٣} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢})$ « ٤٥° »

---

٢١ إذا كان المماس لمنحنى الدالة د حيث د (س) = أ $س^{٢}$ + ب س + ٥ عند النقطة (-١ ، ٣) الواقعة عليه يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° فأوجد قيمتى : أ ، ب « ١ ، ٣ »

Scanned by CamScanner

٢٢ إذا كان ميل المماس للمنحنى : ص = أ س^{٢} + ٢ ب س عند نقطة الأصل يساوى ٦، والنقطة (-١ ، -٣) تقع على المنحنى فأوجد قيمتى : أ ، ب

« ٣ ، ٢ »

٢٣ إذا كان المنحنى ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} يمس المستقيم ص = ٨ س + ٥ عند النقطة (-١ ، -٣) فأوجد قيمتى : أ ، ب

« ٢ ، -١ »

٢٤ إذا كان المنحنى ص = (س^{٢} - ٢ س) (أ س + ب) يمس محور السينات عند النقطة (٢ ، ٠)، ويمس المستقيم ص = ٢ س عند نقطة الأصل فأوجد قيمتى : أ ، ب

« $\frac{١}{٢}$ ، -١ »

٢٥ إذا كانت : ص = $\frac{١}{أ + ب س}$ هى معادلة منحنى يمر بالنقطة (١ ، -١) وميل المماس له عند هذه النقطة يساوى ٢ فأوجد قيمتى : أ ، ب

« ١ ، -٢ »

٢٦ إذا كانت : س ∈ [٠ ، π] فأوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = جا ٢ س وعندها يكون المماس موازيًا المستقيم : ص = ٨ + س

« $\left(\frac{\pi}{٦} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ ، $\left(\frac{٥\pi}{٦} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)$ »

٢٧ أثبت أن المماس للمنحنى : ص = س^{٣} + ٣ س - ٢ عند أى نقطة عليه يميل بزاوية حادة على محور السينات ثم أوجد معادلة العمودى للمنحنى عند النقطة (١ ، ٢) الواقعة على المنحنى.

« س + ٦ ص - ١٣ = ٠ »

٢٨ أثبت أن المماس المرسوم للمنحنى : ص = س^{٢} + س - ١ عند النقطة (١ ، ١) يكون عموديًا على المماس المرسوم للمنحنى ص = ٢ - $\sqrt[٣]{س}$ عند نفس النقطة.

٢٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (٢ س - ٣)^{٥} عند س = ٢ يساوى .....

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) ٥ (د) ١٠

(٢) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = جا س جتا س يساوى .....

(أ) جتا س جا س (ب) جتا^{٢} س - جا^{٢} س

(جـ) جا س - جتا س (د) جا^{٢} س + جتا^{٢} س

(٣) إذا كان المستقيم : ص + س - ١ = ٠ يمس منحنى الدالة د :

د (س) = س^{٢} - ٣ س + أ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

Scanned by CamScanner

④ المماس لمنحنى الدالة ص = $\sqrt[3]{س}$ عند س = ٠ هو .....

(أ) محور السينات. (ب) محور الصادات.

(جـ) المستقيم ص = س (د) المستقيم س + ص = ٠

⑤ إذا كانت معادلة العمودى للمنحنى د (س) عند النقطة (٢ ، -١) هى س - ٢ ص = ٤ فإن : دَ (٢) = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ١ (د) -١

⑥ إذا كان المماس للمنحنى : ص = $س^{٣}$ - ٣ $س^{٢}$ يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن : س ∈ .....

(أ) [٠ ، ٢] (ب)]٠ ، ٢[(جـ) ح - [٠ ، ٢] (د) ح -]٠ ، ٢[

⑦ إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = $س^{٢}$ + أ س + ب يساوى -١ عند النقطة (٢ ، -٢) فإن : أ × ب = ...

(أ) -١٥ (ب) -٢٠ (جـ) -١ (د) ١٠

⑧ المماس للمنحنى ص = جتا س عند س = $\frac{\pi}{٢}$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها .....

(أ) $\frac{\pi}{٦}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٣}$ (د) $\frac{٣\pi}{٤}$

⑨ المماس للمنحنى ص = $(٣ س - ٥)^{٣}$ عند النقطة (٢ ، ١) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة ظلها يساوى .....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٩

⑩ إذا كان : ص = $\frac{٢ ظا س}{١ - ظا^{٢} س}$ فإن : ميل المماس عند س = $\frac{\pi}{٨}$ يساوى .....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

⑪ إذا كان العمودى على منحنى الدالة : ص = د (س) عند النقطة (٣ ، ٤) يصنع زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن : دَ (٣) = ...

(أ) -١ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

⑫ إذا كانت : د (س) = ٣ $س^{٢}$ - ٥ س + ١ وكانت د (أ) = دَ (أ) فإن : أ = ...

(أ) ٣ أ، $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ أ، $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ أ، ٣ (د) ٢ أ، ٣

Scanned by CamScanner

(١٣) إذا كان المستقيم ص = ٨ − ٣ س مماسًا لمنحنى الدالة د عند النقطة (٣ ، −١)

فإن : دَ (٣) = ...

(أ) −١ (ب) −٣ (جـ) ٣ (د) ٨

(١٤) إذا كانت : ص = (أ س + ٢)^{٢} وكان $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦ عندما س = ١

فإن : أ = ...

(أ) ١ أ، ٦ (ب) ١ أ، −٣ (جـ) −٣ أ، ٢ (د) ٢ أ، ٦

(١٥) ميل العمودى لمنحنى الدالة : ص = |س^{٣}| عند النقطة (−٢ ، ٨) هو .....

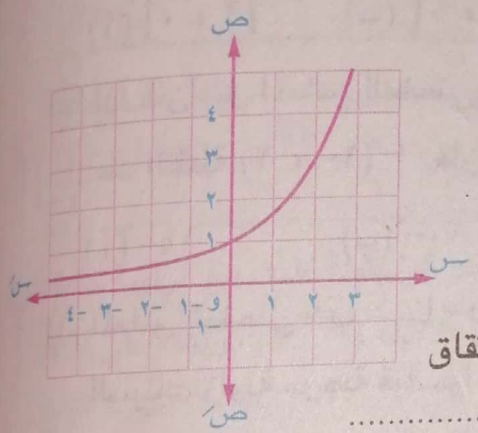
(أ) ١٢ (ب) −١٢ (جـ) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{-١}{١٢}$

(١٦) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

فإن دَ (٢) تكون .....

(أ) موجبة. (ب) سالبة.

(جـ) صفر. (د) غير معرفة.



(١٧) إذا كانت د دالة زوجية غير ثابتة وقابلة للاشتقاق على ح وكان : دَ (٢) = ٣ فإن : دَ (−٢) = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٣}$

(١٨) إذا كانت د دالة فردية قابلة للاشتقاق على ح وكان : دَ (٣) = ٥

فإن دَ (−٣) = ...

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) $\frac{-١}{٥}$

---

٣٠ أوجد ميل المماس للمنحنى : ٤ ص = ١٢ س − ٤ − س^{٢} عندما س = ٢ وأثبت أنه ضعف ميل المماس للمنحنى عندما س = ٤

أوجد أيضًا النقطة الواقعة على المنحنى ويكون ميل المماس للمنحنى عندها = −١ « (٨ ، ٧) »

---

٣١ أثبت أن : المماس للمنحنى : ص = ٣ س^{٢} − ٥ س + ٢ عند النقطة (١ ، ٠) يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها $\frac{\pi}{٤}$ ثم أوجد معادلة هذا المماس.

« ص = س − ١ »

Scanned by CamScanner

٣٢ أثبت أن : المماس لمنحنى الدالة : ص = جا س + جتا س عند النقطة $\left(\frac{\pi}{٤} ، \sqrt{٢}\right)$ يوازى محور السينات ثم أوجد معادلته.

« ص = $\sqrt{٢}$ »

٣٣ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = ٣ س^{٢} − س والذى يوازى المماس للمنحنى ص = $\frac{س - ٣}{س + ١}$ عند النقطة (١ ، −١)

« ٣ س − ٣ ص − ١ = ٠ »

٣٤ أوجد معادلتى المماسين للمنحنى : ص = س^{٣} − ٣ س + ٥ العموديين على المستقيم : س + ٩ ص = ١

« ص − ٩ س + ١١ = ٠ ، ص − ٩ س − ٢١ = ٠ »

٣٥ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = س^{٢} − ٢ س + ٣ عند النقطة (س ، ٣) الواقعة عليه (وضح وجود إجابتين)

« ص + ٢ س − ٣ = ٠ ، ص − ٢ س + ١ = ٠ »

٣٦ إذا كان المستقيم : ٢ ص − ٤ س + أ = ٠ يمس منحنى الدالة : ص = س^{٢} + ١ عند النقطة (ب ، حـ) احسب قيم : أ ، ب ، حـ

« ٠ ، ١ ، ٢ »

٣٧ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = ٥ س − ٢ س^{٢} − ٤ عند النقطة (١ ، −١) الواقعة عليه وإذا قطع هذا المماس محور الصادات فى النقطة أ وقطع محور السينات فى النقطة ب أوجد مساحة Δ و أ ب حيث و (٠ ، ٠)

« ص = س − ٢ ، ٢ وحدة مربعة »

٣٨ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص = $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ عند النقطة أ (٣ ، ٤) الواقعة عليه وإذا قطع هذا المماس محور السينات عند النقطة ب أوجد مساحة Δ أ ب و حيث و هى نقطة الأصل.

« ٤ ص + ٣ س = ٢٥ ، $\frac{٥٠}{٣}$ وحدة مربعة »

٣٩ أثبت أن مساحة المثلث المحصور بين المماس للمنحنى ص = $\frac{١}{س}$ حيث س > صفر عند أى نقطة عليه ومحورى الإحداثيات تساوى ٢ وحدة مربعة.

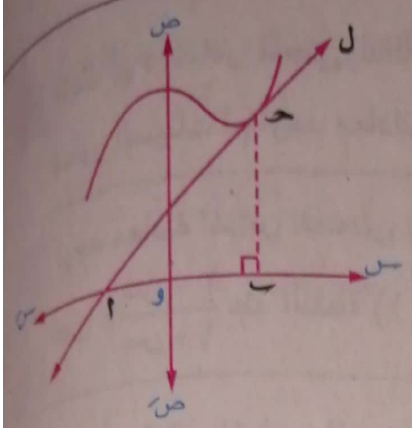
مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٤٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① معدل تغير ميل المماس للدالة د (س) = ٢ س^{٣} عند س = ٣ يساوى .....

(أ) ٣٠ (ب) ٣٢ (جـ) ٣٤ (د) ٣٦

Scanned by CamScanner



(٢) في الشكل المقابل :

إذا كان المستقيم ل مماسًا لمنحنى الدالة د

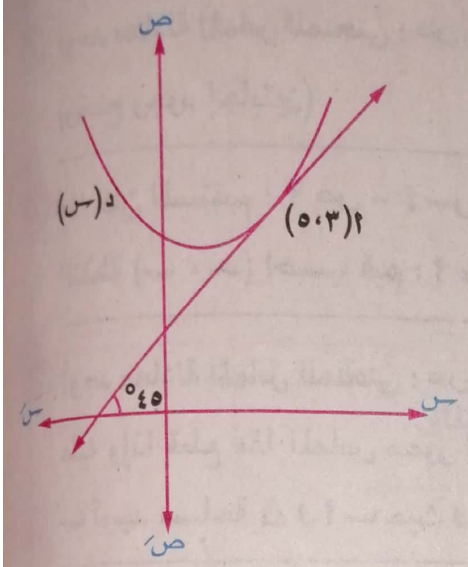
عند النقطة حـ يقطع محور السينات

في النقطة أ (-٤ ، ٠) وكانت ب (٤ ، ٠)

وكان د (٤) + دَ (٤) = ٩

فإن مساحة Δ أ ب حـ = ... وحدة مربعة.

(أ) ٣٠ (ب) ٣٢ (جـ) ٣٦ (د) ٤٢



(٣) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د

والمستقيم ل يمس منحنى الدالة عند النقطة

أ (٣ ، ٥) وكان هـ (س) = س . د (س)

فإن : هـَ (٣) = ...

(أ) ٣ (ب) ١

(جـ) ٥ (د) ٨

(٤) النقط الواقعة على المنحنى ص = ظا س

حيث س ∈]٠ ، π[- {$\frac{\pi}{٢}$} والتى عندها يكون للمماس متجه

اتجاه $\overleftarrow{ى}$ = (-١ ، -٤) هى .....

(أ) ($\frac{\pi}{٣}$ ، $\sqrt{٣}$) ، ($\frac{٤\pi}{٣}$ ، $\sqrt{٣}$) (ب) ($\frac{\pi}{٣}$ ، $\sqrt{٣}$) ، ($\frac{٢\pi}{٣}$ ، -$\sqrt{٣}$)

(جـ) ($\frac{٤}{٣}$ π ، -$\sqrt{٣}$) (د) ($\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\sqrt{٣}$)

---

٤١ أوجد مساحة سطح المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودى عليه للمنحنى ص = س^{٢} - ٦ س + ١٣ عند النقطة (٤ ، ٥) الواقعة عليه. « ٣١,٢٥ وحدة مربعة »

---

٤٢ أوجد معادلة المماس للمنحنى : ص + $\sqrt{س}$ = ١٢ عند نقطة تقاطع المنحنى مع المستقيم ص = س

« س + ٦ ص - ٦٣ = ٠ »

Scanned by CamScanner

٤٣ إذا كان المماس للمنحنى : ص = $\frac{-س}{أ + ب س}$ المرسوم عند النقطة (-١ ، ١) الواقعة على المنحنى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها هـ حيث : جتا هـ = $\frac{-١}{\sqrt{١٠}}$ فأوجد قيمتى : أ ، ب

« ٣ ، ٢ »

٤٤ أثبت أن المنحنيين : ص = س^{٢} - س + ٢ ، ص = ٣ س - س^{٢} متماسان وأوجد معادلة المماس المشترك.

« ص - س - ١ = ٠ »

٤٥ أثبت أن المنحنيين : ص = ٣ س^{٢} - ٥ س - ٢ ، ص = س^{٢} - ٣ س - ٢ يتقاطعان على التعامد عند النقطة (١ ، -٤)

٤٦ إذا كانت : س ∈ [٠ ، π] أوجد قياس الزاوية الحادة بين المماسين للمنحنيين : ص = جا س ، ص = جتا س عند نقطة تقاطعهما.

« ٤٤ً ٣١ ٠٧° »

٤٧ أوجد بدلالة النسبة التقريبية π معادلة المماس للمنحنى : ص = جتا (س + ص) والذى ميله = - $\frac{١}{٢}$ حيث س ∈ [٠ ، π]

« ٢ س + ٤ ص - π = ٠ »

٤٨ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة : ص = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} - $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} + س + ١ والتى يصنع المماس والعمودى على المماس عندها مع محور السينات مثلثًا متساوى الساقين.

٤٩ إذا كان المماس للمنحنى : ص = س^{٢} يمر بالنقطة (٣ ، ٥) فأوجد معادلة هذا المماس.

« ص - ٢ س + ١ = ٠ أ، ص - ١٠ س + ٢٥ = ٠ »

Scanned by CamScanner

الدرس 7

التكامل

درسنا فيما سبق كيفية الحصول على الدالة المشتقة دَ من الدالة الأصلية د وهو ما يسمى بالتفاضل أو الاشتقاق ولكن قد يكون المطلوب فى بعض التطبيقات الحصول على الدالة د إذا علمت الدالة المشتقة دَ ولذلك نلجأ لإجراء عملية عكسية لعملية التفاضل تسمى عملية التكامل وتسمى الدالة الناتجة بالمشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة.

الدالة د ⟵ عملية تفاضل ⟵ الدالة دَ

الدالة د ⟶ عملية تكامل ⟶ الدالة دَ

تعريف

يقال إن الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د إذا كانت تَ (س) = د (س) لكل س فى مجال د

فمثلًا : إذا كانت : د (س) = س^{٢} فإن : دَ (س) = ٢ س

وحسب التعريف السابق تكون س^{٢} هى مشتقة عكسية أو دالة أصلية مقابلة للدالة ٢ س إلا أننا نلاحظ أن الدوال س^{٢} ، س^{٢} + ٣ ، س^{٢} − ٥ ، .... ، س^{٢} + ث (حيث ث ثابت) جميعها لها نفس المشتقة ٢ س وهذا معناه أن المشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة ٢ س ليست وحيدة.

ملاحظة

إذا كان : كل من د$_{١}$ ، د$_{٢}$ مشتقة عكسية للدالة د فإن : د$_{١}$ (س) = د$_{٢}$ (س) + ث

Scanned by CamScanner

التكامل غير المحدد

مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة ويرمز لها بالرمز $\int$ د (س) ء س ويقرأ [تكامل دالة س بالنسبة إلى س]

تعريف

إذا كان : تَ (س) = د (س) فإن : $\int$ د (س) ء س = ت (س) + ث

حيث ث ثابت اختيارى (ثابت التكامل)

فمثلاً : إذا كان : $\frac{ء}{ءس}$ (س^{٣}) = ٣ س^{٢} ∴ $\int$ ٣ س^{٢} ء س = س^{٣} + ث

، إذا كان : $\frac{ء}{ءس}$ (٣ س^{٥} + ١) = ١٥ س^{٤} ∴ $\int$ ١٥ س^{٤} ء س = ٣ س^{٥} + ث

* لتعيين قيمة الثابت ث يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير المستقل س وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال ١

أثبت أن : ١ الدالة ت : ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٨} هى مشتقة عكسية للدالة د : د (س) = ٤ س^{٧}

٢ $\int \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$ ء س = $\sqrt{١ + س^{٢}}$ + ث

الحل

١ ∵ ت (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٨} ∴ تَ (س) = $\frac{١}{٢}$ × ٨ س^{٧} = ٤ س^{٧}

∴ تَ (س) = د (س) ∴ الدالة ت مشتقة عكسية للدالة د

٢ ∵ $\frac{ء}{ءس}$ [$\sqrt{١ + س^{٢}}$ + ث] = $\frac{١ \times ٢ س}{٢ \sqrt{١ + س^{٢}}}$ + صفر = $\frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$

∴ $\int \frac{س}{\sqrt{١ + س^{٢}}}$ ء س = $\sqrt{١ + س^{٢}}$ + ث

قاعدة

$\int$ س^{ن} ء س = $\frac{س^{ن+١}}{ن + ١}$ + ث حيث ث ثابت ، ن ≠ −١

Scanned by CamScanner

فمثلًا : * $\int س^{٥}\, ء س = \frac{س^{٦}}{٦} + ث = \frac{١}{٦} س^{٦} + ث$

* $\int س^{\frac{٣}{٤}}\, ء س = \frac{س^{\frac{٧}{٤}}}{\frac{٧}{٤}} + ث = \frac{٤}{٧} س^{\frac{٧}{٤}} + ث$

* $\int \frac{١}{ص^{٤}}\, ء ص = \int ص^{-٤}\, ء ص = \frac{ص^{-٣}}{-٣} + ث = \frac{-١}{٣ ص^{٣}} + ث$

* $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{ن}}\, ء ن = \int ن^{-\frac{١}{٣}}\, ء ن = \frac{ن^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} + ث = \frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{ن^{٢}} + ث$

للحظ أن

القاعدة السابقة تعنى أن عند إيجاد التكامل نقوم بزيادة الأس واحد ونقسم على الأس الجديد.

* لاحظ أن برهان القاعدة السابقة ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر كما يلى :

$$\frac{ء}{ء س}\left(\frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث\right) = \frac{(ن+١)\, س^{ن}}{(ن+١)} + \text{صفر} = س^{ن}$$

$$\therefore \int س^{ن}\, ء س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$$

خواص التكامل

إذا كانت د ، ر دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ما فإن :

١ $\int أ\, د(س)\, ء س = أ \int د(س)\, ء س$ حيث : أ ثابت $\neq$ صفر

فمثلًا : $\int ٦ س^{٢}\, ء س = ٦ \int س^{٢}\, ء س = ٦ \times \frac{س^{٣}}{٣} + ث = ٢ س^{٣} + ث$

٢ $\int [د(س) \pm ر(س)]\, ء س = \int د(س)\, ء س \pm \int ر(س)\, ء س$

فمثلًا : $\int (٢ س^{٣} + ٤ س)\, ء س = \int ٢ س^{٣}\, ء س + \int ٤ س\, ء س$

$$= \left(\frac{٢ س^{٤}}{٤} + ث_{١}\right) + \left(\frac{٤ س^{٢}}{٢} + ث_{٢}\right)$$

$$= \frac{١}{٢} س^{٤} + ٢ س^{٢} + ث_{١} + ث_{٢}$$

$$= \frac{١}{٢} س^{٤} + ٢ س^{٢} + ث \quad (\text{حيث } ث = ث_{١} + ث_{٢})$$

* لا داعى لإضافة ثابت لكل مشتقة عكسية ونكتفى بإضافة ثابت واحد يساوى مجموع الثوابت الناتجة كما يلى : $\int (٢ س^{٣} + ٤ س)\, ء س = \frac{١}{٢} س^{٤} + ٢ س^{٢} + ث$

Scanned by CamScanner

ملاحظتان

* يمكن تعميم الخاصية [٢] السابقة على أى عدد محدود من الدوال أى أن :

$$\int (د_١(س) \pm د_٢(س) \pm \dots \pm د_ن(س))\, ءس$$

$$= \int د_١(س)\, ءس \pm \int د_٢(س)\, ءس \pm \dots \pm \int د_ن(س)\, ءس$$

* $\int أ\, ءس = أ س + ث$ حيث أ ثابت

ومنها نجد أن : $\int ءس = س + ث$ ، $\int$ صفر ءس = ث

مثال ٢

أوجد : [١] $\int \frac{٣}{٢ س^٢}\, ءس$ [٢] $\int ٥ ف \sqrt{ف}\, ءف$

[٣] $\int \frac{٤}{\sqrt[٥]{س^٣}}\, ءس$ [٤] $\int \frac{١}{س^٢ \sqrt[٣]{س}}\, ءس$

الحل

[١] $\int \frac{٣}{٢ س^٢}\, ءس = \int \frac{٣}{٢} س^{-٢}\, ءس = \frac{٣}{٢} \int س^{-٢}\, ءس = \frac{٣}{٢} \times \frac{س^{-١}}{-١} + ث$

$= \frac{-٣}{٢ س} + ث$

[٢] $\int ٥ ف \sqrt{ف}\, ءف = \int ٥ ف \times ف^{\frac{١}{٢}}\, ءف = ٥ \int ف^{\frac{٣}{٢}}\, ءف$

$= \frac{٥ \times ٢ ف^{\frac{٥}{٢}}}{٥} + ث = ٢ \sqrt{ف^٥} + ث$

[٣] $\int \frac{٤}{\sqrt[٥]{س^٣}}\, ءس = \int ٤ س^{-\frac{٣}{٥}}\, ءس = \frac{٤ س^{\frac{٢}{٥}}}{\frac{٢}{٥}} + ث = ١٠ س^{\frac{٢}{٥}} + ث$

[٤] $\int \frac{١}{س^٢ \sqrt[٣]{س}}\, ءس = \int س^{-٣} \times س^{-\frac{١}{٣}}\, ءس = \int س^{\frac{-١٠}{٣}}\, ءس$

$= \frac{س^{\frac{-٧}{٣}}}{\frac{-٧}{٣}} + ث = \frac{-٣}{٧ \sqrt[٣]{س^٧}} + ث$

مثال ٣

أوجد : [١] $\int (٣ س^٢ - ٤ س + ٥)\, ءس$ [٢] $\int (٨ + \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}})\, ءس$

[٣] $\int (٢ س \sqrt{س} - \frac{٤}{٣ \sqrt{س}} + ٨ س^{-\frac{٧}{٤}} - ١)\, ءس$

Scanned by CamScanner

الحل

١ $\int (٣س^{٢} - ٤س + ٥)\,ءس = \frac{٣س^{٣}}{٣} - \frac{٤س^{٢}}{٢} + ٥س + ث$

$= س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥س + ث$

٢ $\int (٨ + \sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}})\,ءس = \int (٨ + س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}})\,ءس$

$= ٨س + \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= ٨س + \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ٢س^{\frac{١}{٢}} + ث$

٣ $\int (٢س\sqrt{س} - \frac{٤}{٣\sqrt{س}} + ٨س^{-\frac{٧}{٤}} - ١)\,ءس$

$= \int (٢س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٤}{٣}س^{-\frac{١}{٢}} + ٨س^{-\frac{٧}{٤}} - ١)\,ءس$

$= \frac{٢س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} - \frac{٤س^{\frac{١}{٢}}}{٣ \times \frac{١}{٢}} + \frac{٨س^{-\frac{٧}{٤}+١}}{-\frac{٧}{٤}+١} - س + ث$

$= \frac{٤}{٥}س^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{٣}س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٣٢}{٣}س^{-\frac{٣}{٤}} - س + ث$

مثال ٤

أوجد :

١ $\int (س - ٢)(س + ١)\,ءس$

٢ $\int س(٢س - ٣)^{٢}\,ءس$

٣ $\int (س - \frac{١}{س})^{٢}\,ءس$

٤ $\int \frac{س^{٤} - ٢س^{٢} + ٦}{س^{٢}}\,ءس$

٥ $\int \frac{س^{٢} - ٥س - ٦}{س + ١}\,ءس$

٦ $\int \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}\,ءس$

الحل

١ $\int (س - ٢)(س + ١)\,ءس = \int (س^{٢} - س - ٢)\,ءس$

$= \frac{١}{٣}س^{٣} - \frac{١}{٢}س^{٢} - ٢س + ث$

٢ $\int س(٢س - ٣)^{٢}\,ءس = \int س(٤س^{٢} - ١٢س + ٩)\,ءس$

$= \int (٤س^{٣} - ١٢س^{٢} + ٩س)\,ءس$

$= س^{٤} - ٤س^{٣} + \frac{٩}{٢}س^{٢} + ث$

Scanned by CamScanner

٣ $\int \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٢} ء س = \int \left(س^{٢} - ٢ + \frac{١}{س^{٢}}\right) ء س$

$= \int \left(س^{٢} - ٢ + س^{-٢}\right) ء س$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} - ٢ س - \frac{١}{س} + ث$

٤ $\int \frac{س^{٤} - ٢ س^{٢} + ٦}{س^{٢}} ء س = \int \left(س^{٢} - ٢ + ٦ س^{-٢}\right) ء س$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} - ٢ س + \frac{٦ س^{-١}}{-١} + ث$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} - ٢ س - \frac{٦}{س} + ث$

٥ $\int \frac{س^{٢} - ٥ س - ٦}{س + ١} ء س = \int \frac{(س + ١)(س - ٦)}{(س + ١)} ء س$

$= \int (س - ٦) ء س = \frac{س^{٢}}{٢} - ٦ س + ث$

٦ $\int \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} ء س = \int \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢ س + ٤)}{(س - ٢)} ء س$

$= \int \left(س^{٢} + ٢ س + ٤\right) ء س = \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٢ س^{٢}}{٢} + ٤ س + ث$

$= \frac{١}{٣} س^{٣} + س^{٢} + ٤ س + ث$

للحظ أنه

لا توجد قاعدة عامة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين أو خارج قسمتهما لذلك نلجأ إلى إجراء عملية الضرب أو القسمة أولًا قبل إجراء عملية التكامل.

بعض قواعد التكامل

١ $\int (أ س + ب)^{ن} ء س = \frac{١}{أ} \times \frac{(أ س + ب)^{ن+١}}{ن + ١} + ث$

٢ $\int (د(س))^{ن} د'(س) ء س = \frac{(د(س))^{ن+١}}{ن + ١} + ث$

حيث ث ثابت ، $ن \neq -١$

مثال ٥

أوجد :

١ $\int (٢ س + ٥)^{٣} ء س$

٢ $\int \left[(٧ - ٣ س)^{٦} + ٩\right] ء س$

٣ $\int \frac{٨}{(٣ - ٢ س)^{٥}} ء س$

٤ $\int \sqrt{٤ س + ١} \, ء س$

٥ $\int \frac{ء س}{\sqrt{٤ س + ١}}$

٦ $\int \sqrt{س - ٤} \, (س - ٤)^{٧} ء س$

Scanned by CamScanner

الحـــل

١ $\int (٢س + ٥)^{٣}\, ءس = \frac{(٢س + ٥)^{٤}}{٤ \times ٢} + ث = \frac{١}{٨}(٢س + ٥)^{٤} + ث$

٢ $\int [(٧ - ٣س)^{٦} + ٩]\, ءس = \frac{(٧ - ٣س)^{٧}}{٧ \times -٣} + ٩س + ث$

$= \frac{-١}{٢١}(٧ - ٣س)^{٧} + ٩س + ث$

٣ $\int \frac{٨}{(٣ - ٢س)^{٥}}\, ءس = \int ٨(٣ - ٢س)^{-٥}\, ءس = \frac{٨(٣ - ٢س)^{-٤}}{-٤ \times -٢} + ث$

$= (٣ - ٢س)^{-٤} + ث$

٤ $\int \sqrt{٤س + ١}\, ءس = \int (٤س + ١)^{\frac{١}{٢}}\, ءس = \frac{(٤س + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٤ \times \frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{١}{٦}(٤س + ١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

٥ $\int \frac{ءس}{\sqrt{٤س + ١}} = \int (٤س + ١)^{-\frac{١}{٢}}\, ءس = \frac{(٤س + ١)^{\frac{١}{٢}}}{٤ \times \frac{١}{٢}} + ث = \frac{١}{٢}(٤س + ١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

٦ $\int \sqrt{س - ٤}\,(س - ٤)^{٧}\, ءس = \int (س - ٤)^{\frac{١}{٢}}(س - ٤)^{٧}\, ءس = \int (س - ٤)^{٧,٥}\, ءس$

$= \frac{(س - ٤)^{٨,٥}}{٨,٥} + ث$

مثال ٦

أوجد :

١ $\int س(س^{٢} + ٥)^{٧}\, ءس$

٢ $\int (٢س^{٣} - ١٠س + ١)^{٩}(٣س^{٢} - ٥)\, ءس$

٣ $\int \frac{س^{٤}}{(س^{٥} + ١)^{٧}}\, ءس$

٤ $\int \frac{س^{٢} + ١}{(س^{٣} + ٣س)^{٦}}\, ءس$

٥ $\int س(٦س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧)^{٧}(٣س - ١)\, ءس$

الحـــل

١ بفرض أن : د (س) = $س^{٢} + ٥$ ∴ دَ (س) = ٢س

∴ $\int س(س^{٢} + ٥)^{٧}\, ءس = \frac{١}{٢}\int (٢س)(س^{٢} + ٥)^{٧}\, ءس$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{(س^{٢} + ٥)^{٨}}{٨} + ث = \frac{١}{١٦}(س^{٢} + ٥)^{٨} + ث$

Scanned by CamScanner

٢ بفرض أن د (س) = ٢ س^{٣} − ١٠ س + ١

∴ دَ (س) = ٦ س^{٢} − ١٠ = ٢ (٣ س^{٢} − ٥)

∴ ∫ (٢ س^{٣} − ١٠ س + ١)^{٩} (٣ س^{٢} − ٥) ء س

= $\frac{١}{٢}$ ∫ (٢ س^{٣} − ١٠ س + ١)^{٩} × ٢ (٣ س^{٢} − ٥) ء س

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{(٢ س^{٣} − ١٠ س + ١)^{١٠}}{١٠}$ + ث

= $\frac{١}{٢٠}$ (٢ س^{٣} − ١٠ س + ١)^{١٠} + ث

٣ بفرض أن : د (س) = س^{٥} + ١

∴ دَ (س) = ٥ س^{٤}

∴ ∫ $\frac{س^{٤}}{(س^{٥} + ١)^{٧}}$ ء س = ∫ س^{٤} (س^{٥} + ١)$^{-٧}$ ء س = $\frac{١}{٥}$ ∫ ٥ س^{٤} (س^{٥} + ١)$^{-٧}$ ء س

= $\frac{١}{٥}$ × $\frac{(س^{٥} + ١)^{-٦}}{-٦}$ + ث

= $\frac{-١}{٣٠}$ (س^{٥} + ١)$^{-٦}$ + ث

٤ بفرض أن : د (س) = س^{٣} + ٣ س

∴ دَ (س) = ٣ س^{٢} + ٣ = ٣ (س^{٢} + ١)

∴ ∫ $\frac{س^{٢} + ١}{(س^{٣} + ٣ س)^{٦}}$ ء س = ∫ (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٣ س)$^{-٦}$ ء س

= $\frac{١}{٣}$ ∫ ٣ (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٣ س)$^{-٦}$ ء س

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{(س^{٣} + ٣ س)^{-٥}}{-٥}$ + ث = $\frac{-١}{١٥}$ (س^{٣} + ٣ س)$^{-٥}$ + ث

٥ بفرض أن : د (س) = ٦ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٧

∴ دَ (س) = ١٨ س^{٢} − ٦ س = ٦ س (٣ س − ١)

∴ ∫ س (٦ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٧)^{٧} (٣ س − ١) ء س

= $\frac{١}{٦}$ ∫ (٦ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٧)^{٧} × ٦ س (٣ س − ١) ء س

= $\frac{١}{٦}$ × $\frac{(٦ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٧)^{٨}}{٨}$ + ث = $\frac{١}{٤٨}$ (٦ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٧)^{٨} + ث

Scanned by CamScanner

مثال ٧

أوجد :

١ $\int \text{س}^{٦} \left(٣ - \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٦} \text{ء س}$

٢ $\int \left(\text{س} \sqrt{\frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{٣}{\text{س}}}\right) \text{ء س}$

٣ $\int \text{س} \left(\text{س} + ٤\right)^{٨} \text{ء س}$

٤ $\int \text{س}^{١٥} \left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٧} \text{ء س}$

٥ $\int \frac{\text{س} + ٣}{\sqrt{\text{س} - ١}} \text{ء س}$

٦ $\int \frac{٢\text{س} - ١}{\left(٢\text{س} + ٣\right)^{٤}} \text{ء س}$

الحل

١ $\int \text{س}^{٦} \left(٣ - \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٦} \text{ء س} = \int \left(\text{س}\left(٣ - \frac{٢}{\text{س}}\right)\right)^{٦} \text{ء س} = \int \left(٣\text{س} - ٢\right)^{٦} \text{ء س}$

$= \frac{\left(٣\text{س} - ٢\right)^{٧}}{٧ \times ٣} + \text{ث}$

$= \frac{١}{٢١} \left(٣\text{س} - ٢\right)^{٧} + \text{ث}$

٢ $\int \left(\text{س} \sqrt{\frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{٣}{\text{س}}}\right) \text{ء س} = \int \sqrt{\text{س}^{٢} \left(\frac{٢}{\text{س}^{٢}} - \frac{٣}{\text{س}}\right)} \text{ء س}$

$= \int \sqrt{٢ - ٣\text{س}} \text{ء س}$

$= \int \left(٢ - ٣\text{س}\right)^{\frac{١}{٢}} \text{ء س} = \frac{\left(٢ - ٣\text{س}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times -٣} + \text{ث}$

$= \frac{-٢}{٩} \left(٢ - ٣\text{س}\right)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$

٣ $\int \text{س} \left(\text{س} + ٤\right)^{٨} \text{ء س} = \int \left(\text{س} + ٤ - ٤\right) \left(\text{س} + ٤\right)^{٨} \text{ء س}$

$= \int \left(\text{س} + ٤\right)^{٩} \text{ء س} - ٤ \int \left(\text{س} + ٤\right)^{٨} \text{ء س}$

$= \frac{\left(\text{س} + ٤\right)^{١٠}}{١٠} - ٤ \times \frac{\left(\text{س} + ٤\right)^{٩}}{٩} + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٠} \left(\text{س} + ٤\right)^{١٠} - \frac{٤}{٩} \left(\text{س} + ٤\right)^{٩} + \text{ث}$

Scanned by CamScanner

٤ $\int \text{س}^{١٥} \left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٧} \text{ء س} = \int \text{س} \times \text{س}^{١٤} \left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٧} \text{ء س}$

$= \int \text{س} \left[\text{س}^{٢} \left(\frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)\right]^{٧} \text{ء س}$

$= \int \text{س} (\text{س} + ١)^{٧} \text{ء س}$

$= \int (\text{س} + ١ - ١) (\text{س} + ١)^{٧} \text{ء س}$

$= \int (\text{س} + ١)^{٨} \text{ء س} - \int (\text{س} + ١)^{٧} \text{ء س}$

$= \frac{١}{٩} (\text{س} + ١)^{٩} - \frac{١}{٨} (\text{س} + ١)^{٨} + \text{ث}$

٥ $\int \frac{\text{س} + ٣}{\sqrt{\text{س} - ١}} \text{ء س} = \int (\text{س} + ٣) (\text{س} - ١)^{-\frac{١}{٢}} \text{ء س}$

$= \int (\text{س} - ١ + ٤) (\text{س} - ١)^{-\frac{١}{٢}} \text{ء س}$

$= \int (\text{س} - ١)^{\frac{١}{٢}} \text{ء س} + ٤ \int (\text{س} - ١)^{-\frac{١}{٢}} \text{ء س}$

$= \frac{(\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ٤ \times \frac{(\text{س} - ١)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{٢}{٣} (\text{س} - ١)^{\frac{٣}{٢}} + ٨ (\text{س} - ١)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

٦ $\int \frac{٢\text{س} - ١}{(٢\text{س} + ٣)^{٤}} \text{ء س} = \int (٢\text{س} - ١) (٢\text{س} + ٣)^{-٤} \text{ء س}$

$= \int (٢\text{س} + ٣ - ٤) (٢\text{س} + ٣)^{-٤} \text{ء س}$

$= \int (٢\text{س} + ٣)^{-٣} \text{ء س} - ٤ \int (٢\text{س} + ٣)^{-٤} \text{ء س}$

$= \frac{(٢\text{س} + ٣)^{-٢}}{-٢ \times ٢} - ٤ \times \frac{(٢\text{س} + ٣)^{-٣}}{-٣ \times ٢} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{٤} (٢\text{س} + ٣)^{-٢} + \frac{٢}{٣} (٢\text{س} + ٣)^{-٣} + \text{ث}$

ملاحظة

* $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \int \text{د}(\text{س}) \text{ء س} = \text{د}(\text{س})$ بينما $\int \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} [\text{د}(\text{س})] \text{ء س} = \text{د}(\text{س}) + \text{ث}$

فمثلاً : $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \int \text{س}^{٥} \text{ء س} = \text{س}^{٥}$ بينما $\int \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} (\text{س}^{٥}) \text{ء س} = \text{س}^{٥} + \text{ث}$

Scanned by CamScanner

تكامل بعض الدوال المثلثية

علمنا من دراستنا السابقة لاشتقاق الدوال المثلثية أنه :

* إذا كانت ص = جتا س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = − جا س

* إذا كانت ص = جا س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = جتا س

* إذا كانت ص = ظا س فإن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا^{٢} س

وحيث إن عملية التكامل هي عملية الحصول على الدالة الأصلية من مشتقتها فإنه يمكن استنتاج التكاملات الآتية :

١ ∫ جا س ءس = − جتا س + ث

٢ ∫ جتا س ءس = جا س + ث

٣ ∫ قا^{٢} س ءس = ظا س + ث

حيث ث ثابت اختياري

وبالمثل يمكن استنتاج النتائج التالية

نتائج هامة

١ ∫ جا (أ س + ب) ءس = − $\frac{١}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث

٢ ∫ جتا (أ س + ب) ءس = $\frac{١}{أ}$ جا (أ س + ب) + ث

٣ ∫ قا^{٢} (أ س + ب) ءس = $\frac{١}{أ}$ ظا (أ س + ب) + ث

حيث ث ثابت اختياري

وبرهان كل من الحالات السابقة ينتج مباشرة بمفاضلة الطرف الأيسر.

مثال ٨

أوجد :

١ ∫ جتا (٥ س + ٦) ءس

٢ ∫ جا ($\frac{\text{س}}{٢}$ + ٣) ءس

٣ ∫ (٥ جتا س − ٧ جا $\frac{\text{س}}{٢}$) ءس

٤ ∫ (٣ − س + قا^{٢} $\frac{١}{٤}$ س) ءس

٥ ∫ (٣ س^{٢} + $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$ + جا $\frac{\pi}{٦}$) ءس

٦ ∫ (١ + قا س) (١ − قا س) ءس

الحل

١ ∫ جتا (٥ س + ٦) ءس = $\frac{١}{٥}$ جا (٥ س + ٦) + ث

Scanned by CamScanner

٢ ∫ حا(س/٢ + ٣) ء س = − ١/(١/٢) حتا(س/٢ + ٣) + ث = −٢ حتا(س/٢ + ٣) + ث

٣ ∫ (٥ حتا س − ٧ حا س/٢) ء س = ٥ حا س + ١٤ حتا س/٢ + ث

٤ ∫ (٣ − س + قا² ١/٤ س) ء س = ٣ س − ١/٢ س² + ٤ ظا ١/٤ س + ث

٥ ∫ (٣ س² + ١/(حتا² س) + حا π/٦) ء س

= ∫ (٣ س² + قا² س + ١/٢) ء س

= س³ + ظا س + ١/٢ س + ث

لاحظ أن

حا π/٦ = حا ٣٠° = ١/٢ (مقدار ثابت)

٦ ∫ (١ + قا س)(١ − قا س) ء س = ∫ (١ − قا² س) ء س = س − ظا س + ث

مثال ٩

أوجد :

١ ∫ (قا² س/٤ + قا² π/٤) ء س

٢ ∫ (٥ + ظا² س) ء س

٣ ∫ (حا س + حتا س)² ء س

٤ ∫ حا² س ء س

٥ ∫ (١ + حتا س)² ء س

٦ ∫ (حتا س حتا π/٣ + حا س حا π/٣) ء س

الحل

١ ∫ (قا² س/٤ + قا² π/٤) ء س

= ١/(١/٤) ظا س/٤ + س قا² π/٤ + ث

= ٤ ظا س/٤ + ٢ س + ث

لاحظ أن

قا² π/٤ = قا² ٤٥° = (√٢)² = ٢ (مقدار ثابت)

٢ ∫ (٥ + ظا² س) ء س = ∫ [٤ + (١ + ظا² س)] ء س

= ∫ (٤ + قا² س) ء س

= ٤ س + ظا س + ث

تذكر أن

* ١ + ظا² س = قا² س
* ١ + ظتا² س = قتا² س

٣ ∫ (حا س + حتا س)² ء س = ∫ (حا² س + حتا² س + ٢ حا س حتا س) ء س

= ∫ (١ + حا ٢ س) ء س

= س − ١/٢ حتا ٢ س + ث

تذكر أن

* حا² س + حتا² س = ١
* حا ٢ س = ٢ حا س حتا س

Scanned by CamScanner

٤ $\int \text{جا}^2 \text{س}\, \text{ء س} = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\, \text{جتا}\, 2\text{س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\text{س} - \frac{1}{4}\, \text{جا}\, 2\text{س} + \text{ث}$

تذكر أن

جتا ٢س = ١ - ٢ جا² س

ومنها

$\text{جا}^2\text{س} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\text{جتا}\,2\text{س}$

، جتا ٢س = ٢ جتا² س - ١

ومنها

$\text{جتا}^2\text{س} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{جتا}\,2\text{س}$

٥ $\int (1 + \text{جتا س})^2\, \text{ء س} = \int (1 + 2\,\text{جتا س} + \text{جتا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

$= \int \left(1 + 2\,\text{جتا س} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\text{جتا}\,2\text{س}\right) \text{ء س}$

$= \int \left(\frac{3}{2} + 2\,\text{جتا س} + \frac{1}{2}\,\text{جتا}\,2\text{س}\right) \text{ء س}$

$= \frac{3}{2}\text{س} + 2\,\text{جا س} + \frac{1}{4}\,\text{جا}\,2\text{س} + \text{ث}$

٦ $\int \left(\text{جتا س}\,\text{جتا}\frac{\pi}{3} + \text{جا س}\,\text{جا}\frac{\pi}{3}\right) \text{ء س}$

تذكر أن

* جتا (س ± ص) = جتا س جتا ص ∓ جا س جا ص
* جا (س ± ص) = جا س جتا ص ± جتا س جا ص

$= \int \text{جتا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{3}\right) \text{ء س}$

$= \text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{3}\right) + \text{ث}$

مثال ١٠

أوجد :

١ $\int (1 + \text{ظا}^2\text{س})\, \text{جتا}^2\text{س}\, \text{ء س}$

٢ $\int \text{جتا}^5\text{س}\, \text{جا س}\, \text{ء س}$

٣ $\int 4\,\text{ظا س}\, \text{قا}^2\text{س}\, \text{ء س}$

٤ $\int (\text{جا س} + \text{ظا س})^8\, (\text{جتا س} + \text{قا}^2\text{س})\, \text{ء س}$

الحل

١ $\int (1 + \text{ظا}^2\text{س})\, \text{جتا}^2\text{س}\, \text{ء س} = \int \text{قا}^2\text{س}\, \text{جتا}^2\text{س}\, \text{ء س}$

$= \int (\text{قا س}\, \text{جتا س})^2\, \text{ء س}$

$= \int 1\, \text{ء س} = \text{س} + \text{ث}$

Scanned by CamScanner

٢ بوضع د (س) = جتا س ∴ دَ (س) = − جا س

∴ ∫ جتا^٥ س جا س ءس

= − ∫ (جتا س)^٥ (− جا س) ءس

= − (جتا س)^٦ / ٦ + ث

= − ١/٦ جتا^٦ س + ث

تذكر أن

∫ [د (س)]^ن × دَ (س) د س

= د [(س)]^(ن+١) / (ن+١) + ث

٣ بوضع د (س) = ظا س ∴ دَ (س) = قا^٢ س

∴ ∫ ٤ ظا س قا^٢ س ءس = ٤ ∫ (ظا س) × قا^٢ س ءس

= ٤ × ظا^٢ س / ٢ + ث = ٢ ظا^٢ س + ث

٤ بوضع د (س) = جا س + ظا س ∴ دَ (س) = جتا س + قا^٢ س

∴ ∫ (جا س + ظا س)^٨ (جتا س + قا^٢ س) ءس = ١/٩ (جا س + ظا س)^٩ + ث

Scanned by CamScanner

اختبر نفسك

تمارين 15 على التكامل

من أسئلة الكتاب المدرسى

أولًا تكامل بعض الدوال الجبرية

١ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

(١) $\int \text{ص}^{٨}\, \text{ءص}$

(٢) $\int ٦\,\text{س}^{-٣}\, \text{ءس}$

(٣) $\int (\text{س} + ٢)\, \text{ءس}$

(٤) $\int -٣\, \text{ءس}$

(٥) $\int \frac{\text{ءس}}{٥}$

(٦) $\int \text{صفر}\, \text{ءس}$

(٧) $\int \frac{-٨}{٥}\, \text{ف}^{-٣}\, \text{ءف}$

(٨) $\int \text{س}^{\frac{٢}{٣}}\, \text{ءس}$

(٩) $\int \frac{\text{ءس}}{٥\,\text{س}^{٤}}$

(١٠) $\int \sqrt[٧]{\text{س}^{٥}}\, \text{ءس}$

(١١) $\int ٥\sqrt{\text{س}^{٣}}\, \text{ءس}$

(١٢) $\int \frac{١}{\sqrt[٥]{\text{س}^{٣}}}$

(١٣) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\, \text{ءس}$

(١٤) $\int \frac{١٢}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\, \text{ءس}$

(١٥) $\int \frac{٦\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt[٣]{\text{ص}}}\, \text{ءص}$

٢ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

(١) $\int (\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} - ١)\, \text{ءس}$

(٢) $\int (٤\,\text{س}^{٣} - ٦\,\text{س}^{٢} + ٨\,\text{س} - ٥)\, \text{ءس}$

(٣) $\int ٢\,(٣\,\text{ع}^{٢} - ٥)\, \text{ءع}$

(٤) $\int (\text{س}^{٤} - \text{س}^{-٢} + ٥)\, \text{ءس}$

(٥) $\int \left(\frac{٣}{\text{س}^{٣}} + \frac{٢}{\text{س}^{٢}} + ٥\right) \text{ءس}$

(٦) $\int \left(\frac{٢}{\text{ص}^{٣}} - \frac{٤}{\text{ص}^{٥}}\right) \text{ءص}$

(٧) $\int (\text{س}^{٣} + \sqrt{\text{س}})\, \text{ءس}$

(٨) $\int (٢\sqrt{\text{س}} - ٦\,\text{س}^{٢})\, \text{ءس}$

(٩) $\int \left(٣ - \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\right) \text{ءس}$

(١٠) $\int \left(٣\sqrt{\text{س}} - \frac{٢}{\text{س}^{٣}}\right) \text{ءس}$

(١١) $\int (\text{أ}\,\text{س}^{٢} + ٥\,\text{س} + \text{جـ})\, \text{ءس}$

(١٢) $\int \left(\frac{٥}{٣}\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + \frac{٧}{٤}\sqrt[٤]{\text{س}^{٣}}\right) \text{ءس}$

Scanned by CamScanner

٣ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

(١) $\int س (س + ٣) \, ءس$

(٢) $\int س^{٢} \left(٣س - \frac{٥}{س}\right) ءس$

(٣) $\int س^{٢} (٤س + ٣) \, ءس$

(٤) $\int (س - ٥)(س + ١) \, ءس$

(٥) $\int (س - ٢)(٤س^{٢} + ١) \, ءس$

(٦) $\int (س^{٢} - ٢)^{٢} \, ءس$

(٧) $\int س^{٣} (٢ - س)^{٢} \, ءس$

(٨) $\int (س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤) \, ءس$

(٩) $\int (١ - س^{٢})^{٢} (١ + س^{٢})^{٢} \, ءس$

(١٠) $\int \left(س + \frac{١}{س}\right)^{٢} ءس$

(١١) $\int \left(\sqrt{س} - ١\right)^{٢} ءس$

(١٢) $\int \sqrt{س} \left(١ + \sqrt{س}\right) ءس$

(١٣) $\int \sqrt{س} \left(س\sqrt{س} + ٢\sqrt{س} - \frac{١}{\sqrt{س}}\right) ءس$

(١٤) $\int \left(س - \frac{١}{س}\right)\left(س + \frac{١}{س}\right)\left(س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}}\right) ءس$

٤ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{٢س^{٢} + ٣}{س^{٢}} \, ءس$

(٢) $\int \frac{س^{٧} - ٤س^{٥} + س^{٣}}{س^{٣}} \, ءس$

(٣) $\int \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} \, ءس$

(٤) $\int \frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٢} \, ءس$

(٥) $\int \frac{س^{٣} - س}{س^{٢} + س} \, ءس$

(٦) $\int \frac{س - ٤}{\sqrt{س} + ٢} \, ءس$

(٧) $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} \, ءس$

(٨) $\int \frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٢س + ٤} \, ءس$

(٩) $\int \frac{٤س^{٣} - ١٢س^{٢}}{س - ٣} \, ءس$

(١٠) $\int \frac{(س^{٢} + ٢)^{٢}}{س^{٢}} \, ءس$

(١١) $\int \frac{س^{٣} + س - ٢}{س - ١} \, ءس$

(١٢) $\int \frac{س^{٢} - ٤}{\sqrt{س}\,(س - ٢)} \, ءس$

٥ أوجد كلًّا مما يأتي :

(١) $\int ٦ (س - ٢)^{٥} \, ءس$

(٢) $\int (٨ - ٣س)^{٤} \, ءس$

(٣) $\int ٣ (٣س + ١)^{٣} \, ءس$

(٤) $\int (٢ع - ٣)^{\frac{٧}{٣}} \, ءع$

(٥) $\int \sqrt{٢س + ٧} \, ءس$

(٦) $\int (٣س + ٥)^{-٩} \, ءس$

Scanned by CamScanner

⑦ $\int \left((٣ - ٢س)^{٥} + ٣\right) ءس$

⑧ $\int \frac{١٢}{(٢س - ٥)^{٤}} ءس$

⑨ $\int \frac{ءس}{\sqrt[٥]{٢س + ٩}}$

⑩ $\int \sqrt[٣]{(٤ - ٣س)^{٢}} ءس$

٦ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

① $\int س^{٥} \left(١ + \frac{٣}{س}\right)^{٥} ءس$

② $\int س^{٦} \left(١ - \frac{٢}{س}\right)^{٦} ءس$

③ $\int س^{٥} \sqrt{\frac{٦}{س^{٤}} + \frac{٣}{س^{٥}}} ءس$

④ $\int س^{٣} \sqrt{\frac{٢}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}} ءس$

⑤ $\int س^{١٠} \left(\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{٥} ءس$

⑥ $\int (٤س^{٢} + ٤س + ١)^{٥} ءس$

⑦ $\int (٤س^{٢} - ١٢س + ٩)^{\frac{٧}{٢}} ءس$

⑧ $\int (٤س + ٦) \sqrt{٢س + ٣} ءس$

⑨ $\int (س - ١)(س^{٢} - ٢س + ١) ءس$

⑩ $\int \sqrt{س - ٣} (س - ٣)^{٤} ءس$

⑪ $\int (س + ١) \sqrt[٣]{س^{٢} + ٢س + ١} ءس$

⑫ $\int \frac{٨ - ٢س}{\sqrt{٤ - س}} ء$

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① المشتقة العكسية للدالة د : د (س) = ٣ س^{٢} − ٢ س + ٥ هي .....

(أ) ٦ س − ٢ (ب) ٣ س^{٢} − ٢ س + ٥

(جـ) س^{٣} − س^{٢} + ٥ س + ث (د) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٥ س + ث

② $\int$ (س + ٢) (س − ٢) ءس = ...

(أ) س + ٤ + ث (ب) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٤ س + ث

(جـ) س^{٣} − ٤ س + ث (د) (س^{٢} − ٤)^{٢} + ث

③ $\int \frac{س^{٢} + ٣س}{س}$ ءس = ...

(أ) س + ٣ (ب) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٣ س + ث

(جـ) س^{٢} + ٣ س + ث (د) $\frac{س^{٣} + ٣س^{٢}}{س^{٢}}$

Scanned by CamScanner

④ $\int \frac{\text{س} - \frac{1}{2}}{\sqrt{2\text{س} - 1}}\, \text{ء س} = \dots\dots\dots + \text{ث}$

(أ) $\frac{1}{6}\sqrt{2\text{س} - 1}$ (ب) $\frac{1}{6}\sqrt{(2\text{س} - 1)^3}$

(جـ) $\frac{1}{6\sqrt{2\text{س} - 1}}$ (د) $\frac{1}{2}\sqrt{(2\text{س} - 1)^3}$

⑤ $\int \frac{\text{ء}}{\text{ء س}}[\text{د}(\text{س})]\, \text{ء س} = \dots\dots\dots$

(أ) $\text{د}(\text{س})$ (ب) $\text{د}(\text{س}) + \text{ث}$ (جـ) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}[\text{د}(\text{س})]$ (د) $\int \text{د}(\text{س})\, \text{ء س}$

⑥ إذا كان : $\int \text{س}^{\text{ك}}\, \text{ء س} = \frac{1}{3}\text{س}^3 + \text{ث}$ فإن : $\text{ك} = \dots\dots\dots$

(أ) -1 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3

⑦ إذا كان : $\int \text{س}\sqrt{\text{س}^2 - 15}\, \text{ء س} = \text{أ}\sqrt{(\text{س}^2 - 15)^3} + \text{ث}$ فإن : $\text{أ} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) 3 (جـ) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{1}{2}$

---

٨ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

① $\int 4\text{س}(2\text{س}^2 - 1)^3\, \text{ء س}$

② $\int \text{س}(5\text{س}^2 + 2)^{-7}\, \text{ء س}$

③ $\int \text{س}^2(2\text{س}^3 + 8)^4\, \text{ء س}$

④ $\int (\text{س}^2 - 3\text{س} + 5)^{-7}(2\text{س} - 3)\, \text{ء س}$

⑤ $\int (3\text{س}^2 + 1)(\text{س}^3 + \text{س} + 8)^5\, \text{ء س}$

⑥ $\int (3\text{س}^2 - 2\text{س} + 1)^{11}(3\text{س} - 1)\, \text{ء س}$

⑦ $\int \text{س}(4\text{س}^3 - 3\text{س}^2 + 4)^5(2\text{س} - 1)\, \text{ء س}$

⑧ $\int \text{س}^2(\text{س}^4 - \text{س}^3 + 8)^9(4\text{س} - 3)\, \text{ء س}$

⑨ $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{1 + \text{س}^2}}\, \text{ء س}$

⑩ $\int \frac{\text{س}^2}{\sqrt{1 + \text{س}^3}}\, \text{ء س}$

⑪ $\int \frac{\text{س}^2 + 1}{(\text{س}^3 + 3\text{س})^2}\, \text{ء س}$

⑫ $\int \frac{\text{س}^3}{(\text{س}^4 + 1)^6}\, \text{ء س}$

Scanned by CamScanner

٩ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

① $\int$ س (س + ٣)^{٥} ء س

② $\int$ (س + ١) (س + ٣)^{٧} ء س

③ $\int$ (س − ١) (س + ٤)^{٨} ء س

④ $\int$ س $\sqrt{\text{س} - ٢}$ ء س

⑤ $\int$ ٣ س $\sqrt[٣]{٣\text{س} + ١}$ ء س

⑥ $\int$ (س + ٢) $\sqrt{\text{س} + ١}$ ء س

⑦ $\int$ س^{١٧} $\left(\frac{١}{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٨}$ ء س

⑧ $\int \frac{\text{س} + ٣}{(\text{س} - ٢)^{٤}}$ ء س

⑨ $\int \frac{\text{س} + ٣}{\sqrt{\text{س} - ١}}$ ء س

⑩ $\int \frac{\text{س} + ١}{(٣\text{س} + ١)^{٥}}$ ء س

⑪ $\int \frac{٣\text{س} + ٢}{\sqrt{\text{س} - ٢}}$ ء س

⑫ $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٨\text{س}}{(\text{س} + ٤)^{٥}}$ ء س

⑬ $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢}{(\text{س} + ٢)^{٥}}$ ء س

⑭ $\int \sqrt{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}}$ ء س حيث س > .

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : د (س) = $\int \frac{١}{\text{س}}$ ء س فإن : دَ (٢) = ...

(أ) غير موجودة. (ب) $\frac{١}{\text{س}}$ + ث (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

② $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} + ٢}$ ء س + $\int \frac{٤\text{س} + ٤}{\text{س} + ٢}$ ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٢ س (ب) $\frac{-١}{٢}$ س^{٢} + ٢ س

(جـ) س^{٢} + ٤ س (د) س^{٢} + س

③ إذا كان : $\int$ س د (س) ء س = س^{٤} − ٨ س^{٢} فإن : د (١) = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٤ (جـ) −١٢ (د) −٢٤

④ $\int$ [٢ س + ٢ د (س) − ٢] [١ + دَ (س)] ء س = ... + ث

(أ) س + د (س) − ١ (ب) (س + د (س) − ١)^{٢}

(جـ) س^{٢} + (د (س))^{٢} − س (د) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + $\frac{١}{٢}$ (د (س))^{٢} − ٢ س

Scanned by CamScanner

⑤ $\int (\text{د}(\text{س}) + ٣\text{س}^{٢} + \text{س})\,\text{ء}\text{س} = \text{س} \cdot \text{د}(\text{س})$ فإن : $\text{دَ}(٢) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ١١

⑥ إذا كان : $\int \text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س} = \text{س}^{٣} - ٥\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ٢$ فإن : $\text{دَ}(١) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(أ) ٥ (ب) صفر (جـ) −٣ (د) −٤

⑦ $\int \sqrt{\left(\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)^{٢} + ٤}\,\text{ء}\text{س} = \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{ث}$

(أ) $\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{\text{س}}$ (ب) $\left(\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}}$ (د) $\frac{١}{٣}\left(\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣}$

⑧ $\int |\text{س}| \sqrt{\frac{١ - ٢\text{س}}{\text{س}^{٢}}}\,\text{ء}\text{س} = \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{ث}$

(أ) $\frac{٢}{٣}(١ - ٢\text{س})^{\frac{٣}{٢}}$ (ب) $\frac{-١}{٣}(١ - ٢\text{س})^{\frac{٣}{٢}}$

(جـ) $\frac{٢}{٣}\sqrt{(١ - ٢\text{س})^{٣}}$ (د) $\frac{-١}{٣}\sqrt{(١ - ٢\text{س})^{٣}}$

ثانيًا تكامل بعض الدوال المثلثية

أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

① $\int \text{جا}(٣\text{س} - ٥)\,\text{ء}\text{س}$

② $\int \text{جتا}\left(\frac{\text{س}}{٣} - ٢\right)\text{ء}\text{س}$

③ $\int (\text{س} - \text{جا}\,\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

④ $\int \text{قا}^{٢}\left(\frac{\text{س}}{٣} - ١\right)\text{ء}\text{س}$

⑤ $\int (٦\text{س} + \text{جتا}\,٤\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

⑥ $\int \text{جتا}(٢ - \text{س})\,\text{ء}\text{س}$

⑦ $\int \text{جا}\left(\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\pi}{٣}\right)\text{ء}\text{س}$

⑧ $\int \left(٤\text{س} - \text{جا}\frac{\pi}{٣}\right)\text{ء}\text{س}$

⑨ $\int \left(\frac{\pi}{٢} - ٢\,\text{جا}\frac{٣\text{س}}{٢}\right)\text{ء}\text{س}$

⑩ $\int (\text{جتا}\,٣\text{س} - \text{جا}\,\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

⑪ $\int (٧\,\text{جا}\,\text{س} - ٢\,\text{جتا}\,\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

⑫ $\int ٩\,(\text{جتا}\,\text{س} - \text{قا}^{٢}\,٣\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

⑬ $\int (٣ + ٥\,\text{قا}^{٢}\,\text{س} + ٢\,\text{جا}\,٢\text{س})\,\text{ء}\text{س}$

⑭ $\int \left(٤\,\text{جتا}\,\text{س} + \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\,\text{س}} + ١\right)\text{ء}\text{س}$

⑮ $\int \left[\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢} - \text{جا}\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right)\right]\text{ء}\text{س}$

Scanned by CamScanner

٢ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

(١) $\int (\text{جا}^2 3\text{س} + \text{جتا}^2 3\text{س} + \text{طا}^2 3\text{س})\, \text{ءس}$

(٢) $\int (\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جا}^2 \text{س})\, \text{ءس}$

(٣) $\int (1 - 2\,\text{جا}^2 3\text{س})\, \text{ءس}$

(٤) $\int \text{جاس جتاس}\, \text{ءس}$

(٥) $\int \text{جا}\, 3\text{س جتا}\, 3\text{س}\, \text{ءس}$

(٦) $\int (\text{جاس} + \text{جتاس})^2\, \text{ءس}$

(٧) $\int \left(\text{جتا}\frac{\text{س}}{2} - \text{جا}\frac{\text{س}}{2}\right)^2 \text{ءس}$

(٨) $\int \left(1 + \text{طا}^2 \frac{\text{س}}{2}\right) \text{ءس}$

(٩) $\int (3 + 4\,\text{طا}^2 \text{س})\, \text{ءس}$

(١٠) $\int \frac{\text{جتا}^2 \text{س}}{1 + \text{جاس}}\, \text{ءس}$

(١١) $\int \frac{1 + \text{جتا}^2 \text{س}}{1 - \text{جا}^2 \text{س}}\, \text{ءس}$

(١٢) $\int \frac{1 + \text{جا}^2 \text{س}}{1 - \text{جا}^2 \text{س}}\, \text{ءس}$

(١٣) $\int \frac{\text{جا}^3 \text{س} + \text{جتا}^3 \text{س}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\, \text{ءس}$

(١٤) $\int \frac{\text{جتا}\, 2\text{س}}{\text{جتاس} + \text{جاس}}\, \text{ءس}$

(١٥) $\int \frac{\text{ءس}}{1 + \text{طا}^2 \text{س}}$

(١٦) $\int [(1 - \text{طاس})^2 + 2\,\text{طاس}]\, \text{ءس}$

(١٧) $\int \left(\frac{\text{جتا}^2 \text{س} + 1}{\text{جتاس}}\right)^2 \text{ءس}$

(١٨) $\int \frac{3}{\text{جتا}^2 3\text{س}}\, \text{ءس}$

(١٩) $\int \frac{\text{ءس}}{(\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جا}^2 \text{س})^2}$

(٢٠) $\int \text{قاس}\,(3\,\text{جتاس} - 2\,\text{قاس})\, \text{ءس}$

(٢١) $\int (\text{جا}\, 3\text{س جتاس} - \text{جتا}\, 3\text{س جاس})\, \text{ءس}$

(٢٢) $\int \left(\text{جتاس جتا}\frac{\pi}{4} - \text{جاس جا}\frac{\pi}{4}\right) \text{ءس}$

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\int \text{جتا}\, 4\text{س}\, \text{ءس} = \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{ث}$

(أ) $\frac{1}{4}\,\text{جا}\, 4\text{س}$ (ب) $\frac{1}{2}\,\text{جتا}\, 2\text{س}$ (جـ) $\frac{1}{4}\,\text{جتا}^2 4\text{س}$ (د) $4\,\text{جا}\, 4\text{س}$

(٢) $\int \text{جا}\, 3\text{س}\, \text{ءس} = \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{ث}$

(أ) $\frac{1}{3}\,\text{قا}^2 3\text{س}$ (ب) $\frac{-1}{3}\,\text{جتا}\, 3\text{س}$ (جـ) $\frac{1}{3}\,\text{جتا}\, 3\text{س}$ (د) $\frac{1}{3}\,\text{جا}\, 3\text{س}$

Scanned by CamScanner

③ $\int$ قا^{٢} (٥ س) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{١٥}$ قا^{٣} ٥ س (ب) $\frac{١}{٢}$ طا^{٢} ٢ س

(جـ) $\frac{١}{٥}$ طا ٥ س (د) $\frac{١}{٥}$ طتا ٥ س

④ $\int$ (جا^{٢} س + جتا^{٢} س)^{٧} ء س = ... + ث

(أ) س (ب) ٢ جا ٢ س

(جـ) $\frac{١}{٨}$ س^{٨} (د) $\frac{١}{٣}$ جا^{٣} س + $\frac{١}{٣}$ جتا^{٣} س

⑤ $\int$ (٢ جتا^{٢} س − ١) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س (ب) $\frac{١}{٢}$ جتا ٢ س

(جـ) $\frac{٢}{٣}$ جتا^{٣} س − س (د) $\frac{٢}{٣}$ جتا^{٣} س − ١

⑥ $\int$ ٢ جا س جتا س ء س = ... + ث

(أ) $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س (ب) $\frac{-١}{٢}$ جتا ٢ س

(جـ) − جتا ٢ س (د) جا ٢ س

⑦ $\int$ (قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$) ء س = ... + ث

(أ) س (ب) ٢ س (جـ) طا س (د) طا $\frac{\pi}{٤}$

⑧ إذا كان : $\int$ جا س ء س = د (س) فإن : دَ (س) = ...

(أ) جا س (ب) − جا س (جـ) جتا س (د) − جتا س

⑨ إذا كان : $\int$ جتا (٣ س + ١) ء س = أ جا (٣ س + ١) + ث فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٩}$

⑩ $\int$ ($\frac{\text{طا س}}{\text{طتا س}}$ + ١) ء س = ... + ث

(أ) طتا س (ب) − طا س (جـ) طا س (د) − طتا س

⑪ $\int$ (٢ + طا^{٢} س) ء س = ... + ث

(أ) س − طا س (ب) س + طتا س

(جـ) − س + طا س (د) س + طا س

Scanned by CamScanner

(١٢) $\int \frac{٥ + \text{قا}\,\text{س}}{\text{قا}\,\text{س}}\,\text{ء}\,\text{س} = \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{ث}$

(أ) ٥ جا س − س
(ب) −٥ جا س − س
(جـ) ٢ جا س − س
(د) ٥ جا س + س

(١٣) $\int \frac{\text{جتا}^{٢}\,\text{س} + ٢}{\text{جتا}^{٢}\,\text{س}}\,\text{ء}\,\text{س} = \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{ث}$

(أ) س + ظا س
(ب) ٢ س + ظا س
(جـ) س + ٢ ظا س
(د) س − ٢ ظتا س

(١٤) $\int \text{ظا}^{٩}\,\text{س}\,\text{ظتا}^{٩}\,\text{س}\,\text{ء}\,\text{س} = \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{ث}$

(أ) − س + ظا س
(ب) س + ظا س
(جـ) س
(د) − س + ظتا س

---

٤ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

(١) $\int \text{جا}^{٢}\,\text{س}\,\text{ء}\,\text{س}$

(٢) $\int ٢\,\text{جتا}^{٢}\,\text{س}\,\text{ء}\,\text{س}$

(٣) $\int (١ + \text{جتا}\,\text{س})^{٢}\,\text{ء}\,\text{س}$

(٤) $\int (١ - \text{جا}\,\text{س})^{٢}\,\text{ء}\,\text{س}$

(٥) $\int (١ + \text{جا}^{٢}\,\text{س})\,\text{ء}\,\text{س}$

(٦) $\int (٤ - \text{جا}^{٢}\,\text{س})\,\text{ء}\,\text{س}$

(٧) $\int (١ - \text{جتا}\,\text{س})\,(١ + \text{جتا}\,\text{س})\,\text{ء}\,\text{س}$

(٨) $\int (٢\,\text{جتا}^{٢}\,\text{س} + \text{ظا}^{٢}\,\text{س})\,\text{ء}\,\text{س}$

(٩) $\int (\text{قا}\,\text{س} + \text{جتا}\,\text{س})^{٢}\,\text{ء}\,\text{س}$

(١٠) $\int \left(\frac{٢}{\text{قتا}^{٢}\,\text{س}} - ٣\,\text{قا}^{٢}\,٢\,\text{س}\right)\text{ء}\,\text{س}$

---

٥ أوجد كلًا من التكاملات الآتية :

(١) $\int \text{جا}^{٥}\,\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س}\,\text{ء}\,\text{س}$

(٢) $\int ٢\,\text{ظا}\,\text{س}\,\text{قا}^{٢}\,\text{س}\,\text{ء}\,\text{س}$

(٣) $\int (\text{جتا}\,\text{س} - \text{جا}\,\text{س})\,(\text{جا}\,\text{س} + \text{جتا}\,\text{س})^{٩}\,\text{ء}\,\text{س}$

(٤) $\int (\text{جا}\,\text{س} + \text{ظا}\,\text{س})^{٥}\,(\text{جتا}\,\text{س} + \text{قا}^{٢}\,\text{س})\,\text{ء}\,\text{س}$

(٥) $\int (\text{س} + \text{جا}\,\text{س} + \text{ظا}\,\text{س})^{٤}\,(١ + \text{جتا}\,\text{س} + \text{قا}^{٢}\,\text{س})\,\text{ء}\,\text{س}$

(٦) $\int (٢\,\text{س} - \text{جا}\,\text{س})\,(\text{س}^{٢} + \text{جتا}\,\text{س})^{٧}\,\text{ء}\,\text{س}$

(٧) $\int ١٣\,\text{ظا}^{١٢}\,\text{س}\,\text{قا}^{٢}\,\text{س}\,\text{ء}\,\text{س}$

Scanned by CamScanner

٦ أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

(١) $\int$ جتا^{٢} س قا^{٢} س ء س

(٢) $\int$ طا^{٢} س قتا^{٢} س ء س

(٣) $\int$ جا س جتا س جتا ٢ س جتا ٤ س ء س

(٤) $\int$ (١ + طا^{٢} ص) جتا^{٢} ص ء ص

(٥) $\int$ جتا س (جا س + طا س) ء س

(٦) $\int \left(\text{قا}^{٢}\frac{\pi}{٤} + \frac{١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{طتا}\,٢\text{س}}\right)$ ء س

(٧) $\int \frac{\text{جتا س}}{\text{قا س}}$ ء س

(٨) $\int$ (جا^{٢} س + جا^{٢} س طا^{٢} س) ء س

(٩) $\int \frac{\text{جتا}\,٤\text{س}}{\text{جتا}\,٢\text{س} - \text{جا}\,٢\text{س}}$ ء س

(١٠) $\int \frac{٢\,\text{طا}^{٢}\text{س}}{١ + \text{طا}^{٢}\text{س}}$ ء س

(١١) $\int \sqrt{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ء س حيث س $\in]٠ ، \pi[$

(١٢) $\int \sqrt{١ + \text{جتا}\,٢\theta}$ ء θ حيث $\theta \in]٠ ، \frac{\pi}{٤}[$

(١٣) $\int ٨\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}$ ء س

(١٤) $\int$ (جتا^{٢} س − جتا^{٤} س) ء س

(١٥) $\int$ (جتا س + طا س)^{٢} ء س

(١٦) $\int \frac{(\text{جا س} + \text{جتا س})^{٢}}{\text{قا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{طا س}}$ ء س

(١٧) $\int$ ٤ جا^{٤} س ء س

(١٨) $\int$ جا ٥ س جا ٣ س ء س

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $\int$ (جا س قتا س + جتا س قا س + طا س طتا س) ء س = ... + ث

(أ) ٣

(ب) ٣ س

(جـ) جتا س − جا س + قا^{٢} س

(د) $\frac{١}{٢}$ جا^{٢} س + $\frac{١}{٢}$ جتا^{٢} س + $\frac{١}{٢}$ قا^{٢} س

(٢) $\int$ جا^{١٠٠} س × قتا^{٩٩} س ء س = ... + ث

(أ) جا س

(ب) − جتا س

(جـ) جا س طا س

(د) $\frac{١}{١٠١}$ جتا^{١٠١} س

Scanned by CamScanner

③ $\int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^2\text{ س}}\,\text{ء س} = \ldots\ldots\ldots + \text{ث}$

(أ) $\frac{1}{2}$ طا^2 س (ب) قا س (جـ) ٢ قا س (د) $\frac{1}{2}$ طا س قا س

④ $\int \frac{1 + \text{جتا س}}{1 + \text{قا س}}\,\text{ء س} = \ldots\ldots\ldots + \text{ث}$

(أ) جا س (ب) − جا س (جـ) جتا س (د) − جتا س

⑤ $\int \frac{\text{جتا س} + \text{جتا}^3\text{ س}}{\text{جا}^2\text{ س} + 2\,\text{جتا}^2\text{ س}}\,\text{ء س} = \ldots\ldots\ldots + \text{ث}$

(أ) جتا س (ب) جا س (جـ) $\frac{1}{2}$ جتا^2 س (د) $\frac{1}{2}$ جا^2 س

⑥ إذا كان : أ = $\int$ جتا^2 س ء س ، ب = $\int$ جا^2 س ء س فإن : أ + ب = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) س + ث (د) $\frac{1}{2}$ جا ٢ س + ث

⑦ إذا كان : $\int$ قا^2 س ء س = د (س) فإن : دَ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ − دَ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ = ...

(أ) −٦ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) −٢

⑧ $\int$ (طا^3 س + طا س) ء س = ... + ث

(أ) $\frac{1}{4}$ طا^4 س + $\frac{1}{2}$ طا^2 س (ب) $\frac{1}{2}$ طا^2 س

(جـ) $\frac{1}{2}$ (طا^3 س + طا س)^2 (د) طا س قا^2 س

⑨ $\int \frac{(\text{طتا س} - \text{قتا س})\,(\text{طتا س} + \text{قتا س})}{(\text{طا س} - \text{قا س})\,(\text{طا س} + \text{قا س})}\,\text{ء س} = \ldots\ldots\ldots + \text{ث}$

(أ) س (ب) − س (جـ) $\frac{1}{2}$ س (د) ٢ س

⑩ ٣ $\int$ جا ٢ س جا^4 س ء س = ...

(أ) جا^4 س جتا^2 س + ث (ب) جتا^4 س جا^2 س + ث

(جـ) جا^6 س + ث (د) جتا^6 س + ث

Scanned by CamScanner

الوحدة 4

حساب المثلثات

* مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها.

الدرس 1 زوايا الارتفاع والانخفاض «تطبيقات على حل المثلث».

الدرس 2 الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين.

الدرس 3 الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية.

الدرس 4 صيغة هيرون.

Scanned by CamScanner

مراجعة على أهم القوانين التى سبقت دراستها

العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية

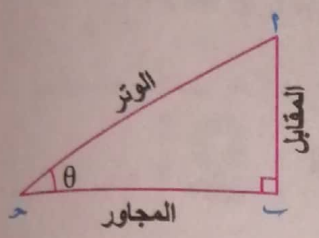
١ $\text{جتا}^2\theta + \text{جا}^2\theta = ١$

٢ $١ + \text{طا}^2\theta = \text{قا}^2\theta$

٣ $١ + \text{ظتا}^2\theta = \text{قتا}^2\theta$

٤ $\text{جا}\,\theta\,\text{قتا}\,\theta = ١$ ، $\text{جتا}\,\theta\,\text{قا}\,\theta = ١$ ، $\text{طا}\,\theta\,\text{ظتا}\,\theta = ١$

٥ $\text{طا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ، $\text{ظتا}\,\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

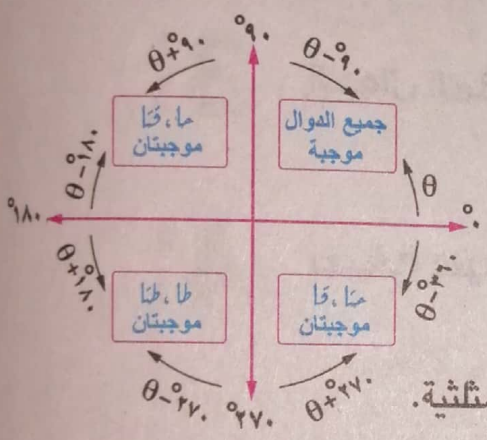


• ينبغى تذكر العلاقات الآتية :

١ $\text{جا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أب}}{\text{أحـ}}$

٢ $\text{جتا}\,\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{بحـ}}{\text{أحـ}}$

٣ $\text{طا}\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أب}}{\text{بحـ}}$



٤ العلاقات بين الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة هى متطابقات

ويمكن أن نتذكرها من الشكل المقابل :

فمثلًا : $\text{جا}\,(٩٠° + \theta) = \text{جتا}\,\theta$

، $\text{طا}\,(٣٦٠° - \theta) = -\text{طا}\,\theta$ ، ..... كل منهما متطابقة مثلثية.

قاعدة الجيب

فى أى مثلث أبحـ يكون : $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = ٢\,\text{نق}$

حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أبحـ

ملاحظتان

* باستخدام خواص التناسب نجد أن : $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = \frac{\text{محيط } \Delta \text{ أبحـ}}{\text{جا أ} + \text{جا ب} + \text{جا حـ}}$

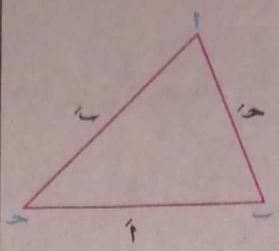
* أكبر أضلاع المثلث طولاً يقابل أكبر زواياه قياسًا ، أصغر أضلاع المثلث طولاً يقابل أصغر زواياه قياسًا.

Scanned by CamScanner

قاعدة جيب التمام — فى أى مثلث أ ب حـ يكون

- $أ^2 = ب^2 + حـ^2 - 2 ب حـ جتا أ$
- $ب^2 = أ^2 + حـ^2 - 2 أ حـ جتا ب$
- $حـ^2 = أ^2 + ب^2 - 2 أ ب جتا حـ$

تستخدم إذا علم طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة بينهما.



- $جتا أ = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{2 ب حـ}$
- $جتا ب = \frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{2 أ حـ}$
- $جتا حـ = \frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{2 أ ب}$

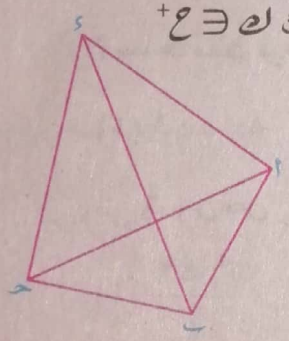
تستخدم إذا علمت أطوال الأضلاع الثلاثة فى المثلث أو النسبة بينها.

ملاحظات

* لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل استخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية إذا كانت حادة أو منفرجة.
* إذا كان أ : ب : حـ = ٢ : ٣ : ٤

نفرض أن : أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك حيث ك ∈ ح+

ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد قياسات زوايا Δ أ ب حـ



* لإثبات أن الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى :

– نثبت أن زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان :

ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠° **أى أن :** جتا أ + جتا حـ = صفر

أ، ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠° **أى أن :** جتا ب + جتا ء = صفر

– نثبت أن قياسى زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة فيه وفى جهة واحدة منها متساويان :

كأن نثبت أن : ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ) **أى أن :** جتا (∠ ب أ حـ) = جتا (∠ ب ء حـ)

Scanned by CamScanner

تمارين

تراكمية على ما سبقت دراسته

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى Δ س ص ع يكون المقدار : ٢ نق جا س = ...

(أ) عَ (ب) سَ

(جـ) صَ (د) مساحة Δ س ص ع

(٢) إذا كانت د أ تكمل د حـ فإن : جتا أ + جتا حـ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) −١ (د) $\frac{١}{٢}$

(٣) فى أى مثلث س ص ع يكون س ص : ص ع = ...

(أ) جا س : جا ص (ب) جا ص : جا ع

(جـ) جا ع : جا س (د) جا ع : جا ص

(٤) أ ب حـ مثلث فيه : $\frac{\text{جا أ}}{٣} = \frac{٢\text{ جا ب}}{٥} = \frac{\text{جا حـ}}{٤}$ فإن : أَ : بَ : حَ = ...

(أ) ٦ : ٥ : ٨ (ب) ٨ : ٥ : ٦ (جـ) ٧ : ٢ : ٤ (د) ٣ : ٥ : ٤

(٥) فى Δ س ص ع إذا كان : سَ = صَ فإن : جتا س = ...

(أ) $\frac{٢\text{ صَ}^٢}{\text{عَ}}$ (ب) $\frac{\text{عَ}}{٢\text{ صَ}}$ (جـ) $\frac{\text{عَ}}{٤\text{ سَ}}$ (د) $\frac{\text{صَ}}{٢\text{ سَ}}$

---

٢ س ص ع مثلث فيه : ق (د س) = ٨٠° ، ق (د ص) = ٦٠° ، عَ = ١٠ سم

أوجد كلًا من : سَ ، صَ لأقرب سم «١٥ سم ، ١٣ سم»

---

٣ حل المثلث أ ب حـ الذى فيه : ق (د أ) = ٥٠° ، أَ = ٤ سم ، بَ = ٣ سم

---

٤ أ ب حـ ء شكل رباعى فيه : أ ب = أ ء = ٩ سم ، ب حـ = ٥ سم ، حـ ء = ٨ سم

، أ حـ = ١١ سم أثبت أن : أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى.

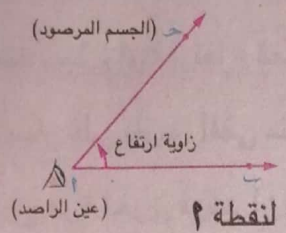
Scanned by CamScanner

الدرس 1

زوايا الارتفاع والانخفاض
(تطبيقات على حل المثلث)

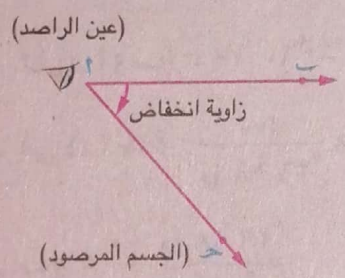
زاوية الارتفاع

إذا فرض أن هناك راصدًا عند نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة حـ **أعلى مستوى النظر** فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overleftarrow{أب}$ الأفقى والشعاع $\overleftarrow{أحـ}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى **زاوية ارتفاع** الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة أ



زاوية الانخفاض

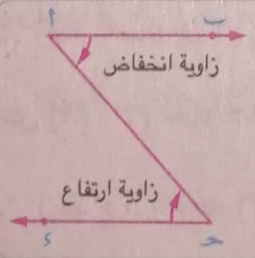
إذا فرض أن هناك راصدًا عند نقطة أ ونظر إلى جسم عند نقطة حـ **أسفل مستوى النظر** فإن الزاوية المحصورة بين الشعاع $\overleftarrow{أب}$ الأفقى والشعاع $\overleftarrow{أحـ}$ الواصل بين عين الراصد والجسم المرصود تسمى **زاوية انخفاض** الجسم المرصود حـ بالنسبة لنقطة أ



ملاحظة

قياس زاوية انخفاض حـ بالنسبة إلى أ يساوى قياس زاوية ارتفاع أ بالنسبة إلى حـ

وذلك لأن : ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) (بالتبادل)

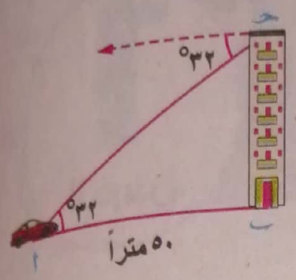


Scanned by CamScanner

مثال ١

من قمة منزل قيست زاوية انخفاض سيارة فوجد أن قياسها ٣٢° ، فإذا كانت السيارة تبعد عن قاعدة المنزل ٥٠ مترًا فأوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر.

الحل



∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ∴ ظا أ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ب أ}}$

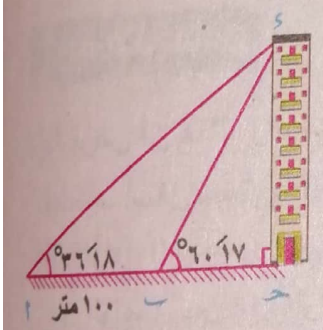
∴ ظا ٣٢° = $\frac{\text{ب حـ}}{٥٠}$

∴ ب حـ = ٥٠ ظا ٣٢° ≈ ٣١ مترًا ∴ ارتفاع المنزل ≈ ٣١ مترًا

مثال ٢

رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها يساوى ١٨َ ٣٦° ثم سار على طريق أفقى متجهًا نحو قاعدة البرج مسافة ١٠٠ متر ورصد زاوية ارتفاع قمة البرج مرة أخرى فوجد أن قياسها يساوى ١٧َ ٦٠° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

الحل



∵ د ء ب حـ خارجة عن Δ أ ب ء

∴ ق (د أ ء ب) = ١٧َ ٦٠° − ١٨َ ٣٦° = ٥٩َ ٢٣°

∴ فى Δ أ ب ء : $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ١٨َ ٣٦°}} = \frac{١٠٠}{\text{جا ٥٩َ ٢٣°}}$

∴ ب ء = $\frac{\text{١٠٠ جا ١٨َ ٣٦°}}{\text{جا ٥٩َ ٢٣°}}$ (١)

∴ فى Δ ب حـ ء القائم الزاوية فى حـ : $\frac{\text{حـ ء}}{\text{ب ء}}$ = جا ١٧َ ٦٠°

∴ حـ ء = ب ء جا ١٧َ ٦٠°

ومن (١) : ∴ حـ ء = $\frac{\text{١٠٠ جا ١٨َ ٣٦°}}{\text{جا ٥٩َ ٢٣°}}$ × جا ١٧َ ٦٠° ≈ ١٢٦ مترًا.

∴ ارتفاع البرج ≈ ١٢٦ مترًا.

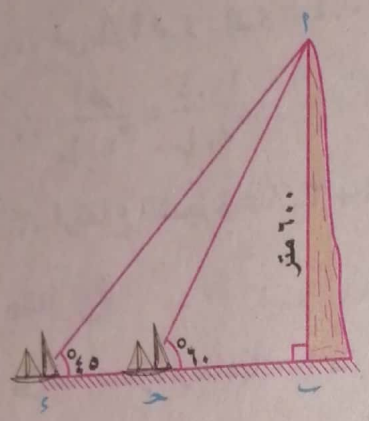
Scanned by CamScanner

مثال ٣

وجد رجل فى قارب بخارى يتحرك فى الماء مبتعدًا عن صخرة ارتفاعها ٦٠٠ متر أن قياس زاوية ارتفاع قمة الصخرة فى لحظة معينة ٦٠° ثم أصبح قياسها بعد ٤ دقائق ٤٥°

احسب السرعة المتوسطة للقارب لأقرب متر/ دقيقة.

الحل



∵ السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة المقطوعة}}{\text{الزمن الذى قطعت فيه}}$

لذلك سنوجد أولًا طول $\overline{\text{حـ ء}}$ ثم نقسمه على الزمن (٤ دقائق)

فنحصل على السرعة المطلوبة.

فى Δ أ ب حـ :

∵ $\frac{٦٠٠}{\text{ب حـ}}$ = ظا ٦٠° ∴ ب حـ = $\frac{٦٠٠}{\text{ظا ٦٠°}}$ ≈ ٣٤٦,٤١ متر

فى Δ أ ب ء : ∵ ق (∠ ب أ ء) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥°

∴ Δ أ ب ء متساوى الساقين. ∴ ب ء = أ ب = ٦٠٠ متر.

∴ حـ ء = ب ء − ب حـ = ٦٠٠ − ٣٤٦,٤١ ≈ ٢٥٣,٥٩ متر.

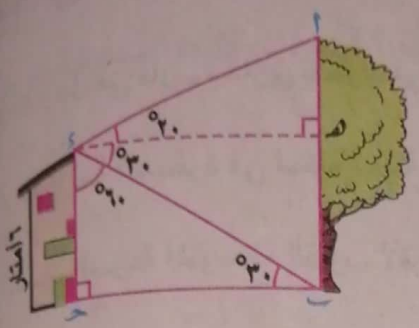
∴ السرعة = $\frac{٢٥٣,٥٩}{٤}$ ≈ ٦٣ متر/ دقيقة.

مثال ٤

من قمة منزل ارتفاعه ٦ أمتار كان قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة ٢٠° ، قياس زاوية انخفاض قاعدتها ٣٠° أوجد المسافة بين قاعدتى المنزل والشجرة ، وكذلك أوجد ارتفاع الشجرة علمًا بأن قاعدتى المنزل والشجرة فى مستوى أفقى واحد.

Scanned by CamScanner

الحل



فى Δ ب حـ ء : ∵ $\frac{٦}{\text{جا } ٣٠°} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا } ٦٠°}$

∴ ب حـ = $\frac{٦ \text{ جا } ٦٠°}{\text{جا } ٣٠°}$ ≈ ١٠,٤ متر.

∴ المسافة بين قاعدتى الشجرة والمنزل = ١٠,٤ متر.

∴ فى Δ أ هـ ء : هـ ء = ١٠,٤ متر ، ق (∠ أ) = ٧٠°

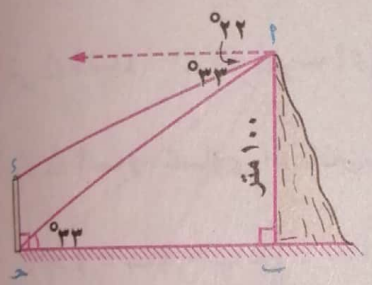
∴ $\frac{\text{أ هـ}}{\text{جا } ٢٠°} = \frac{١٠,٤}{\text{جا } ٧٠°}$ ∴ أ هـ = $\frac{١٠,٤ \text{ جا } ٢٠°}{\text{جا } ٧٠°}$ ≈ ٣,٨ متر.

∴ ارتفاع الشجرة = ٣,٨ + ٦ = ٩,٨ متر.

مثال ٥

من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ متر قيست زاويتا انخفاض قمة وقاعدة برج فكان قياساهما ٢٢° ، ٣٣° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر علمًا بأن قاعدتى الصخرة والبرج فى مستوى أفقى واحد.

الحل



فى Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب :

∵ $\frac{١٠٠}{\text{أ حـ}}$ = جا ٣٣° ∴ أ حـ = $\frac{١٠٠}{\text{جا } ٣٣°}$ ≈ ١٨٣,٦ متر.

، فى Δ أ حـ ء : ∵ ق (∠ حـ أ ء) = ١١°

، ق (∠ أ حـ ء) = ٥٧° (لماذا؟) ∴ ق (∠ ء) = ١١٢°

∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{جا } ١١٢°} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{جا } ١١°}$ ∴ حـ ء = $\frac{١٨٣,٦ \times \text{جا } ١١°}{\text{جا } ١١٢°}$ ≈ ٣٨ مترًا.

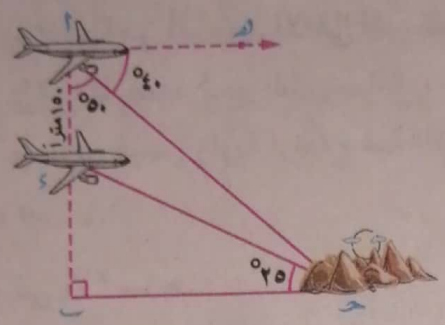
∴ ارتفاع البرج ≈ ٣٨ مترًا.

مثال ٦

رصد طيار موقعًا حربيًا فوجد أن قياس زاوية انخفاض الموقع ٤٠° ثم هبط رأسيًا لأسفل مسافة ١٥٠ مترًا فتنبه أحد الجند بالموقع الحربى للطائرة فرصد زاوية ارتفاع الطائرة فكان قياسها ٢٥° أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لحظة الرصد الثانية لأقرب متر.

Scanned by CamScanner

الحل



∵ ق(∠ أ حـ ب) = ق(∠ هـ أ حـ) = ٤٠° (بالتبادل)

∴ ق(∠ أ حـ ء) = ٤٠° − ٢٥° = ١٥°

في Δ أ حـ ء : $\frac{١٥٠}{\text{جا } ١٥°} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{جا } ٥٠°}$

∴ حـ ء = $\frac{١٥٠ \text{ جا } ٥٠°}{\text{جا } ١٥°}$

، في Δ ء حـ ب : ب ء = حـ ء جا ٢٥°

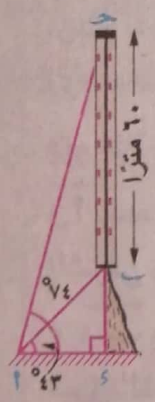
= $\frac{١٥٠ \text{ جا } ٥٠°}{\text{جا } ١٥°}$ × جا ٢٥° ≈ ١٨٨ مترًا.

∴ ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لحظة الرصد الثانية ≈ ١٨٨ مترًا.

مثال ٧

برج ارتفاعه ٦٠ مترًا مقام على صخرة ومن نقطة على سطح الأرض قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة البرج فوجد قياساهما ٧٤° ، ٤٣° على الترتيب. أوجد ارتفاع الصخرة.

الحل



في Δ أ ب حـ : ∠ أ ب حـ خارجة عن Δ أ ب ء

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠° + ٤٣° = ١٣٣°

، ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٧٤°) = ١٦°

∴ $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا } ١٦°} = \frac{٦٠}{\text{جا } ٣١°}$ ∴ أ ب = $\frac{٦٠ \text{ جا } ١٦°}{\text{جا } ٣١°}$

، في Δ أ ب ء : $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } ٤٣°} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا } ٩٠°}$

∴ ب ء = أ ب جا ٤٣° = $\frac{٦٠ \text{ جا } ١٦° \text{ جا } ٤٣°}{\text{جا } ٣١°}$ ≈ ٢١,٩ متر.

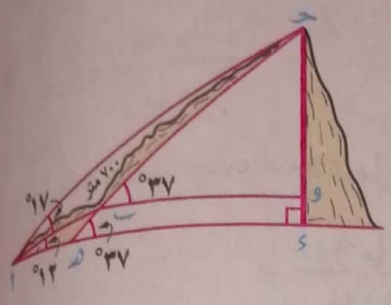
∴ ارتفاع الصخرة ≈ ٢١,٩ متر.

Scanned by CamScanner

مثال ٨

من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدة تل ، رصد رجل زاوية ارتفاع قمة التل فوجد أن قياسها ٢٩° ولما صعد نحو التل مسافة ٧٠٠ متر على طريق يميل على الأفقى بزاوية قياسها ١٢° ، وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٣٧° أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.

الحـــل



فى Δ أ ب حـ :

ق (∠ب أ حـ) = ٢٩° − ١٢° = ١٧°

، ∵ ∠ حـ هـ ء خارجة عن Δ حـ هـ أ

∴ ق (∠هـ حـ أ) = ٣٧° − ٢٩° = ٨°

∴ فى Δ أ ب حـ : ق (∠أ ب حـ) = ١٨٠° − (٨° + ١٧°) = ١٥٥°

∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{جا ١٥٥°}} = \frac{٧٠٠}{\text{جا ٨°}}$ ∴ أ حـ = $\frac{٧٠٠ \times \text{جا ١٥٥°}}{\text{جا ٨°}}$

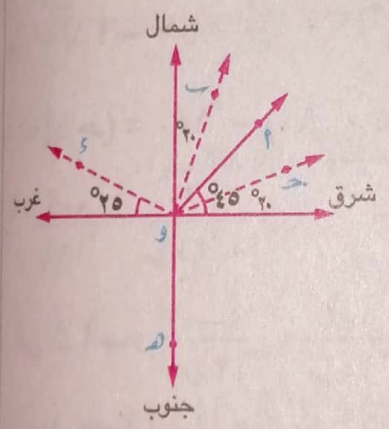
فى Δ أ حـ ء : حـ ء = أ حـ جا ٢٩° = $\frac{٧٠٠ \times \text{جا ١٥٥°}}{\text{جا ٨°}}$ × جا ٢٩° ≈ ١٠٣١ مترًا.

∴ ارتفاع التل ≈ ١٠٣١ مترًا.

ملاحظة

لتحديد موضع جسم مرصود بالنسبة لنقطة رصد معلومة مستخدمين الاتجاهات الأصلية نرسم نقطة الأصل لمحاور الاتجاهات الأصلية عند نقطة الرصد ثم نرسم من نقطة الرصد شعاعًا حسب المعطى يحدد موضع الجسم بالنسبة لنقطة الرصد.

فهو مثلاً فى الشكل المقابل :



$\overleftarrow{\text{و أ}}$ يحدد موضع الجسم أ إذا كان فى اتجاه الشمال الشرقى من نقطة الرصد.

، $\overleftarrow{\text{و ب}}$ يحدد موضع الجسم ب إذا كان فى اتجاه ٢٠° شرق الشمال من نقطة الرصد.

، $\overleftarrow{\text{و حـ}}$ يحدد موضع الجسم حـ إذا كان فى اتجاه ٢٠° شمال الشرق من نقطة الرصد.

، $\overleftarrow{\text{و ء}}$ يحدد موضع الجسم ء إذا كان فى اتجاه ٢٥° شمال الغرب من نقطة الرصد.

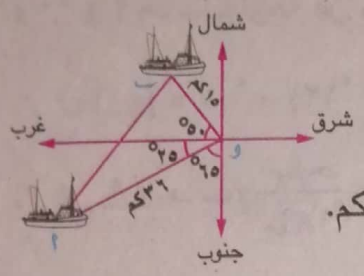
، $\overleftarrow{\text{و هـ}}$ يحدد موضع الجسم هـ إذا كان فى اتجاه الجنوب من نقطة الرصد.

Scanned by CamScanner

مثال ٩

تحركت سفينة من نقطة معينة فى اتجاه ٦٥° غرب الجنوب بسرعة ١٢ كم / ساعة ، وفى نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس المكان فى اتجاه ٥٠° شمال الغرب بسرعة ٥ كم / ساعة أوجد البعد بين السفينتين بعد ٣ ساعات.

الحل



المسافة التى قطعتها السفينة الأولى

فى ٣ ساعات = ٣ × ١٢ = ٣٦ كم.

، المسافة التى قطعتها السفينة الثانية فى ٣ ساعات = ٣ × ٥ = ١٥ كم.

، ق(∠ أ و ب) = ٧٥°

∴ (أ ب)^{٢} = (أ و)^{٢} + (و ب)^{٢} − ٢ أ و × و ب جتا ٧٥°

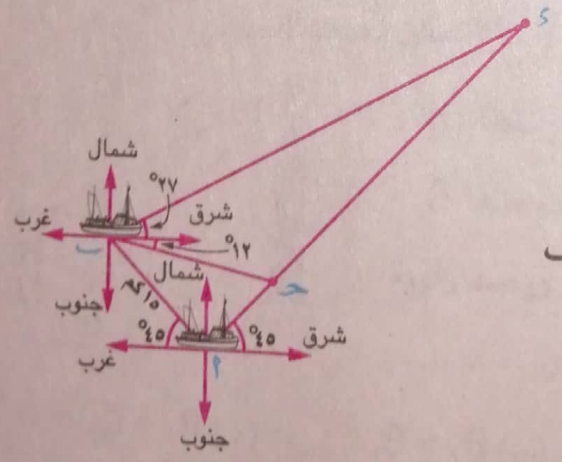
= (٣٦)^{٢} + (١٥)^{٢} − ٢ × ٣٦ × ١٥ جتا ٧٥°

∴ أ ب ≈ ٣٥,٢٣ كم. ∴ البعد بين السفينتين ≈ ٣٥,٢٣ كم.

مثال ١٠

سفينة تسير نحو الشمال الغربى بسرعة ٥ كم / ساعة شاهد راكب فيها مكانين ثابتين فى اتجاه الشمال الشرقى وبعد ٣ ساعات وجد الراكب أن أحد المكانين يقع فى اتجاه ١٢° جنوب الشرق ، وأن المكان الآخر يقع فى اتجاه ٢٧° شمال الشرق. أوجد البعد بين المكانين لأقرب كيلو متر مع العلم بأن المكانين والرجل فى مستوى أفقى واحد.

الحل



نفرض أن المكانين الثابتين هما حـ ، ء

وأن الموضع الأول للسفينة أ والموضع الثانى لها ب

∴ المسافة التى قطعتها السفينة فى ٣ ساعات

هى أ ب = ٣ × ٥ = ١٥ كم.

Scanned by CamScanner

فى Δ أ ب حـ :

ق (∠ب أ حـ) = ٩٠° ، ق (∠حـ ب أ) = ٤٥° − ١٢° = ٣٣°

∴ ق (∠أ حـ ب) = ٥٧° ∴ $\frac{١٥}{\text{جا } ٥٧°} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{جا } ٩٠°}$

∴ ب حـ = $\frac{١٥}{\text{جا } ٥٧°}$ (١)

، ∵ ∠أ حـ ب خارجة عن Δ ء حـ ب

∴ ق (∠ء) = ٥٧° − (١٢° + ٢٧°) = ١٨°

∴ فى Δ ء حـ ب : $\frac{\text{ب حـ}}{\text{جا } ١٨°} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{جا } ٣٩°}$

∴ حـ ء = $\frac{\text{ب حـ جا } ٣٩°}{\text{جا } ١٨°}$

ومن (١) : ∴ حـ ء = $\frac{١٥ \text{ جا } ٣٩°}{\text{جا } ٥٧° \times \text{جا } ١٨°}$ ≈ ٣٦ كم.

∴ البعد بين المكانين ≈ ٣٦ كم.

Scanned by CamScanner

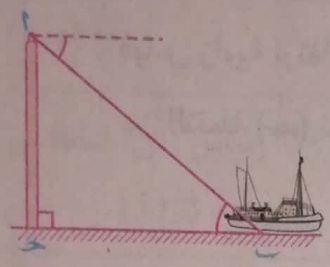
اختبر نفسك

تمارين 16

على زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلث)

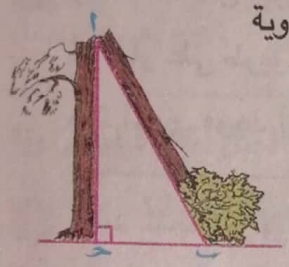
من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



(١) من قمة منارة قيست زاوية انخفاض سفينة فوجد قياسها ٣٨° فإذا كان بعد السفينة عن قاعدة المنارة ٢٢٠ مترًا فإن ارتفاع المنارة عن سطح البحر ≃ ..... مترًا.

(أ) ١٦٤ (ب) ١٧٢ (جـ) ١٨٦ (د) ١٩٦



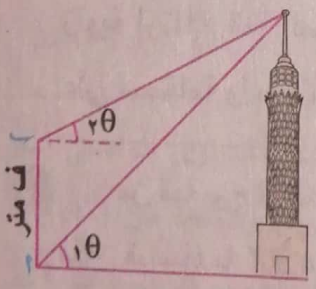
(٢) بسبب الرياح كسر الجزء العلوى لشجرة فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٦٠° فإذا كانت نقطة تلاقى قمة الشجرة بالأرض تبعد عن قاعدة الشجرة ١٠ أمتار فإن طول الشجرة ≃ ..... مترًا.

(أ) ٣٢ (ب) ٣٥ (جـ) ٣٧ (د) ٤٢

(٣) كلما أقترب رجل من قاعدة برج فإن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج .....

(أ) تتزايد. (ب) تتناقص.

(جـ) ثابت. (د) لا يمكن تحديد التغير.

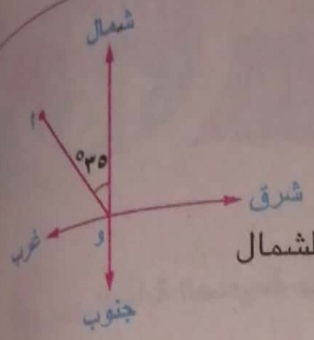


(٤) إذا رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة (أ) على المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج فوجدها θ_1 ثم صعد رأسيًا أعلى (أ) مسافة ف متر ورصد زاوية ارتفاع البرج مرة أخرى فوجدها θ_2 فإن : .....

(أ) $\theta_1 > \theta_2$ (ب) $\theta_1 < \theta_2$ (جـ) $\theta_1 = \theta_2$ (د) $\theta_1 + \theta_2 = ٩٠°$

Scanned by CamScanner

⑤ في الشكل المقابل :

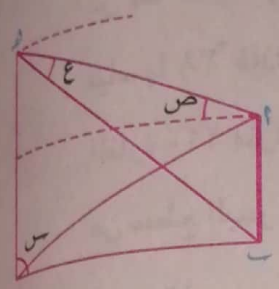


النقطة (أ) تقع ..... بالنسبة للنقطة (و).

(أ) شمال (ب) غرب

(جـ) ٣٥° شمال الغرب (د) ٣٥° غرب الشمال

⑥ في الشكل المقابل :



قياس زاوية ارتفاع النقطة (د) عندما يتم رصدها من النقطة (ب) تساوى .....

(أ) ع (ب) ص

(جـ) س (د) ص + ع

---

٢ رصد شخص زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد أن قياسها ٢٥° ثم سار على طريق أفقى نحو قاعدة البرج مسافة ٤٠ مترًا ورصد زاوية ارتفاع قمة البرج مرة أخرى فوجد أن قياسها ٤٢° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

«٣٩ مترًا»

---

٣ رصد شخص زاوية ارتفاع قمة برج من نقطة على سطح الأرض فوجد قياسها ٢٥° ثم سار فى طريق أفقى مار بقاعدة البرج نحو قاعدة البرج مسافة س متر فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٥٥° فإذا كان ارتفاع البرج ٨٥ مترًا أوجد قيمة س لأقرب متر.

«١٢٣ مترًا»

---

٤ وقف رجل عند نقطة على سطح الأرض ورصد منها زاوية ارتفاع قمة صخرة فوجد قياسها ٧٥° ثم سار على طريق أفقى مبتعدًا عن قاعدة الصخرة مسافة ٨٠ مترًا ثم رصد مرة ثانية زاوية ارتفاع قمة الصخرة فوجد قياسها ٥٢° فإذا كانت نقطتا الرصد وقاعدة الصخرة على استقامة واحدة أوجد ارتفاع الصخرة لأقرب متر.

«١٥٦ مترًا»

---

٥ من قمة برج ارتفاعه ٦٥ مترًا قيست زاويتا انخفاض النقطتين أ ، ب على المستوى الأفقى فكان قياساهما ٣٢° ، ١٣َ ٢١° على الترتيب فإذا كانت ء تمثل قاعدة البرج ، أ ∈ $\overline{\text{ب ء}}$ فاحسب طول $\overline{\text{أ ب}}$ لأقرب متر.

«٦٣ مترًا»

Scanned by CamScanner

٦ من قمة صخرة ارتفاعها ٨٠ مترًا قيست زاويتا انخفاض قمة وقاعدة برج فوجد قياساهما ٢٤° ، ٣٥° على الترتيب. أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر علمًا بأن قاعدتى الصخرة والبرج فى مستوى أفقى واحد. «٢٩ مترًا»

---

٧ من قمة برج قيست زاويتا انخفاض قمة مئذنة وقاعدتها فكان قياساهما ٢٣° ، ٤٧° على الترتيب فإذا كان ارتفاع المئذنة ٤٨ مترًا فأوجد المسافة بين قاعدتى البرج والمئذنة لأقرب متر علمًا بأن القاعدتين فى مستوى أفقى واحد. «٧٤ مترًا»

---

٨ من شرفة مبنى ترتفع ٦ أمتار كان قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة ١٥° وقياس زاوية انخفاض قاعدة الشجرة ٣٠° أوجد ارتفاع الشجرة وبعدها عن المبنى. «٨,٨ متر ، ١٠,٤ متر»

---

٩ وجد رجل فى قارب يتحرك فى الماء مبتعدًا عن صخرة ارتفاعها ٥٠٠ متر أن قياس زاوية ارتفاع قمة الصخرة فى لحظة معينة ٦٠° ثم أصبح بعد دقيقتين ٤٥° احسب السرعة المتوسطة للقارب. «١٠٥,٧ متر/دقيقة»

---

١٠ من قمة جبل رصدت سيارة متحركة بسرعة منتظمة فى اتجاه قاعدة الجبل فكان قياس زاوية انخفاضها ٤٠° وبعد دقيقتين قيست زاوية انخفاض السيارة مرة ثانية فوجد قياسها ٦٧° احسب ارتفاع الجبل بالمتر علمًا بأن سرعة السيارة ٦٠ كم/س «٢٦٠,٧ أمتار»

---

١١ من قمة فنار ارتفاعه ٨٠ مترًا عن سطح البحر رصد شخص زاويتى انخفاض قاربين فى مستوى أفقى مار بقاعدة الفنار فوجد أن قياسيهما ١٥َ ٥٠° ، ٤٠َ ٣٨°

أوجد البعد بين القاربين إذا كان :

(١) القاربان فى جهتين مختلفتين من الفنار. «١٦٧ مترًا ، ٣٣ مترًا»

(٢) القاربان فى جهة واحدة من الفنار.

---

١٢ رُصدت طائرة حـ من المحطتين أ ، ب عند لحظة مرورها بالمستوى الرأسى المار بالمستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ ، حيث أب = ٣٠٠٠ متر. فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها من أ هو ٢١َ ٥٣° ، وقياس زاوية ارتفاعها من ب هو ٢٦َ ٣٤° ، والمسقط الرأسى للطائرة ∈ $\overline{أب}$ أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر. «١٣٦٢ مترًا»

Scanned by CamScanner

١٣ منارة ارتفاعها ٦٠ مترًا مقامة على تل بالقرب من شاطئ بحر ، قيست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة المنارة من قارب فوق سطح البحر فوجد قياساهما ٧٠° ، ٤٥° على الترتيب. أوجد ارتفاع التل عن سطح البحر لأقرب متر. «٣٤ مترًا»

١٤ قيست زاوية ارتفاع قمة برج لم يكتمل بناؤه من نقطة على بعد ١٣٠ مترًا من قاعدته فوجد قياسها ٣٥° فكم مترًا يجب أن ترتفعها قمة البرج ليصبح قياس زاوية ارتفاعها من نفس النقطة ٥٥° ؟ «٩٥ مترًا»

١٥ رصد قائد طائرة هدفًا على الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاضه ٦٠° ولما هبط رأسيًا مسافة ٢٠٠ متر وجد أن قياس زاوية انخفاض الهدف أصبح ٤٥° أوجد ارتفاع الطائرة عن الأرض لحظة الرصد الأولى للهدف. «٤٧٣ مترًا»

١٦ من نقطة على سطح أرض أفقية رصد رجل زاوية ارتفاع منطاد يتحرك رأسيًا بسرعة ثابتة مقدارها ٢٠ مترًا/دقيقة فوجد أن قياسها يساوى ٣٥° وبعد ثلاث دقائق أعيد الرصد من نفس النقطة فوجد أن قياس زاوية ارتفاع المنطاد أصبح ١٥° أوجد بُعد الرجل عن مسقط المنطاد على الأرض لأقرب متر. «١٣٩ مترًا»

١٧ من قاعدة منزل ارتفاعه ٢٠ مترًا رصدت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٢٥° ثم رصدت قمة البرج مرة ثانية من قمة المنزل فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٨° أوجد ارتفاع البرج. «٦٦ مترًا»

١٨ من قمة جبل ارتفاعه ١٠٠ متر فوق سطح البحر ، رصد شخص زاوية انخفاض قمة صخرة ، فوجد أن قياسها ٣٧َ ٤٢° ، أوجد ارتفاع الصخرة عن سطح البحر إذا كانت تبعد عن الجبل مسافة ٢٢ مترًا ، علمًا بأنهما مُقامان على أرض أفقية واحدة. «٧٩,٨ مترا»

١٩ برجان البعد الأفقى بينهما ٦٠ مترًا وقياس زاوية انخفاض قمة الأول عندما ترصد من قمة الثانى يساوى ٣٠° أوجد ارتفاع البرج الأول إذا علم أن ارتفاع البرج الثانى ١٥٠ مترًا. «١١٥ مترًا»

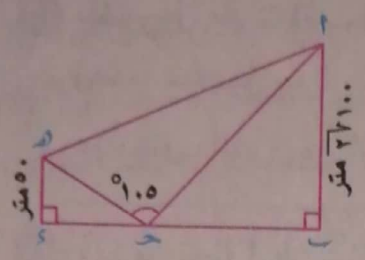
Scanned by CamScanner

٢٠ في الشكل المقابل :

بالونان أ ، هـ ارتفاعهما ١٠٠ $\sqrt{٢}$ ، ٥٠ مترًا.

رصدا جسمًا على الأرض (حـ) يقع في المستوى الرأسي المار بالبالونين فإذا كان قياسا زاويتي انخفاض الجسم ٤٥° ، ٣٠° على الترتيب

أوجد البعد بين البالونين مقربًا لأقرب متر. «٢٤٦ مترًا»



---

٢١ بالونان ارتفاعهما ٢٠٠ متر شاهدا جسمًا على الأرض يقع في المستوى الرأسي المار بالبالونين فإذا كان قياسا زاويتي انخفاض الجسم ٣٦° ، ٥٤° أوجد المسافة بين البالونين إذا علم أن البالونين يرصدان الجسم من اتجاهين متضادين. «٤٢٠,٦ متر»

---

٢٢ من نقطة تقع بين قاعدتي برج ارتفاعه ٧٥ مترًا وصخرة ارتفاعها ٣٥ مترًا ، قاس شخص زاويتي ارتفاع قمة البرج وقمة الصخرة فوجد قياسيهما ٦٣° ، ٤٨° على الترتيب.

أوجد : (١) البعد بين القاعدتين. (٢) البعد بين القمتين. «٧٠ مترًا ، ٨٠ مترًا»

---

٢٣ منزل قائم فوق تل منتظم الميل ، ومن نقطة تقع على خط أكبر ميل للتل وتبعد ٧ أمتار عن قاعدة المنزل وجد رجل أن المنزل يقابل زاوية قياسها ١٢َ ٤٠° ولما تراجع الرجل ٥ أمتار إلى أسفل التل وفي اتجاه خط أكبر ميل له وجد أن المنزل يقابل زاوية قياسها ٢٦° أوجد ارتفاع المنزل فوق سطح التل لرقم عشري واحد من المتر. «٥,٧ متر»

---

٢٤ تحركت سفينة بسرعة ١٢ كم/ ساعة في اتجاه ٤٠° جنوب الغرب ، وفي نفس اللحظة ومن نفس المكان تحركت سفينة أخرى بسرعة ٢٠ كم/ ساعة في اتجاه الشمال الغربي.

أوجد البعد بين السفينتين بعد ثلاث ساعات من بدء حركتهما. «٦٧ كم»

---

٢٥ تحركت سفينة من نقطة معينة في اتجاه ١٢° جنوب الشرق بسرعة ١١ كيلومتر/ساعة ، وفي نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة في اتجاه ٦٨° شمال الشرق بسرعة ٦,٥ كيلومتر/ساعة. أوجد المسافة بين السفينتين بعد ساعتين من لحظة تحركهما معًا. «٢٤ كم»

Scanned by CamScanner

٢٦ يقف رجل عند نقطة ب فشاهد جسمًا عند نقطة حـ التى تبعد ٦٠ مترًا شرق ب وعندما سار من ب إلى أ فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق وجد أن النقطة حـ فى اتجاه ١٥° جنوب الشرق من أ ، أوجد بعد حـ عن أ «٥٣,٧٩ متر»

٢٧ من نقطة أ على شاطئ نهر رصد رجل موقع منزل عند نقطة ب على الضفة الأخرى للنهر فوجدها فى اتجاه ٢٠° شمال الشرق ، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ فى اتجاه الشرق مسافة ٣٠٠ متر حتى وصل إلى نقطة حـ وجد أن نقطة ب فى اتجاه ٤٦° شمال الشرق. أوجد عرض النهر لأقرب متر علمًا بأن ضفتى النهر متوازيتان وأن النقط أ ، ب ، حـ فى مستوى أفقى واحد. «١٦٨ مترًا»

٢٨ إذا كان الميناء (أ) يقع شمال الميناء (ب) حيث أ ب = ١٠٠٠ متر ، (حـ) سفينة تقع فى اتجاه ٥٣° ٤٣َ جنوب شرق الميناء (أ) ، تقع فى اتجاه ٤٢° ٤٤َ شمال شرق الميناء (ب) أوجد بُعد السفينة عن الميناء (ب) لأقرب متر. «٥٩٦ مترًا»

٢٩ تسير سفينة بسرعة ٢٤ كم/ ساعة فى اتجاه الجنوب ، رصد راكب هدفًا ثابتًا فى اتجاه ٦٥° شمال الشرق وبعد ساعة وجد الراكب أن السفينة فى اتجاه ٧٩° جنوب غرب نفس الهدف. أوجد بعد الهدف عن السفينة عندئذ. «٤٢ كم»

٣٠ ثلاث قرى أ ، ب ، حـ تقع القرية أ غرب القرية ب حيث أ ب = ٢٠ كم وتقع القرية حـ فى اتجاه ٤٨° شرق الشمال من القرية أ ، ٦٠° شمال الغرب من القرية ب أوجد المسافة بين القريتين ب ، حـ لأقرب كيلومتر. «١٤ كم»

٣١ أ ، ب ، حـ ثلاث مدن فى مستوى أفقى واحد ، ب تقع فى اتجاه الجنوب الغربى من أ وعلى بعد ٤٠ كم منها فإذا علم أن أ تقع شمال شرق حـ بزاوية قياسها ٣٥° ، ب تقع شمال شرق حـ بزاوية قياسها ٥° أوجد طول $\overline{\text{أحـ}}$ «٥١ كم»

٣٢ رصد رجل من نقطة فى المستوى الأفقى المار بقاعدة تل زاوية ارتفاع قمة التل فوجد أن قياسها ٢٧° ١٢َ ولما صعد نحو التل مسافة ٢٠٠٠ متر على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ١٧° وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل ٣٦° ١٥َ أوجد ارتفاع التل لأقرب متر. «١٩١٦ مترًا»

Scanned by CamScanner

٣٣ سفينة تسير نحو الشمال الشرقى بسرعة ٢٤ كم/س شاهد راكب فيها نقطتين ثابتتين فى اتجاه ٢٥° غرب الشمال وبعد ٤ ساعات وجد هذا الراكب أن إحدى هاتين النقطتين أصبحت فى اتجاه ٢٣° جنوب الغرب بينما أصبحت النقطة الأخرى فى اتجاه ١٧° شمال الغرب. أوجد البعد بين النقطتين لأقرب كيلو متر علمًا بأن النقطتين والراكب فى مستوى أفقى واحد. «٧٨ كم»

---

٣٤ (البرهنة النظرية) : رصد طيار محطتين أ ، ب للرصد على أرض أفقية حيث أب = ف مترًا فوجد أن قياسى زاويتى انخفاضيهما هـ ، ى على الترتيب. إذا كانت الطائرة والمحطتان فى مستوى رأسى واحد وارتفاع الطائرة عندئذ عن الأرض يساوى ع مترًا والمسقط الرأسى للطائرة ∈ $\overline{\text{أب}}$

فأثبت أن : ع = $\frac{\text{ف}}{\text{ظا هـ} + \text{ظا ى}}$ ، وإذا كان : هـ = ٣١َ ٤٨°، ى = ١٥َ ٧٥°،

ف = ١٢٩٠ مترًا. احسب ع «١١٢٤ مترًا»

---

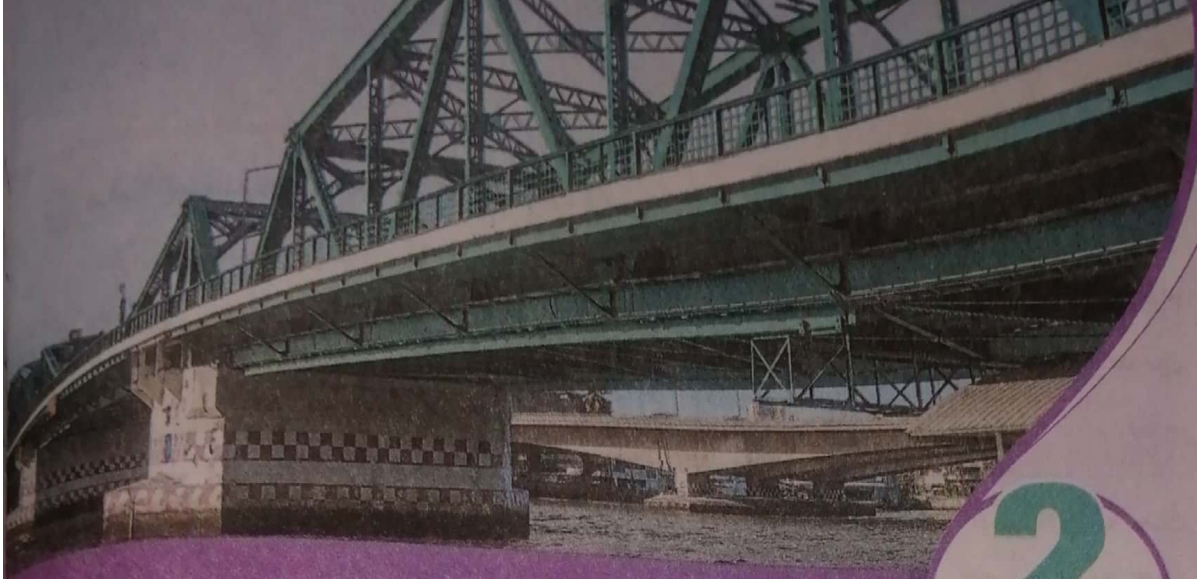
٣٥ (البرهنة النظرية) : يرتكز سلم طوله ل متر بأحد طرفيه على حائط رأسى وبطرفه الآخر على أرض أفقية ويميل السلم على الأفقى بزاوية قياسها ى ، تحرك الطرف الأسفل للسلم مسافة ف متر بعيدًا عن الحائط وأصبح السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ

أثبت أن : ل = $\frac{\text{ف}}{\text{جتا هـ} - \text{جتا ى}}$ وإذا كانت :

ف = ٤٠ سم ، هـ = ٣٠° ، ى = ٤٠°

فاحسب طول السلم لأقرب متر. «٤ أمتار»

Scanned by CamScanner



الدرس 2

الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

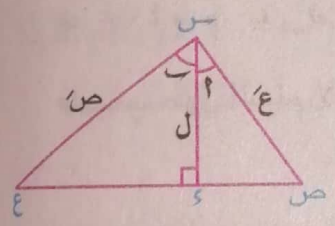
١ إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين فإن :

حا (أ + ب) = حا أ حتا ب + حتا أ حا ب

، حا (أ − ب) = حا أ حتا ب − حتا أ حا ب

البرهـان (لا يمتحن فيه الطالب)

من هندسة الشكل المقابل :



مساحة (Δ س ص ع) = مساحة (Δ س ص ء) + مساحة (Δ س ع ء)

∴ $\frac{١}{٢}$ ص َ ع َ حا (أ + ب) = $\frac{١}{٢}$ ع َ ل حا أ + $\frac{١}{٢}$ ص َ ل حا ب

(بالقسمة على $\frac{١}{٢}$ ص َ ع َ)

∴ حا (أ + ب) = $\frac{ل}{ص َ}$ حا أ + $\frac{ل}{ع َ}$ حا ب

، ∵ حتا ب = $\frac{ل}{ص َ}$ ، حتا أ = $\frac{ل}{ع َ}$

∴ حا (أ + ب) = حا أ حتا ب + حتا أ حا ب (المطلوب أولاً)

Scanned by CamScanner

، بوضع (−ب) بدلاً من ب

∴ جا (أ + (−ب)) = جا أ جتا (−ب) + جتا أ جا (−ب)

∴ جا (أ − ب) = جا أ جتا ب − جتا أ جا ب

[لأن جتا (−ب) = جتا ب ، جا (−ب) = − جا ب] (المطلوب ثانيًا)

٢ إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين فإن :

جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

، جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

البرهان

نعلم أن : جتا (أ + ب) = جا ($\frac{\pi}{٢}$ − (أ + ب))

∴ جتا (أ + ب) = جا (($\frac{\pi}{٢}$ − أ) − ب) = جا ($\frac{\pi}{٢}$ − أ) جتا ب − جتا ($\frac{\pi}{٢}$ − أ) جا ب

∴ جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

[لأن جا ($\frac{\pi}{٢}$ − أ) = جتا أ ، جتا ($\frac{\pi}{٢}$ − أ) = جا أ] (المطلوب أولاً)

، بوضع (−ب) بدلاً من ب

∴ جتا (أ + (−ب)) = جتا أ جتا (−ب) − جا أ جا (−ب)

∴ جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب (المطلوب ثانيًا)

٣ إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين فإن :

ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}}$ ، ظا (أ − ب) = $\frac{\text{ظا أ − ظا ب}}{\text{١ + ظا أ ظا ب}}$

حيث أ ≠ $\frac{\pi}{٢}$ (٢ ن + ١) ، ب ≠ $\frac{\pi}{٢}$ (٢ ن + ١)

، ظا أ ظا ب ≠ ± ١ على الترتيب ، ن ∈ ص

Scanned by CamScanner

البرهـان

$$\text{ظا}(\text{أ} \pm \text{ب}) = \frac{\text{جا}(\text{أ} \pm \text{ب})}{\text{جتا}(\text{أ} \pm \text{ب})} = \frac{\text{جا أ جتا ب} \pm \text{جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب} \mp \text{جا أ جا ب}}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على جتا أ جتا ب حيث جتا أ ≠ صفر ، جتا ب ≠ صفر

$$\therefore \text{ظا}(\text{أ} \pm \text{ب}) = \frac{\frac{\text{جا أ جتا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}} \pm \frac{\text{جتا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}}}{\frac{\text{جتا أ جتا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}} \mp \frac{\text{جا أ جا ب}}{\text{جتا أ جتا ب}}} = \frac{\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} \pm \frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}}{١ \mp \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} \times \frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}}} = \frac{\text{ظا أ} \pm \text{ظا ب}}{١ \mp \text{ظا أ ظا ب}}$$ (وهو المطلوب)

* ونلخص القوانين السابقة للدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين فيما يلى :

١ جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب

٢ جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

٣ ظا (أ ± ب) = $\frac{\text{ظا أ} \pm \text{ظا ب}}{١ \mp \text{ظا أ ظا ب}}$

مثال ١

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتى :

١ جا ١٠٥° ٢ جا ١٥° ٣ جتا ٧٥° ٤ جتا (−١٥°) ٥ ظا ١٠٥° ٦ ظا (−١٥°)

الحـل

١ جا ١٠٥° = جا (٦٠° + ٤٥°) = جا ٦٠° جتا ٤٥° + جتا ٦٠° جا ٤٥°

$$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$$

٢ جا ١٥° = جا (٦٠° − ٤٥°) = جا ٦٠° جتا ٤٥° − جتا ٦٠° جا ٤٥°

$$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$$

لاحظ أنه : يمكن اعتبار جا ١٥° = جا (٤٥° − ٣٠°) ويكمل الحل.

Scanned by CamScanner

٣ جتا ٧٥° = جتا (٤٥° + ٣٠°) = جتا ٤٥° جتا ٣٠° − جا ٤٥° جا ٣٠°

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣} - ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$$

لاحظ أن : جتا ٧٥° = جا ١٥°

٤ جتا (−١٥°) = جتا ١٥° = جتا (٤٥° − ٣٠°) = جتا ٤٥° جتا ٣٠° + جا ٤٥° جا ٣٠°

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$$

٥ ظا ١٠٥° = ظا (٦٠° + ٤٥°) = $\frac{\text{ظا ٦٠° + ظا ٤٥°}}{\text{١ − ظا ٦٠° ظا ٤٥°}}$ = $\frac{\sqrt{٣} + ١}{١ \times \sqrt{٣} - ١}$ = $\frac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} - ١} \times \frac{\sqrt{٣} + ١}{\sqrt{٣} + ١}$

$$= \frac{٣ + ٢\sqrt{٣} + ١}{١ - ٣} = \frac{٤ + ٢\sqrt{٣}}{-٢} = -٢ - \sqrt{٣}$$

٦ ظا (−١٥°) = − ظا ١٥° = − ظا (٦٠° − ٤٥°) = − $\left(\frac{\text{ظا ٦٠° − ظا ٤٥°}}{\text{١ + ظا ٦٠° ظا ٤٥°}}\right)$

$$= -\left(\frac{١ - \sqrt{٣}}{١ + \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣} - ١}{\sqrt{٣} - ١}\right) = -\left(\frac{-٤ + ٢\sqrt{٣}}{-٢}\right) = -٢ + \sqrt{٣}$$

مثال ٢

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتي :

١ جا ١٨° جتا ١٢° + جتا ١٨° جا ١٢°

٢ جا (٦٠° + س) جتا س − جتا (٦٠° + س) جا س

٣ جتا ٧٨° جتا ١٨° + جتا ١٢° جا ١٨°

٤ جتا $\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right)$ جتا س − جا $\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right)$ جا س

٥ $\frac{\text{ظا ٢٥° − ظا ١٧٥°}}{\text{١ + ظا ٢٥° ظا ١٧٥°}}$

٦ $\frac{\text{ظا } \frac{\pi}{١٢} + \text{ظا } \frac{\pi}{٦}}{١ - \text{ظا } \frac{\pi}{١٢} \text{ ظا } \frac{\pi}{٦}}$

الحل

١ جا ١٨° جتا ١٢° + جتا ١٨° جا ١٢° = جا (١٨° + ١٢°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

Scanned by CamScanner

٢ حا (٦٠° + س) حتا س − حتا (٦٠° + س) حا س = حا ((٦٠° + س) − س)

= حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٣ ∵ حتا ١٢° = حا ٧٨°

∴ حتا ٧٨° حتا ١٨° + حتا ١٢° حا ١٨° = حتا ٧٨° حتا ١٨° + حا ٧٨° حا ١٨°

= حتا (٧٨° − ١٨°) = حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

٤ حتا ($\frac{\pi}{٤}$ − س) حتا س − حا ($\frac{\pi}{٤}$ − س) حا س = حتا [($\frac{\pi}{٤}$ − س) + س]

= حتا $\frac{\pi}{٤}$ = حتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

٥ $\frac{\text{ظا ٢٥° − ظا ١٧٥°}}{\text{١ + ظا ٢٥° ظا ١٧٥°}}$ = ظا (٢٥° − ١٧٥°) = ظا (−١٥٠°) = − ظا ١٥٠° = − ظا (١٨٠° − ٣٠°)

= − (− ظا ٣٠°) = ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

٦ $\frac{\text{ظا } \frac{\pi}{١٢} + \text{ظا } \frac{\pi}{٦}}{\text{١ − ظا } \frac{\pi}{١٢} \text{ ظا } \frac{\pi}{٦}}$ = ظا ($\frac{\pi}{١٢}$ + $\frac{\pi}{٦}$) = ظا $\frac{٣\pi}{١٢}$ = ظا $\frac{١}{٤}$ π = ظا ٤٥° = ١

مثال ٣

أثبت أن : ١ ظا ٥٠° = $\frac{\text{١ + ظا ٥°}}{\text{١ − ظا ٥°}}$ ٢ حا (٣٠° − أ) + حتا (أ − ٦٠°) = حا (٩٠° + أ)

٣ $\frac{\text{حا ٩ س حتا ٤ س − حتا ٩ س حا ٤ س}}{\text{حتا ٧ س حتا ٢ س + حا ٧ س حا ٢ س}}$ = ظا ٥ س

الحل

١ الطرف الأيمن = ظا ٥٠° = ظا (٤٥° + ٥°) = $\frac{\text{ظا ٤٥° + ظا ٥°}}{\text{١ − ظا ٤٥° ظا ٥°}}$ = $\frac{\text{١ + ظا ٥°}}{\text{١ − ظا ٥°}}$ = الطرف الأيسر.

٢ الطرف الأيمن = حا ٣٠° حتا أ − حتا ٣٠° حا أ + حتا أ حتا ٦٠° + حا أ حا ٦٠°

= $\frac{١}{٢}$ حتا أ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حا أ + $\frac{١}{٢}$ حتا أ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حا أ = حتا أ

، الطرف الأيسر = حا (٩٠° + أ) = حتا أ ∴ الطرفان متساويان.

٣ الطرف الأيمن = $\frac{\text{حا (٩ س − ٤ س)}}{\text{حتا (٧ س − ٢ س)}}$ = $\frac{\text{حا ٥ س}}{\text{حتا ٥ س}}$ = ظا ٥ س = الطرف الأيسر.

Scanned by CamScanner

مثال ٤

إذا كانت : جا أ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، أ ∈]$\frac{\pi}{٢}$ ، π[، جتا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، ٠ < ب < $\frac{\pi}{٢}$

فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

١ جا (أ + ب) ٢ جتا (أ − ب) ٣ ظا (أ + ب)

الحل

أ قياس زاوية فى الربع الثانى ، ب قياس زاوية فى الربع الأول

١ جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جتا أ جا ب = $\frac{١٢}{١٣} \times \frac{٤}{٥} + \frac{-٥}{١٣} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣٣}{٦٥}$

٢ جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب = $\frac{٤}{٥} \times \frac{-٥}{١٣} + \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٣}{٥} = \frac{١٦}{٦٥}$

٣ ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{١٢}{٥} - + \frac{٣}{٤}}{١ - \left(\frac{-١٢}{٥}\right)\left(\frac{٣}{٤}\right)} = \frac{-٣٣}{٥٦}$

مثال ٥

إذا كانت : ظا أ = $\frac{٢}{٣}$ ، ظا ب = $\frac{١}{٥}$

فأثبت أن : أ + ب = ٤٥° حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين.

الحل

ظا (أ + ب) = $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}} = \frac{\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٥}}{١ - \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٥}} = ١$

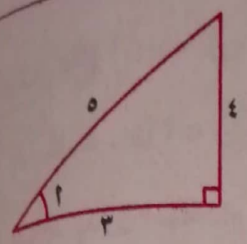
∴ أ + ب = ٤٥°

مثال ٦

أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، جتا ب = $\frac{\sqrt{٢}}{١٠}$

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد : جا حـ ثم استنتج ق (∠ حـ)

Scanned by CamScanner



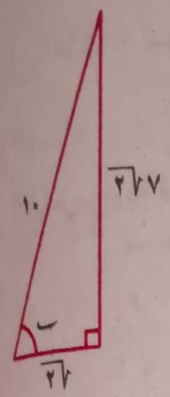
الحـــل

بفرض أن : أ ، ب ، حـ قياسات زوايا المثلث أ ب حـ

∴ أ + ب + حـ = ١٨٠° ∴ حـ = ١٨٠° − (أ + ب)

∴ جا حـ = جا [١٨٠° − (أ + ب)] = جا (أ + ب)

= جا أ جتا ب + جتا أ جا ب



= $\frac{٤}{٥} \times \frac{\sqrt{٢}}{١٠} + \frac{٣}{٥} \times \frac{٧\sqrt{٢}}{١٠} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∴ ق (∠ حـ) = ٤٥°

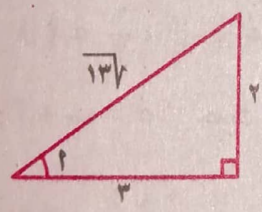
مثال ٧

أ ب حـ مثلث فيه : جتا أ = $\frac{٣}{\sqrt{١٣}}$ ، جتا ب = $\frac{٥}{\sqrt{٢٦}}$ **بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد : ق (∠ حـ)**

الحـــل

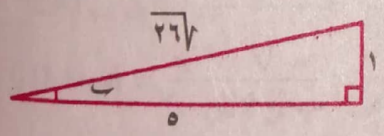
∵ جتا أ ، جتا ب موجبتان. ∴ ∠ أ ، ∠ ب حادتان.

∴ لإيجاد ق (∠ حـ) فإننا نقوم بذلك عن طريق إيجاد جتا حـ أ ، ظا حـ لأن أيًا منهما تمكننا من التفرقة بين الزاوية الحادة والمنفرجة فإذا كان الناتج موجبًا كانت ∠ حـ حادة، وإذا كان سالبًا كانت ∠ حـ منفرجة.



∵ أ + ب + حـ = ١٨٠° ∴ حـ = ١٨٠° − (أ + ب)

∴ ظا حـ = ظا [١٨٠° − (أ + ب)] = − ظا (أ + ب)



= − $\frac{\text{ظا أ + ظا ب}}{\text{١ − ظا أ ظا ب}}$ = − $\frac{\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٥}}{١ - \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٥}}$ = −١

∴ ق (∠ حـ) = ١٣٥°

مثال ٨

إذا كانت شدة التيار الكهربائى (ت) تعطى بالعلاقة : ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (١٠٥° ن) حيث ن الزمن بالثانية أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة شدة التيار الكهربائى بعد ثانية واحدة.

Scanned by CamScanner

الحل

∵ ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (١٠٥° ن) بوضع ن = ١ ∴ ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (١٠٥°)

∴ ت = $\frac{٥}{٢}$ جا (٦٠° + ٤٥°) = $\frac{٥}{٢}$ (جا ٦٠° جتا ٤٥° + جتا ٦٠° جا ٤٥°)

= $\frac{٥}{٢}$ [$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$] = $\frac{٥}{٢}$ × $\frac{\sqrt{٣}+١}{٢\sqrt{٢}}$ × $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{٥}{٨}$ ($\sqrt{٦}$ + $\sqrt{٢}$)

مثال ٩

أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين الآتيتين حيث : ٠° < س < ٣٦٠° :

١ جتا س جتا ٣٥° − جا س جا ٣٥° = $\frac{١}{٢}$

٢ ظا س + ظا ٤٢° + ظا س ظا ٤٢° = ١

الحل

١ ∵ جتا س جتا ٣٥° − جا س جا ٣٥° = $\frac{١}{٢}$

∴ جتا (س + ٣٥°) = $\frac{١}{٢}$ (موجبة)

∴ (س + ٣٥°) تقع فى الربع الأول أو الرابع

، ∵ الزاوية الحادة التى جيب تمامها يساوى $\frac{١}{٢}$ قياسها ٦٠°

∴ س + ٣٥° = ٦٠° ومنها س = ٢٥°

أ، س + ٣٥° = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠° ومنها س = ٢٦٥°

∴ مجموعة الحل = {٢٥° ، ٢٦٥°}

٢ ∵ ظا س + ظا ٤٢° + ظا س ظا ٤٢° = ١

∴ ظا س + ظا ٤٢° = ١ − ظا س ظا ٤٢°

∴ $\frac{\text{ظا س + ظا ٤٢°}}{\text{١ − ظا س ظا ٤٢°}}$ = ١

∴ ظا (س + ٤٢°) = ١ (موجبة)

∴ (س + ٤٢°) تقع فى الربع الأول أو الثالث

Scanned by CamScanner

، ∵ الزاوية الحادة التى ظلها يساوى ١ قياسها ٤٥°

∴ س + ٤٢° = ٤٥° ومنها س = ٣°

أ، س + ٤٢° = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥° ومنها س = ١٨٣°

∴ مجموعة الحل = {٣° ، ١٨٣°}

مثال ١٠

إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين حادتين حيث أ + ب = ١٢٠°

وكان ٢ جا أ = (√٣ + ١) جا ب **فأوجد : أ ، ب**

الحل

∵ أ + ب = ١٢٠° ∴ أ = ١٢٠° − ب

، ∵ ٢ جا أ = (√٣ + ١) جا ب ∴ ٢ جا (١٢٠° − ب) = (√٣ + ١) جا ب

∴ ٢ (جا ١٢٠° جتا ب − جتا ١٢٠° جا ب) = (√٣ + ١) جا ب

∴ ٢ (√٣/٢ جتا ب − ١/٢ جا ب) = (√٣ + ١) جا ب

∴ √٣ جتا ب + جا ب = √٣ جا ب + جا ب ∴ جتا ب = جا ب

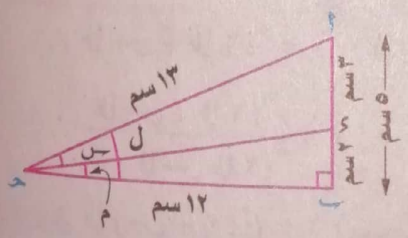
∴ جا ب / جتا ب = ١ ∴ ظا ب = ١ ∴ ب = ٤٥° ، أ = ٧٥°

مثال ١١

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٥ سم ، أ جـ = ١٣ سم أخذت نقطة ء ∈ $\overline{أب}$

بحيث أ ء = ٣ سم فإذا كان ق (∠ أ جـ ء) = س **فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة : ظا س**

الحل



ب جـ = √((١٣)² − (٥)²) = ١٢ سم

وبفرض ق (∠ أ جـ ب) = ل ، ق (∠ ء جـ ب) = م

∴ ظا س = ظا (ل − م) = (ظا ل − ظا م) / (١ + ظا ل ظا م) = (٥/١٢ − ٢/١٢) / (١ + ٥/١٢ × ٢/١٢) = ١٨/٧٧

Scanned by CamScanner

اختبر نفسك

تمارين 17

على الدوال المثلثية لمجموع وفرق قياسى زاويتين

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) حتا أ حتا ب + حا أ حا ب = ...

(أ) حا (أ + ب) (ب) حا (أ − ب) (جـ) حتا (أ + ب) (د) حتا (أ − ب)

(٢) حا أ حتا ب − حتا أ حا ب = ...

(أ) حا (أ + ب) (ب) حتا (أ + ب) (جـ) حا (أ − ب) (د) حتا (أ − ب)

(٣) حا $\frac{\pi}{٩}$ حتا $\frac{\pi}{١٨}$ + حتا $\frac{\pi}{٩}$ حا $\frac{\pi}{١٨}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤) إذا كان : $\frac{\text{طا س} - \text{طا ص}}{١ + \text{طا س طا ص}}$ = ٢ فإن : طا (س − ص) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ٢ (جـ) $\sqrt{٢}$ (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٥) $\frac{\text{طا } ٥٠^\circ + \text{طا } ١٠^\circ}{١ - \text{طا } ٥٠^\circ \text{ طا } ١٠^\circ}$ = ...

(أ) طا ٤٠° (ب) طا ٦٠°

(جـ) طا ٥٠° × طا ١٠° (د) ٢ طا ٥٠° طا ١٠°

(٦) حا $\left(\theta + \frac{\pi}{٦}\right)$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (حتا θ + $\sqrt{٣}$ حا θ) (ب) $\frac{١}{٢}$ (حتا θ + حا θ)

(جـ) $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ حتا θ + حا θ) (د) $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ حتا θ + $\sqrt{٢}$ حا θ)

(٧) حا ٥ س حا ٣ س + حتا ٥ س حتا ٣ س = ...

(أ) حتا ٢ س (ب) حتا ٨ س (جـ) حا ٨ س (د) حا ٢ س

(٨) إذا كان : طا أ = $\frac{١}{٢}$ ، طا ب = $\frac{١}{٣}$ فإن : طا (أ + ب) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{-٥}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٥}{٦}$

(٩) طتا $\left(٢\pi - \frac{٥\pi}{١٢}\right)$ = ...

(أ) ٢ + $\sqrt{٣}$ (ب) ٢ − $\sqrt{٣}$ (جـ) −٢ − $\sqrt{٣}$ (د) $\sqrt{٣}$ − ٢

Scanned by CamScanner

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) جتا ١٠٥° «$\frac{\sqrt{٢} - \sqrt{٦}}{٤}$»

(٢) جا ٧٥° «$\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$»

(٣) جتا ٣٤٥° «$\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$»

(٤) ظا (−٧٥°) «$-٢ - \sqrt{٣}$»

(٥) جا $\frac{١١\pi}{١٢}$ «$\frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٤}$»

(٦) ظا $\frac{٧\pi}{١٢}$ «$-٢ - \sqrt{٣}$»

٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى فى أبسط صورة :

(١) جتا ١٠٥° جتا ١٥° + جا ١٠٥° جا ١٥° «صفر»

(٢) جتا ٧٠° جتا ٢٠° − جا ٧٠° جا ٢٠° «صفر»

(٣) جا ٧٥° جتا ١٥° + جتا ٧٥° جا ١٥° «١»

(٤) جا ٨٧° جتا ٢٧° − جتا ٨٧° جا ٢٧° «$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$»

(٥) جا $\frac{٧\pi}{١٢}$ جتا $\frac{٥\pi}{١٢}$ − جتا $\frac{٧\pi}{١٢}$ جا $\frac{٥\pi}{١٢}$ «$\frac{١}{٢}$»

(٦) جتا $\frac{٥\pi}{١٢}$ جتا $\frac{\pi}{١٢}$ − جا $\frac{٥\pi}{١٢}$ جا $\frac{\pi}{١٢}$ «صفر»

(٧) جتا ٥٨َ ١٣° جتا ٢َ ٣١° − جا ٥٨َ ١٣° جا ٢َ ٣١° «$\frac{١}{\sqrt{٢}}$»

(٨) $\frac{\text{ظا } ٣٠° + \text{ظا } ١٥°}{١ - \text{ظا } ٣٠° \text{ ظا } ١٥°}$ «١»

(٩) $\frac{\text{ظا } \frac{٢\pi}{٣} + \text{ظا } \frac{\pi}{١٢}}{١ - \text{ظا } \frac{٢\pi}{٣} \text{ ظا } \frac{\pi}{١٢}}$ «−١»

(١٠) $\frac{\text{ظا } ١٥° - \text{ظا } ١٥٠°}{١ + \text{ظا } ١٥° \text{ ظا } ١٥٠°}$ «١»

(١١) جا ١١٠° جا ١٣٠° − جتا ١١٠° جتا ١٣٠° «$\frac{١}{٢}$»

(١٢) جا ٣٩° جتا ٩° − جا ٥١° جتا ٨١° «$\frac{١}{٢}$»

(١٣) $\frac{\text{جا } ٢٠° \text{ جتا } ٢٥° + \text{جتا } ٢٠° \text{ جا } ٢٥°}{\text{جتا } ١٠° \text{ جتا } ٣٥° - \text{جتا } ٨٠° \text{ جتا } ٥٥°}$ «١»

(١٤) $\frac{\text{ظا } ٢٨١° + \text{ظا } ٣٠٤°}{١ - \text{ظا } ٢٨١° \text{ ظا } ٣٠٤°}$ «١»

(١٥) $\frac{\text{ظا } ٢٥° + \text{ظتا } ٧٠°}{١ - \text{ظتا } ٦٥° \text{ ظا } ٢٠°}$ «١»

٤ اختصر كلاً مما يأتى :

(١) جتا ٣ س جتا ٢ س − جا ٣ س جا ٢ س «جتا ٥ س»

(٢) جا (س + ص) جتا ص − جتا (س + ص) جا ص «جا س»

Scanned by CamScanner

③ جتا (س + ص) جتا ص + جا (س + ص) جا ص «جتا س»

④ جا (٢٥° + س) جتا (٢٠° − س) + جتا (٢٥° + س) جا (٢٠° − س) «$\frac{١}{\sqrt{٢}}$»

⑤ جتا (أ − ب) − جتا (أ + ب) «٢ جا أ جا ب»

⑥ $\frac{\text{ظا (٤٠° − س) + ظا (٥° + س)}}{\text{١ − ظا (٤٠° − س) ظا (٥° + س)}}$ «١»

---

٥ إذ كانت : جتا أ = ٠,٦ ، جتا ب = ٠,٨ ، حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

① جا (أ + ب) ② جتا (أ − ب) ③ ظا (أ − ب) «١ ، $\frac{٢٤}{٢٥}$ ، $\frac{٧}{٢٤}$»

---

٦ إذا كان : أ ، ب زاويتين حادتين حيث : جتا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، ظا ب = $\frac{٨}{١٥}$

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

① جا (أ + ب) ② ظا (أ − ب) ③ قا (أ − ب) ④ ظتا (أ + ب)

«$\frac{٨٤}{٨٥}$ ، $\frac{٣٦}{٧٧}$ ، $\frac{٨٥}{٧٧}$ ، $\frac{١٣}{٨٤}$»

---

٧ إذا كان : ٥ جتا س + ٣ = صفر حيث س ∈]٠ ، π[، جتا ص = $\frac{١٢}{١٣}$

حيث ص ∈]π ، ٢π[**فأوجد قيمة :**

① جا (س − ص) ② جتا (س − ص) ③ ظا (س + ص) «$\frac{٣٣}{٦٥}$ ، $\frac{-٥٦}{٦٥}$ ، $\frac{-٦٣}{١٦}$»

---

٨ إذا كان : جا أ = $\frac{٣}{٥}$ حيث : ٠° < أ < ٩٠° ، ظا ب = − ٧ حيث ٩٠° < ب < ١٨٠°

أثبت أن : أ + ب = ١٣٥°

---

٩ في المثلث أ ب حـ ، جتا أ = $\frac{-٣}{٥}$ ، جا ب = $\frac{٥}{١٣}$

أوجد : جا حـ بدون استخدام الآلة الحاسبة. «$\frac{٣٣}{٦٥}$»

---

١٠ إذا علمت أن : جا أ = $\frac{-٨}{١٧}$ حيث ١٨٠° < أ < ٢٧٠° ، جتا ب = $\frac{-٥}{١٣}$

حيث ٩٠° < ب < ١٨٠° **أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :**

① جتا (أ − ب) ② جا (أ + ب) ③ ظا (أ − ب) «$\frac{-٢١}{٢٢١}$ ، $\frac{-١٤٠}{٢٢١}$ ، $\frac{-٢٢٠}{٢١}$»

Scanned by CamScanner

١١ إذا كان : جتا أ = $\frac{١٣}{٥}$ حيث ٠ < أ < $\frac{\pi}{٢}$ ، طا ب = $\frac{-٣}{٤}$ حيث ب ∈] $\frac{\pi}{٢}$ ، π [

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة :

(١) جا (أ − ب) (٢) جتا (أ + ب) (٣) ظتا (أ − ب)

« $\frac{-٦٣}{٦٥}$ ، $\frac{-٥٦}{٦٥}$ ، $\frac{-١٦}{٦٣}$ »

١٢ تفكير إبداعى : إذا كان : طا أ = $\frac{٢}{٣}$ حيث π < أ < $\frac{٣\pi}{٢}$ ، طا ب = $\frac{١}{٥}$

حيث ٠ < ب < $\frac{\pi}{٢}$ أوجد قيمة كل من : طا (أ + ب) ، جتا (أ + ب)

ومن ذلك أثبت أن : أ + ب = $\frac{٥\pi}{٤}$

« ١ ، $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$ »

١٣ أ ب حـ مثلث فيه : طا أ = $\frac{١}{٧}$ ، طا ب = $\frac{٣}{٤}$

أوجد بدون استخدام حاسبة الجيب : ق (∠ حـ)

« ١٣٥° »

١٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) طا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{\text{طا أ − طا ب}}{\text{١ + طا أ طا ب}}$ (ب) $\frac{\text{ظتا أ + ظتا ب}}{\text{١ − ظتا أ ظتا ب}}$ (جـ) $\frac{\text{ظتا ب + ظتا أ}}{\text{ظتا أ ظتا ب − ١}}$ (د) $\frac{\text{طا أ + طا ب}}{\text{١ − جا أ جتا ب}}$

(٢) إذا كان : جا أ = $\frac{٥}{٤}$ ، جتا ب = $\frac{١٣}{٥}$ حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين

فإن : جا (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{٥٦}{٦٥}$ (ب) $\frac{٦٣}{٦٥}$ (جـ) $\frac{-٣٣}{٦٥}$ (د) $\frac{٦٥}{٦٣}$

(٣) إذا كان : طا^{٢} أ = $\frac{٩}{١٦}$ حيث أ ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [، طا^{٢} ب = $\frac{١}{٩}$

حيث ب ∈ [$\frac{\pi}{٢}$ ، π [فإن : طا (أ + ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{٢}{٩}$

(٤) إذا كان : طا أ = س + ١ ، طا ب = س − ١ فإن : ظتا (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{٢}{س^{٢}}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} (جـ) س^{٢} (د) $\frac{١}{س^{٢}}$

(٥) إذا كان أ ، ب قياسى زاويتين حادتين وكان : جا أ جا ب = $\frac{١}{٢}$ ، جتا أ جتا ب = $\frac{١}{٣}$

فإن : جتا (أ − ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{-١}{٦}$

Scanned by CamScanner

⑥ إذا كان : طا (θ + ٤٥°) = $\frac{٣}{٢}$ فإن : طا θ = ...

(أ) $-\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

⑦ إذا كان : طا (حـ − ٣٠°) = $\frac{أ\ طا حـ - ١}{أ + طا حـ}$ فإن : أ = ...

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (جـ) $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ (د) $-\sqrt{٣}$

⑧ إذا كانت س ∈ [٠ ، ٢π [وكان : $\frac{طا س - طتا ٥٥°}{١ + طا س\ طتا ٥٥°}$ = ١

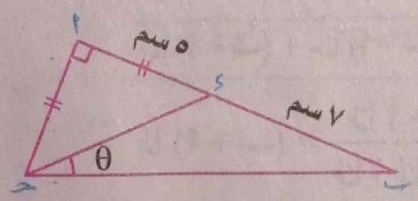
فإن : س = ...

(أ) $\frac{\pi}{٩}$ (ب) $\frac{٤\pi}{٩}$ (جـ) $\frac{٤\pi}{٩}$ أ، $\frac{١٣\pi}{٩}$ (د) $\frac{١٠\pi}{٩}$ أ، $\frac{١١\pi}{٩}$

⑨ إذا كانت : س + ص = ٢٢٥° فإن : (١ + طا س) (١ + طا ص) = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) $\frac{١}{٢}$

⑩ في الشكل المقابل :



إذا كان : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ

، ب ء = ٧ سم ، أ ء = أ حـ = ٥ سم

فإن : طا θ = ...

(أ) $\frac{٧}{١٧}$ (ب) $\frac{٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{٥}{١٢}$ (د) $\frac{١٢}{٣٥}$

---

١٥ إذا كان : س + ص + ع = $\frac{\pi}{٢}$

أثبت أن : طا س طا ص + طا ص طا ع + طا ع طا س = ١

---

١٦ إذا كان : طا (أ + ب) = ٣٣ ، طا أ = ٣ أثبت أن : طا ب = ٠,٣

---

١٧ إذا كانت : د أ ، د ب زاويتين حادتين ، طا أ = $\frac{٥}{٦}$ ، طا ب = $\frac{١}{١١}$

أثبت أن : أ + ب = ٤٥°

---

١٨ في Δ أ ب حـ إذا كان : طا أ = $\frac{ن}{ن + ١}$ ، طا ب = $\frac{١}{٢ن + ١}$ حيث ن ∈ ح+

أثبت أن : طا (أ + ب) = ١

Scanned by CamScanner

١٩ إذا علمت أن : $\frac{\text{جتا}(\text{أ} + \text{ب})}{\text{جتا}(\text{أ} - \text{ب})} = \frac{١}{٣}$ فأثبت أن : ٢ جا أ جا ب = جتا أ جتا ب

ثم أثبت أن : ٢ طا أ = طتا ب وإذا علمت أن : طا أ = $\frac{٢}{٥}$ فأوجد : طا ب

ومن ثم أوجد : طا (أ − ب) « $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{-١٧}{٣٠}$ »

٢٠ أثبت أن :

(١) طا ٧٥° = ١ + طا ٣٠° + طا ٣٠° طا ٧٥°

(٢) $\sqrt{٢}$ جتا $\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right)$ = جتا س + جا س

(٣) جا (٧٠° − س) جا (٥٠° + س) − جتا (٥٠° + س) جتا (٧٠° − س) = $\frac{١}{٢}$

(٤) جتا $\left(\text{س} - \frac{\pi}{٦}\right)$ جتا س + جتا $\left(\frac{٢\pi}{٣} - \text{س}\right)$ جتا $\left(\text{س} - \frac{\pi}{٢}\right)$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٥) جا (س − ٦٠°) + جتا (س − ٣٠°) = جا س

(٦) جتا (١٢٠° − أ) = $\frac{١}{٢}$ ($\sqrt{٣}$ جا أ − جتا أ)

(٧) طا (٤٥° − أ) = $\frac{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}{\text{جتا أ} + \text{جا أ}}$

(٨) $\frac{\text{جا}(\text{أ} + \text{ب}) + \text{جا}(\text{أ} - \text{ب})}{\text{جتا}(\text{أ} + \text{ب}) + \text{جتا}(\text{أ} - \text{ب})}$ = طا أ

(٩) $\frac{\text{طا أ} + \text{طا ب}}{\text{طا}(\text{أ} + \text{ب})} + \frac{\text{طا أ} - \text{طا ب}}{\text{طا}(\text{أ} - \text{ب})}$ = ٢

(١٠) طا (أ + ب) = $\frac{\text{طتا أ} + \text{طتا ب}}{\text{طتا أ طتا ب} - ١}$

(١١) $\frac{\text{جا}(\text{أ} - \text{ب})}{\text{جا أ جا ب}}$ = طتا ب − طتا أ

(١٢) $\frac{\text{جا}(\text{أ} + \text{ب})}{\text{جا}(\text{أ} - \text{ب})} = \frac{\text{طا أ} + \text{طا ب}}{\text{طا أ} - \text{طا ب}}$

(١٣) طا (أ + ب) طا (أ − ب) = $\frac{\text{طا}^٢\text{ أ} - \text{طا}^٢\text{ ب}}{١ - \text{طا}^٢\text{ أ طا}^٢\text{ ب}}$

(١٤) جا (أ + ب) جا (أ − ب) = جا^٢ أ − جا^٢ ب

٢١ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

(١) جا ٣٥° + جتا ٦٥° = جتا ٥°

(٢) جتا ٥٢° + جتا ٦٨° = جا ٨٢°

(٣) جا ٦٧° + جتا ٣٧° = $\sqrt{٣}$ جتا ٧°

(٤) طا ٤٠° = $\frac{١ - \text{طا ٥°}}{١ + \text{طا ٥°}}$

٢٢ إذا كانت س ∈ [٠ ، ٢π[فأوجد قيمة س فى كل مما يأتى :

(١) جا س جتا ١٥° + جتا س جا ١٥° = $\frac{١}{٢}$ « ١٥° أ، ١٣٥° »

(٢) جا س جتا ٢٠° − جتا س جا ٢٠° = $\frac{١}{٢}$ « ٥٠° أ، ١٧٠° »

Scanned by CamScanner

③ جتا ٢س جتا س + جا ٢س جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ «٣٠° أو ٣٣٠°»

④ $\frac{\text{ظا س} - \text{ظا ٢٥°}}{١ + \text{ظا س ظا ٢٥°}}$ = ١ «٧٠° أو ٢٥٠°»

⑤ ظا س + ظا ٢٠° + ظا س ظا ٢٠° = ١ «٢٥° أو ٢٠٥°»

⑥ جا (٦٠° + س) = ٢ جا س «٣٠° أو ٢١٠°»

⑦ جا (س + ٣٠°) = ٢ جتا س «٦٠° أو ٢٤٠°»

⑧ جا $\left(\text{س} + \frac{\pi}{٤}\right)$ + جا $\left(\text{س} - \frac{\pi}{٤}\right)$ = −١ «٢٢٥° أو ٣١٥°»

---

٢٣ إذا كانت : ٠ < هـ < $\frac{\pi}{٢}$ أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتى :

① جا ١٣٥° جتا هـ − جتا ١٣٥° جا هـ = ١ «{٤٥°}»

② $\frac{\text{ظا ٤هـ} - \text{ظا ٣هـ}}{١ + \text{ظا ٤هـ ظا ٣هـ}}$ = $\sqrt{٣}$ «{٦٠°}»

③ $\sqrt{٣}$ جتا هـ − جا هـ = ١ «{٣٠°}»

④ جا (٤٥° + ٢هـ) جا (٦٠° + هـ) + جا (٤٥° − ٢هـ) جا (٣٠° − هـ) = ١ «{١٥°}»

---

٢٤ إذا كان : أ ب جـ مثلثًا أثبت أن :

① جا $\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right)$ جتا $\frac{\text{جـ}}{٢}$ + جتا $\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right)$ جا $\frac{\text{جـ}}{٢}$ = ١

② جتا $\left(\frac{\text{أ} + \text{ب} - \text{جـ}}{٢}\right)$ جتا جـ + جا $\left(\frac{\text{جـ} - \text{أ} - \text{ب}}{٢}\right)$ جا جـ = ٠

③ ظا أ + ظا ب + ظا جـ = ظا أ ظا ب ظا جـ

④ ظا $\frac{٣\text{أ}}{٢}$ ظا $\frac{٣\text{ب}}{٢}$ + ظا $\frac{٣\text{ب}}{٢}$ ظا $\frac{٣\text{جـ}}{٢}$ + ظا $\frac{٣\text{جـ}}{٢}$ ظا $\frac{٣\text{أ}}{٢}$ = ١

---

٢٥ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب ، أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٣ سم ، $\overline{\text{جـ ء}}$ متوسط

أوجد : جتا (∠ أ جـ ء) «$\frac{١٧\sqrt{١٣}}{٦٥}$»

---

٢٦ إذا كانت شدة التيار الكهربائى ت تعطى بالعلاقة ت = $\frac{٣}{٢}$ جتا ٢٨٥° ن

① أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام فرق قياسى زاويتين.

② أوجد شدة التيار الكهربائى بعد ثانية واحدة (دون استخدام الحاسبة)

Scanned by CamScanner

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٢٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : جا (أ + ب) = س ، جا (أ − ب) = ص فإن : .....

(أ) جا أ = $\frac{س + ص}{٢}$ (ب) جا ب = $\frac{س - ص}{٢}$

(جـ) جا أ جتا ب = $\frac{س + ص}{٢}$ (د) جتا أ جا ب = $\frac{س ص}{٢}$

② إذا كان : د (س) = ظا س فإن : د $\left(س + \frac{\pi}{٤}\right)$ × د $\left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$ = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٢ ظا س (د) ظتا س

③ إذا كان أ ب جـ مثلث فيه : ظا أ = ٣ + س ، ظا ب = ٣ − س ، ظا جـ = ٢

فإن : س = ...

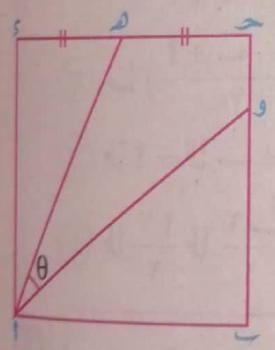
(أ) ± ١ (ب) ± $\sqrt{٦}$ (جـ) ± ٦ (د) ± $\sqrt{١٠}$

④ إذا كان : جا س − جتا ص = $\frac{١}{٦}$ ، جتا س + جا ص = $\frac{٥}{٦}$

فإن : جا (س − ص) = ...

(أ) $\frac{١٩}{٢٤}$ (ب) $\frac{١٧}{٢٣}$ (جـ) $\frac{٢٣}{٣٦}$ (د) $\frac{٢٥}{٤٨}$

⑤ في الشكل المقابل :



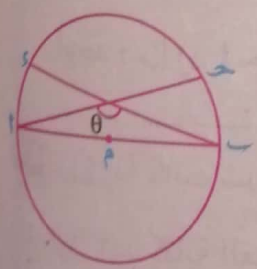
أ ب جـ ء مربع فيه هـ منتصف $\overline{جـ ء}$

، ب جـ = ٤ جـ و فإن : جتا θ = ...

(أ) $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(جـ) $\frac{٣}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{٤}{\sqrt{٥}}$

⑥ في الشكل المقابل :



$\overline{أ ب}$ قطر في دائرة م طوله ٢٥ سم ، $\overline{أ جـ}$ وتر طوله ٢٤ سم

، $\overline{ب ء}$ وتر طوله ٢٠ سم فإن : ظا θ = ...

(أ) $\frac{-٤}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٤}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

Scanned by CamScanner

٢٨ إذا كان : أ ، ب ، حـ هى قياسات ثلاث زوايا حادة ، جا أ = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ، جتا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا حـ = $\frac{١}{٢}$ أثبت أن : أ + ب + حـ = ٩٠° [بدون استخدام الحاسبة]

٢٩ إذا كان : ظا (أ + ب) = ٢ ، ظا (أ − ب) = $\frac{١}{٢}$ فبدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد : ق (∠ أ) ، ظا ب حيث أ ، ب زاويتان حادتان.

«٤٥° ، $\frac{١}{٣}$»

٣٠ إذا كان : ظا أ ، ظا ب هما جذرا المعادلة : ٢ س^{٢} + ٣ س − ١ = ٠

فبدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة : ظا (أ + ب) ومنها أوجد : أ + ب

«−١ ، ١٣٥° أ، ٣١٥°»

٣١ إذا كانت : س ∈ [٠ ، ٢ π[أوجد قيمة س التى تجعل قيمة المقدار :

جا س جتا ٥٥° + جتا س جا ٥٥°

(١) أكبر ما يمكن. (٢) أصغر ما يمكن.

«٣٥° ، ٢١٥°»

٣٢ فى المثلث أ ب حـ الحاد الزوايا إذا كان : ظا أ = ٠,٧٥ ، ظا ب = ٢,٤

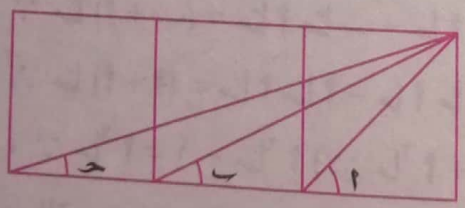
فأثبت أن : أَ : بَ : حَ = ١٣ : ٢٠ : ٢١

٣٣ إذا كان : أ قياس زاوية حادة وكان جا أ = $\frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}}$

فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة : ق (∠ أ)

«٧٥°»

٣٤ فى الشكل المقابل :



ثلاث مربعات أثبت أن :

ق (∠ أ) = ق (∠ ب) + ق (∠ حـ)

٣٥ إذا كان : جا (أ + ب) = $\frac{٣}{٥}$ ، جا (أ − ب) = $\frac{١}{١٠}$ فأثبت أن : ٥ ظا أ = ٧ ظا ب

٣٦ إذا كان : ٥ جتا (س + ص) = ٣ جتا (س − ص) أثبت أن : ظا س ظا ص = $\frac{١}{٤}$

Scanned by CamScanner

الدرس 3

الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

إذا كان أ هو قياس زاوية معلومة فإنه يمكن إيجاد كل من : حا ٢ أ ، حتا ٢ أ ، ظا ٢ أ كما يأتى :

أولاً : حا ٢ أ = ٢ حا أ حتا أ

البرهـان

∵ حا (أ + ب) = حا أ حتا ب + حتا أ حا ب وبوضع ب = أ

∴ حا (أ + أ) = حا أ حتا أ + حتا أ حا أ ∴ حا ٢ أ = ٢ حا أ حتا أ

ثانيًا : حتا ٢ أ = حتا^{٢} أ − حا^{٢} أ (١)

= ٢ حتا^{٢} أ − ١ (٢)

= ١ − ٢ حا^{٢} أ (٣)

البرهـان

∵ حتا (أ + ب) = حتا أ حتا ب − حا أ حا ب وبوضع ب = أ

∴ حتا (أ + أ) = حتا أ حتا أ − حا أ حا أ ∴ حتا ٢ أ = حتا^{٢} أ − حا^{٢} أ (١)

، ∵ حا^{٢} أ = ١ − حتا^{٢} أ (لأن حا^{٢} أ + حتا^{٢} أ = ١)

، بالتعويض فى (١) ينتج أن : حتا ٢ أ = حتا^{٢} أ − (١ − حتا^{٢} أ)

= حتا^{٢} أ − ١ + حتا^{٢} أ = ٢ حتا^{٢} أ − ١ (٢)

، ∵ حتا^{٢} أ = ١ − حا^{٢} أ وبالتعويض فى (١) :

∴ حتا ٢ أ = ١ − حا^{٢} أ − حا^{٢} أ = ١ − ٢ حا^{٢} أ (٣)

Scanned by CamScanner

ثالثًا : $\text{ظا } ٢\text{أ} = \frac{٢\text{ ظا أ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{ أ}}$ حيث ظا أ معرفة ، $\text{ظا}^{٢}\text{ أ} \neq ١$

البرهان

$\because \text{ظا}(\text{أ} + \text{ب}) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا أ ظا ب}}$ وبوضع ب = أ

$\therefore \text{ظا}(\text{أ} + \text{أ}) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا أ}}{١ - \text{ظا أ ظا أ}}$ $\therefore \text{ظا } ٢\text{أ} = \frac{٢\text{ ظا أ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{ أ}}$

ملاحظات

من القوانين السابقة يمكن استنتاج أن :

* $\text{جا أ} = ٢\text{ جا } \frac{\text{أ}}{٢}\text{ جتا } \frac{\text{أ}}{٢}$

* $\text{جتا أ} = \text{جتا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢} - \text{جا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢}$

$= ٢\text{ جتا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢} - ١$

$= ١ - ٢\text{ جا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢}$

* $\text{ظا أ} = \frac{٢\text{ ظا } \frac{\text{أ}}{٢}}{١ - \text{ظا}^{٢}\frac{\text{أ}}{٢}}$

* $\text{جا } ٤\text{أ} = ٢\text{ جا } ٢\text{أ جتا } ٢\text{أ}$

* $\text{جتا } ٤\text{أ} = \text{جتا}^{٢}\,٢\text{أ} - \text{جا}^{٢}\,٢\text{أ}$

$= ٢\text{ جتا}^{٢}\,٢\text{أ} - ١$

$= ١ - ٢\text{ جا}^{٢}\,٢\text{أ}$

* $\text{ظا } ٤\text{أ} = \frac{٢\text{ ظا } ٢\text{أ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\,٢\text{أ}}$

الدوال المثلثية لنصف قياس الزاوية

* إذا كان أ هو قياس زاوية معلومة فإنه يمكن إيجاد كل من $\text{جا } \frac{\text{أ}}{٢}$ ، $\text{جتا } \frac{\text{أ}}{٢}$ ، $\text{ظا } \frac{\text{أ}}{٢}$ بدلالة جتا أ كما يلى :

١ $\text{جا } \frac{\text{أ}}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - \text{جتا أ}}{٢}}$

٢ $\text{جتا } \frac{\text{أ}}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ + \text{جتا أ}}{٢}}$

٣ $\text{ظا } \frac{\text{أ}}{٢} = \pm\sqrt{\frac{١ - \text{جتا أ}}{١ + \text{جتا أ}}}$ حيث $\text{جتا أ} \neq -١$

ويتم تحديد الإشارة وفقًا للربع الذى تقع فيه الزاوية $\frac{\text{أ}}{٢}$

Scanned by CamScanner

البرهان

$\because$ جتا أ $= ١ - ٢$ جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ $\therefore$ ٢ جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ $= ١ -$ جتا أ

$\therefore$ جا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ $= \frac{١ -}{٢}$ جتا أ $\therefore$ جا $\frac{أ}{٢}$ $= \pm \sqrt{\frac{١ -}{٢}}$ جتا أ (١)

وبالمثل : $\because$ جتا أ $= ٢$ جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ $- ١$ $\therefore$ ٢ جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ $= ١ +$ جتا أ

$\therefore$ جتا^{٢} $\frac{أ}{٢}$ $= \frac{١ +}{٢}$ جتا أ $\therefore$ جتا $\frac{أ}{٢}$ $= \pm \sqrt{\frac{١ +}{٢}}$ جتا أ (٢)

وبقسمة (١) على (٢) : $\therefore$ ظا $\frac{أ}{٢}$ $= \pm \sqrt{\frac{١ -}{١ +}}$ جتا أ حيث جتا أ $\neq -١$

مثال ١

بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتي :

١ ٢ جا ١٥° جتا ١٥°

٢ جتا^{٢} ٢٢° ٣٠َ − جا^{٢} ٢٢° ٣٠َ

٣ ٢ جتا^{٢} ٧٥° − ١

٤ ١ − ٢ جا^{٢} ٧° ٣٠َ

٥ $\frac{٦ \text{ ظا } ١٥°}{١ - \text{ ظا}^{٢} ١٥°}$

الحل

١ ٢ جا ١٥° جتا ١٥° = جا (٢ × ١٥°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

٢ جتا^{٢} ٢٢° ٣٠َ − جا^{٢} ٢٢° ٣٠َ = جتا (٢ × ٢٢° ٣٠َ) = جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

٣ ٢ جتا^{٢} ٧٥° − ١ = جتا (٢ × ٧٥°) = جتا ١٥٠° = جتا (١٨٠° − ٣٠°) = − جتا ٣٠° = − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٤ ١ − ٢ جا^{٢} ٧° ٣٠َ = جتا (٢ × ٧° ٣٠َ) = جتا ١٥° = جتا (٤٥° − ٣٠°)

= جتا ٤٥° جتا ٣٠° + جا ٤٥° جا ٣٠°

= $\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٣} + ١}{٢\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$

٥ $\frac{٦ \text{ ظا } ١٥°}{١ - \text{ ظا}^{٢} ١٥°} = ٣ \times \frac{٢ \text{ ظا } ١٥°}{١ - \text{ ظا}^{٢} ١٥°} = ٣$ ظا (٢ × ١٥°) = ٣ ظا ٣٠° = ٣ × $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\sqrt{٣}$

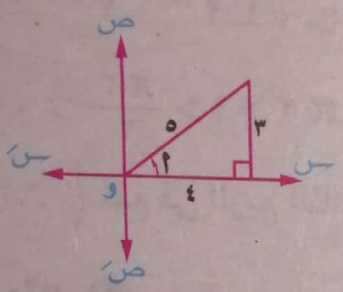
Scanned by CamScanner

مثال ٢

إذا كانت : جا أ = $\frac{٣}{٥}$ حيث أ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[فأوجد قيمة كل من :

١ جا ٢ أ ٢ جتا ٢ أ ٣ ظا ٢ أ

الحل



١ جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ × $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

٢ جتا ٢ أ = ١ − ٢ جا^{٢} أ = ١ − ٢ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$ = ١ − $\frac{١٨}{٢٥}$ = $\frac{٧}{٢٥}$

٣ ظا ٢ أ = $\frac{٢ \text{ ظا أ}}{١ - \text{ظا}^{٢} \text{ أ}}$ = $\frac{٢ \times \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{٩}{١٦}}$ = $\frac{٣}{٢}$ × $\frac{١٦}{٧}$ = $\frac{٢٤}{٧}$

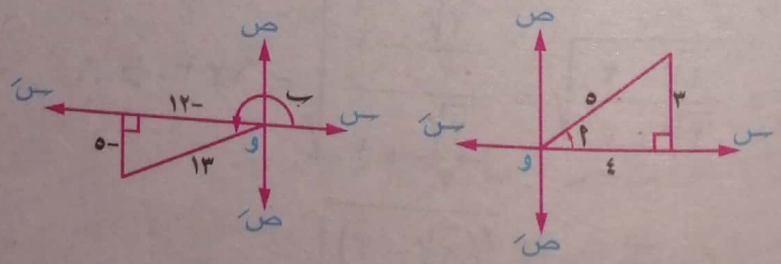
حل آخر لإيجاد ظا ٢ أ : ظا ٢ أ = $\frac{\text{جا ٢ أ}}{\text{جتا ٢ أ}}$ = $\frac{\frac{٢٤}{٢٥}}{\frac{٧}{٢٥}}$ = $\frac{٢٤}{٧}$

مثال ٣

إذا كانت : ظا أ = $\frac{٣}{٤}$ حيث أ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، ظا ب = $\frac{٥}{١٢}$ حيث ب ∈]π ، $\frac{٣\pi}{٢}$[

فأوجد قيمة : جا (ب − ٢ أ)

الحل



جا (ب − ٢ أ)

= جا ب جتا ٢ أ − جتا ب جا ٢ أ

∵ جا ب = − $\frac{٥}{١٣}$

، جتا ٢ أ = جتا^{٢} أ − جا^{٢} أ = $\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢}$ − $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$ = $\frac{٧}{٢٥}$

، جتا ب = − $\frac{١٢}{١٣}$ ، جا ٢ أ = ٢ جا أ جتا أ = ٢ × $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٢٤}{٢٥}$

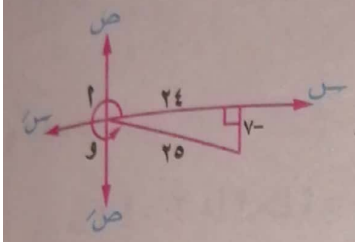
∴ جا (ب − ٢ أ) = − $\frac{٥}{١٣}$ × $\frac{٧}{٢٥}$ − $\left(-\frac{١٢}{١٣}\right)$ × $\frac{٢٤}{٢٥}$ = $\frac{-٣٥ + ٢٨٨}{١٣ \times ٢٥}$ = $\frac{٢٥٣}{٣٢٥}$

Scanned by CamScanner

مثال ٤

إذا كانت : جا أ = −٠,٢٨ حيث أ ∈] ٣π/٢ ، ٢π [فأوجد قيمة : طا أ/٢

الحل



∵ جتا أ = ٢٤/٢٥

∴ طا أ/٢ = ± √((١ − جتا أ)/(١ + جتا أ)) = ± √((١ − ٢٤/٢٥)/(١ + ٢٤/٢٥)) = ± √(١/٤٩) = ± ١/٧

، ∵ ٣π/٢ < أ < ٢π ∴ ٣π/٤ < أ/٢ < π

∴ أ/٢ تقع فى الربع الثانى. ∴ طا أ/٢ = −١/٧

مثال ٥

بدون استخدام الآلة الحاسبة وباستخدام الدوال المثلثية لنصف قياس الزاوية أوجد قيمة كل مما يأتى :

١ طا ٢٢° ٣٠َ ٢ جتا ١١٢½°

الحل

١ ∵ طا أ/٢ = ± √((١ − جتا أ)/(١ + جتا أ)) وبوضع أ = ٤٥°

، ∵ ٠° < ٤٥°/٢ < ٩٠° ∴ أ/٢ تقع فى الربع الأول.

∴ قيمة النسبة المثلثية موجبة. ∴ طا ٤٥°/٢ = √((١ − جتا ٤٥°)/(١ + جتا ٤٥°))

∴ طا ٢٢° ٣٠َ = √((١ − √٢/٢)/(١ + √٢/٢)) = √((٢ − √٢)/(٢ + √٢)) = √((٢ − √٢)(٢ − √٢)/(٢ + √٢)(٢ − √٢))

= √((٢ − √٢)²/(٤ − ٢)) = (٢ − √٢)/√٢ = √٢ − ١

٢ ∵ جتا أ/٢ = ± √((١ + جتا أ)/٢) وبوضع أ = ٢٢٥°

، ∵ ٩٠° < ٢٢٥°/٢ < ١٨٠° ∴ أ/٢ تقع فى الربع الثانى.

Scanned by CamScanner

∴ قيمة النسبة المثلثية سالبة.

$$\therefore \text{جتا } \frac{٢٢٥^\circ}{٢} = -\sqrt{\frac{١ + \text{جتا } ٢٢٥^\circ}{٢}} = -\sqrt{\frac{١ - \frac{\sqrt{٢}}{٢}}{٢}}$$

$$= -\sqrt{\frac{٢ - \sqrt{٢}}{٤}} = -\frac{١}{٢}\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}$$

$$\therefore \text{جتا } \frac{١}{٢}\, ١١٢^\circ = \frac{١}{٢}\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}$$

مثال ٦

أثبت أن : $\text{ظا } ٢\text{أ} = \frac{٢}{\text{ظتا أ} - \text{ظا أ}}$

الحل

∵ الطرف الأيسر = $\frac{٢}{\frac{\text{جتا أ}}{\text{جا أ}} - \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}}$ وبضرب كل من البسط والمقام فى جا أ جتا أ

∴ الطرف الأيسر = $\frac{٢\,\text{جا أ جتا أ}}{\text{جتا}^٢\text{أ} - \text{جا}^٢\text{أ}} = \frac{\text{جا } ٢\text{أ}}{\text{جتا } ٢\text{أ}} = \text{ظا } ٢\text{أ}$ = الطرف الأيمن.

حل آخر : الطرف الأيمن = $\frac{٢\,\text{ظا أ}}{١ - \text{ظا}^٢\text{أ}}$ وبضرب كل من البسط والمقام فى ظتا أ

∴ الطرف الأيمن = $\frac{٢}{\text{ظتا أ} - \text{ظا أ}}$ = الطرف الأيسر.

مثال ٧

أثبت أن : $\text{جا } ٣\text{س} = ٣\,\text{جا س} - ٤\,\text{جا}^٣\text{س}$

الحل

$$\text{جا } ٣\text{س} = \text{جا}(٢\text{س} + \text{س}) = \text{جا } ٢\text{س جتا س} + \text{جتا } ٢\text{س جا س}$$

$$= ٢\,\text{جا س جتا س جتا س} + (١ - ٢\,\text{جا}^٢\text{س})\,\text{جا س}$$

$$= ٢\,\text{جا س جتا}^٢\text{س} + \text{جا س} - ٢\,\text{جا}^٣\text{س}$$

$$= ٢\,\text{جا س}(١ - \text{جا}^٢\text{س}) + \text{جا س} - ٢\,\text{جا}^٣\text{س}$$

$$= ٢\,\text{جا س} - ٢\,\text{جا}^٣\text{س} + \text{جا س} - ٢\,\text{جا}^٣\text{س}$$

$$= ٣\,\text{جا س} - ٤\,\text{جا}^٣\text{س}$$

Scanned by CamScanner

مثال ٨

أثبت أن : $\frac{١ + \text{جتا}\ ٢\text{س}}{\text{جا}\ ٢\text{س}} = \text{ظتا س}$ ومنها استنتج : $\text{ظتا}\ ١٥^\circ$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{١ + ٢\ \text{جتا}^٢\text{س} - ١}{٢\ \text{جا س جتا س}} = \frac{٢\ \text{جتا}^٢\text{س}}{٢\ \text{جا س جتا س}} = \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} = \text{ظتا س} =$ الطرف الأيسر.

$\therefore \text{ظتا}\ ١٥^\circ = \frac{١ + \text{جتا}\ ٣٠^\circ}{\text{جا}\ ٣٠^\circ} = \frac{١ + \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٢ + \sqrt{٣}$

مثال ٩

إذا كان : $\text{جا س} + \text{جتا س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ فأوجد قيمة : $\text{جا}\ ٢\text{س}$

الحل

$\because \text{جا س} + \text{جتا س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ وبتربيع الطرفين.

$\therefore \text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} + ٢\ \text{جا س جتا س} = \frac{١}{٢}$ $\quad \therefore ١ + ٢\ \text{جا س جتا س} = \frac{١}{٢}$

$\therefore ٢\ \text{جا س جتا س} = -\frac{١}{٢}$ $\quad \therefore \text{جا}\ ٢\text{س} = -\frac{١}{٢}$

مثال ١٠

أثبت أن : $\text{قا}\ ٢\text{أ} + \text{ظا}\ ٢\text{أ} = \frac{\text{جتا أ} + \text{جا أ}}{\text{جتا أ} - \text{جا أ}}$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{١}{\text{جتا}\ ٢\text{أ}} + \frac{\text{جا}\ ٢\text{أ}}{\text{جتا}\ ٢\text{أ}} = \frac{١ + \text{جا}\ ٢\text{أ}}{\text{جتا}\ ٢\text{أ}} = \frac{١ + ٢\ \text{جا أ جتا أ}}{\text{جتا}^٢\text{أ} - \text{جا}^٢\text{أ}}$ (ولكن $١ = \text{جا}^٢\text{أ} + \text{جتا}^٢\text{أ}$)

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \frac{\text{جا}^٢\text{أ} + \text{جتا}^٢\text{أ} + ٢\ \text{جا أ جتا أ}}{\text{جتا}^٢\text{أ} - \text{جا}^٢\text{أ}} = \frac{(\text{جا أ} + \text{جتا أ})^٢}{(\text{جتا أ} - \text{جا أ})\ (\text{جتا أ} + \text{جا أ})}$

$= \frac{\text{جتا أ} + \text{جا أ}}{\text{جتا أ} - \text{جا أ}} =$ الطرف الأيسر.

مثال ١١

أثبت أن : $\frac{١ + \text{جا أ} - \text{جتا أ}}{١ + \text{جا أ} + \text{جتا أ}} = \text{ظا}\ \frac{\text{أ}}{٢}$

Scanned by CamScanner

الحل

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{١ + ٢\,\text{جا}\frac{أ}{٢}\,\text{جتا}\frac{أ}{٢} - \left(١ - ٢\,\text{جا}^{٢}\frac{أ}{٢}\right)}{١ + ٢\,\text{جا}\frac{أ}{٢}\,\text{جتا}\frac{أ}{٢} + \left(٢\,\text{جتا}^{٢}\frac{أ}{٢} - ١\right)} = \frac{٢\,\text{جا}\frac{أ}{٢}\,\text{جتا}\frac{أ}{٢} + ٢\,\text{جا}^{٢}\frac{أ}{٢}}{٢\,\text{جا}\frac{أ}{٢}\,\text{جتا}\frac{أ}{٢} + ٢\,\text{جتا}^{٢}\frac{أ}{٢}}$$

$$= \frac{٢\,\text{جا}\frac{أ}{٢}\left(\text{جتا}\frac{أ}{٢} + \text{جا}\frac{أ}{٢}\right)}{٢\,\text{جتا}\frac{أ}{٢}\left(\text{جا}\frac{أ}{٢} + \text{جتا}\frac{أ}{٢}\right)} = \frac{٢\,\text{جا}\frac{أ}{٢}}{٢\,\text{جتا}\frac{أ}{٢}} = \text{ظا}\frac{أ}{٢} = \text{الطرف الأيسر.}$$

مثال ١٢

أوجد قيم س التى تحقق كلًا من المعادلات الآتية حيث س $\in$]٠ ، ٢π[

١ جا٢س − جتاس = ٠

٢ جتاس + جتا٢س = ٠

٣ ظا^{٢}س + ٢ ظاس = ١

٤ جتا^{٢}س − جا^{٢}س = $\frac{١}{٢}$

الحل

١ ∵ جا٢س − جتاس = ٠ ∴ ٢ جاس جتاس − جتاس = ٠

∴ جتاس (٢ جاس − ١) = ٠

∴ جتاس = ٠ ومنها س = ٩٠° = $\frac{\pi}{٢}$ أ، س = ٢٧٠° = $\frac{٣\pi}{٢}$

أ، جاس = $\frac{١}{٢}$ (موجبة) ∴ س = ٣٠° = $\frac{\pi}{٦}$ أ، س = ١٥٠° = $\frac{٥\pi}{٦}$

∴ قيم س التى تحقق المعادلة هى : $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$

٢ ∵ جتاس + جتا٢س = ٠ ∴ جتاس + (٢ جتا^{٢}س − ١) = ٠

∴ ٢ جتا^{٢}س + جتاس − ١ = ٠ ∴ (٢ جتاس − ١) (جتاس + ١) = ٠

∴ جتاس = $\frac{١}{٢}$ (موجبة) ∴ س = ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$ أ، س = ٣٠٠° = $\frac{٥\pi}{٣}$

أ، جتاس = −١ ومنها س = ١٨٠° = π

∴ قيم س التى تحقق المعادلة هى : $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$ ، π

Scanned by CamScanner

تذكر أنه

إذا كان β أصغر قياس موجب يحقق المعادلة ، $ن \in ص$

فإن : الحل العام للمعادلة

١ $جا\ \theta = أ$ هو

$\theta = \beta + ٢\pi ن$ ، $\theta = (\pi - \beta) + ٢\pi ن$

٢ $جتا\ \theta = أ$ هو $\theta = \pm\beta + ٢\pi ن$

٣ $ظا\ \theta = أ$ هو $\theta = \beta + \pi ن$

٣ $\because$ $ظا^٢ س + ٢ ظا س = ١$

$\therefore$ $٢ ظا س = ١ - ظا^٢ س$

$\therefore$ $\frac{٢ ظا س}{١ - ظا^٢ س} = ١$

$\therefore$ $ظا\ ٢ س = ١$ (موجبة)

$\therefore$ أصغر قياس موجب يحقق

المعادلة هو : $٢ س = ٤٥° = \frac{\pi}{٤}$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة هو :

$٢ س = \frac{\pi}{٤} + \pi ن$ حيث $ن \in ص$

$\therefore$ $س = \frac{\pi}{٨} + \frac{\pi}{٢} ن$

عند $ن = ٠$ $\therefore$ $س = \frac{\pi}{٨}$

عند $ن = ١$ $\therefore$ $س = \frac{٥\pi}{٨}$

عند $ن = ٢$ $\therefore$ $س = \frac{٩\pi}{٨}$

عند $ن = ٣$ $\therefore$ $س = \frac{١٣\pi}{٨}$

$\therefore$ قيم س التى تحقق المعادلة هى : $\frac{\pi}{٨}$ ، $\frac{٥\pi}{٨}$ ، $\frac{٩\pi}{٨}$ ، $\frac{١٣\pi}{٨}$

٤ $\because$ $جتا^٢ س - جا^٢ س = \frac{١}{٢}$ $\therefore$ $جتا\ ٢ س = \frac{١}{٢}$ (موجبة)

$\therefore$ أصغر قياس موجب يحقق المعادلة هو : $٢ س = ٦٠° = \frac{\pi}{٣}$

$\therefore$ الحل العام للمعادلة هو : $٢ س = \pm\frac{\pi}{٣} + ٢\pi ن$ حيث $ن \in ص$

$\therefore$ $س = \pm\frac{\pi}{٦} + \pi ن$

عند $ن = ٠$ $\therefore$ $س = \pm\frac{\pi}{٦}$

$\therefore$ $س = \frac{\pi}{٦}$ أ، $س = \frac{-\pi}{٦} + ٢\pi = \frac{١١\pi}{٦}$

عند $ن = ١$ $\therefore$ $س = \pm\frac{\pi}{٦} + \pi$

$\therefore$ $س = \frac{\pi}{٦} + \pi = \frac{٧\pi}{٦}$

أ، $س = \frac{-\pi}{٦} + \pi = \frac{٥}{٦}\pi$

$\therefore$ قيم س التى تحقق المعادلة هى : $\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٧\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$

Scanned by CamScanner

مثال ١٣

في Δ أ ب حـ إذا كان : أَ = ٤ سم ، بَ = ٥ سم ، حـَ = ٦ سم

فأثبت بدون استخدام حاسبة الجيب أن : ق (∠ حـ) = ٢ ق (∠ أ)

الحل

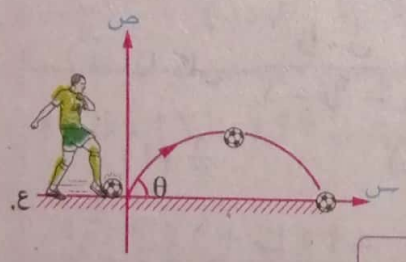
∵ جتا حـ = $\frac{\text{أَ}^٢ + \text{بَ}^٢ - \text{حـَ}^٢}{٢\,\text{أَ}\,\text{بَ}}$ = $\frac{١٦ + ٢٥ - ٣٦}{٢ \times ٤ \times ٥}$ = $\frac{١}{٨}$ (١)

، ∵ جتا أ = $\frac{\text{بَ}^٢ + \text{حـَ}^٢ - \text{أَ}^٢}{٢\,\text{بَ}\,\text{حـَ}}$ = $\frac{٢٥ + ٣٦ - ١٦}{٢ \times ٥ \times ٦}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ جتا ٢ أ = ٢ جتا^٢ أ − ١ = ٢ $\left(\frac{٣}{٤}\right)^٢$ − ١ = $\frac{١}{٨}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ جتا حـ = جتا ٢ أ ∴ ق (∠ حـ) = ٢ ق (∠ أ)

معلومة إثرائية



١ عند ركل لاعب لكرة القدم بزاوية θ مع سطح الأرض وبسرعة ابتدائية ($ع_{.١}$) م/ث فإن المسافة الأفقية التى تقطعها الكرة تعطى بالعلاقة :

$$ف = \frac{٢\,ع_{.}^٢\,جا\,\theta\,جتا\,\theta}{ء}$$

أى أن :

$$ف = \frac{ع_{.}^٢\,جا\,٢\,\theta}{ء}$$

حيث : ء (عجلة السقوط الحر) = ٩,٨ م/ث^٢ وكذلك أيضًا

٢ تستخدم النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ ($ع_{.}$) وزاويته θ التى يصنعها مع الخط الأفقى وبالتالى فإن المسافة الأفقية (ف) تتبع نفس العلاقة السابقة.

Scanned by CamScanner

تمارين 18

على الدوال المثلثية لضعف قياس الزاوية

من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جتا^{٢} س − جا^{٢} س = ...

(أ) ١ (ب) جا ٢ س (جـ) جتا ٢ س (د) ٢ جا س جتا س

② جا ٢ أ = ...

(أ) ٢ جا أ (ب) ٢ جا أ جتا أ (جـ) ١ − ٢ جا^{٢} أ (د) جا^{٢} أ

③ طا ٢ أ = ...

(أ) ٢ طا أ (ب) ٢ طا أ طتا أ (جـ) $\frac{٢ \text{ طا أ}}{١ - \text{طا}^{٢} \text{ أ}}$ (د) $\frac{٢ \text{ طا أ}}{١ + \text{طا}^{٢} \text{ أ}}$

④ جا ٦ س جتا ٦ س = ...

(أ) جا ١٢ س (ب) $\frac{١}{٢}$ جا ١٢ س (جـ) صفر (د) جا ٣ س

⑤ إذا كان : $\frac{\text{طا س}}{١ - \text{طا}^{٢} \text{ س}} = \frac{٥}{٢}$ فإن : طا ٢ س = ...

(أ) $\frac{٥}{٢}$ (ب) ٥ (جـ) $\frac{٢}{٥}$ (د) ٢

⑥ ١ + جتا ٤ أ = ...

(أ) ٢ جتا^{٢} ٤ أ (ب) جتا^{٢} ٢ أ (جـ) جتا^{٢} ٤ أ (د) ٢ جتا^{٢} ٢ أ

⑦ ١ − ٢ جا^{٢} ٥٠° = ...

(أ) جا ١٠٠° (ب) جتا ٥٠° (جـ) جتا ١٠٠° (د) جا ٥٠°

⑧ إذا كان : طا ٢ س = $\frac{٤}{٣}$ حيث س زاوية حادة فإن : طا س = ...

(أ) −٢ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $-\frac{١}{٢}$

⑨ إذا كان : جتا حـ = $\frac{١}{٣}$ فإن : جتا ٢ حـ = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{-٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-٧}{٩}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

⑩ جتا^{٢} حـ − جتا ٢ حـ = ...

(أ) جا حـ (ب) جتا حـ (جـ) جا^{٢} حـ (د) طا حـ

Scanned by CamScanner

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي :

(١) $٢\,\text{جا}\,٢٢^\circ ٣٠' \,\text{جتا}\,٢٢^\circ ٣٠'$ « $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ »

(٢) $٢\,\text{جتا}^٢ ١٥^\circ - ١$ « $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ »

(٣) $\text{جتا}^٢ ٦٧,٥^\circ - \text{جا}^٢ ٦٧,٥^\circ$ « $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ »

(٤) $٤\,\text{جا}\,٧,٥^\circ \,\text{جتا}\,٧,٥^\circ \,\text{جتا}\,١٥^\circ$ « $\frac{١}{٢}$ »

(٥) $\frac{٢\,\text{ظا}\,٢٢^\circ ٣٠'}{١ - \text{ظا}^٢ ٢٢^\circ ٣٠'}$ «١»

(٦) $\frac{٢\,\text{ظا}\,\frac{\pi}{٦}}{١ - \text{ظا}^٢ \frac{\pi}{٦}}$ « $\sqrt{٣}$ »

(٧) $\frac{\text{جتا}^٢ ٢٣^\circ - \text{جا}^٢ ٢٣^\circ}{٢\,\text{جا}^٢ ٢٣^\circ - ١}$ «-١»

(٨) $\frac{٣}{\text{قا}\,١٥^\circ \,\text{قتا}\,١٥^\circ}$ « $\frac{٣}{٤}$ »

(٩) $\frac{١ - \text{ظا}^٢ \frac{\pi}{١٢}}{١ + \text{ظا}^٢ \frac{\pi}{١٢}}$ « $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ »

(١٠) $\frac{\text{جتا}\,٤٠^\circ \,\text{جتا}\,١٠^\circ + \text{جا}\,٤٠^\circ \,\text{جا}\,١٠^\circ}{\text{جا}\,١٥^\circ \,\text{جتا}\,١٥^\circ}$ « $٢\sqrt{٣}$ »

(١١) $\frac{٢\,\text{جتا}^٢ ١٦٥^\circ - ١}{\text{جا}\,٧٥^\circ \,\text{جتا}\,٧٥^\circ}$ « $٢\sqrt{٣}$ »

(١٢) $\frac{\text{ظا}\,١٥^\circ}{(١ - \text{ظا}\,١٥^\circ)(١ + \text{ظا}\,١٥^\circ)}$ « $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$ »

---

٣ إذا كان : $\text{جا}\,أ = \frac{-٣}{٥}$ حيث $\pi < أ < \frac{٣\pi}{٢}$ أوجد قيمة كل من : $\text{جا}\,٢أ$ ، $\text{جتا}\,٢أ$ ، $\text{ظا}\,٢أ$

« $\frac{٢٤}{٢٥}$ ، $\frac{٧}{٢٥}$ ، $\frac{٢٤}{٧}$ »

---

٤ إذا كان : $\text{جتا}\,حـ = \frac{٧}{٩}$ حيث $حـ \in]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

أوجد قيمة كل من : $\text{جا}\,\frac{حـ}{٢}$ ، $\text{جتا}\,\frac{حـ}{٢}$ ، $\text{ظا}\,\frac{حـ}{٢}$

« $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، $\frac{\sqrt{٢}}{٤}$ »

---

٥ إذا كان : $\text{ظا}\,هـ = \frac{-٥}{١٢}$ ، $هـ \in]٠ ، \pi[$

أوجد قيمة كل من : $\text{جا}\,(٢هـ + ١٨٠^\circ)$ ، $\text{جتا}\,\frac{هـ}{٢}$

« $\frac{١٢٠}{١٦٩}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢٦}}$ »

---

٦ أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من : $\text{جا}\,٢\theta$ ، $\text{جتا}\,٢\theta$ ، $\text{ظا}\,٢\theta$ إذا كان :

(١) $\text{جا}\,\theta = \frac{٤}{٥}$ ، $٠^\circ < \theta < ٩٠^\circ$

(٢) $\text{جتا}\,\theta = \frac{١}{٣}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$

(٣) $\text{ظتا}\,\theta = \frac{٣}{٢}$ ، $١٨٠^\circ < \theta < ٢٧٠^\circ$

(٤) $\text{جا}\,\theta = \frac{-١٢}{١٣}$ ، $\frac{٣\pi}{٢} < \theta < ٢\pi$

Scanned by CamScanner

٧ أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

ما ٢ θ ، جتا ٢ θ ، ما $\frac{\theta}{٢}$ ، جتا $\frac{\theta}{٢}$ إذا كان :

① جتا θ = $\frac{١}{٤}$ ، ٠° < θ < ٩٠°

② ما θ = $\frac{٣}{٥}$ ، ٩٠° < θ < ١٨٠°

③ ظا θ = $\frac{٤}{٣}$ ، π < θ < $\frac{٣\pi}{٢}$

④ جتا θ = $\frac{٥}{١٣}$ حيث θ قياس زاوية حادة

٨ إذا كان : جتا ٢ س = $\frac{١}{٨}$ أوجد قيمة كل من : ما س ، جتا س

« ± $\frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ، ± $\frac{٣}{٤}$ »

٩ إذا كان : ما $\frac{ح}{٢}$ = ٠,٦ حيث ح ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [أوجد قيمة :

① ٣ ما ح + ٤ جتا ح

② قا ح + ظا ح

« ٤ ، ٧ »

١٠ إذا كان : ما $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة

أوجد قيمة : جتا $\frac{أ}{٢}$ ، ما أ ، جتا أ

« ± $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ ، ± $\frac{٤\sqrt{٢}}{٩}$ ، $\frac{٧}{٩}$ »

١١ إذا كان : أ قياس زاوية حادة ، جتا ٢ أ = $\frac{١١٩}{١٦٩}$ ، بدون استخدام الآلة الحاسبة

أوجد قيمة : ما أ ، جتا أ ، ظا ٢ أ

« $\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{١٢٠}{١١٩}$ »

١٢ إذا كان : جتا^{٢} أ = $\frac{٢٥}{١٦٩}$ حيث أ ∈] π ، $\frac{٣\pi}{٢}$ [

أوجد قيمة كل من : ما ٢ أ ، جتا $\frac{أ}{٢}$

« $\frac{١٢٠}{١٦٩}$ ، $\frac{-٢}{\sqrt{١٣}}$ »

١٣ إذا كان : ما س جتا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ وكانت س ∈] ٤٥° ، ٩٠° [

أوجد قيمة : ظا ٤ س

« $\sqrt{٣}$ »

١٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① ٢ جتا^{٢} ($\frac{\pi}{٤}$ − $\frac{٣س}{٢}$) − ١ = ...

(أ) جتا ٣ س (ب) ما ٣ س (جـ) جتا $\frac{٣}{٢}$ س (د) ما $\frac{٣}{٢}$ س

② ٢ ما (س + ٤٥°) جتا (س + ٤٥°) = ...

(أ) ٢ ما (س + ٤٥°) (ب) جتا (٩٠° + ٢ س)

(جـ) ما ٢ س (د) جتا ٢ س

Scanned by CamScanner

③ $\left(\text{جا}\frac{\text{س}}{٢} - \text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}\right)^{٢} = \dots\dots\dots$

(أ) $١ - \text{جتا س}$ (ب) $١ - \text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}$ (جـ) $١ - \text{جا س}$ (د) $١ - \text{جا}\frac{\text{س}}{٢}$

④ $\frac{\text{جتا ٢أ}}{\text{جا أ}} + \frac{\text{جا ٢أ}}{\text{جتا أ}} = \dots\dots\dots$

(أ) قتا أ (ب) قا أ (جـ) جا أ (د) جتا أ

⑤ إذا كان : $\text{جتا}^{٤}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س} = \text{جتا أس}$ فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٤

⑥ $\frac{١}{٢}(\text{ظا}\,\theta + \text{ظتا}\,\theta) = \dots\dots\dots$

(أ) $\text{جتا ٢}\,\theta$ (ب) $\text{جا ٢}\,\theta$ (جـ) $\text{قتا ٢}\,\theta$ (د) $\text{قا ٢}\,\theta$

⑦ إذا كان : $\text{ظا س} - \text{ظتا س} = ٣$ فإن : $\text{ظا ٢س} = \dots\dots\dots$

(أ) ٦ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

⑧ إذا كان : $\frac{\text{جا س}}{١ + \text{جتا س}} = \text{أ}$ فإن : $\text{ظتا}\frac{\text{س}}{٢} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{١}{٢}$ أ (ب) أ (جـ) $\frac{١}{\text{أ}}$ (د) $\frac{٢}{٣}$ أ

⑨ إذا كان : س قياس زاوية حادة ، $\text{جا س} = \frac{١}{\sqrt{٥}}$

فإن : $\text{جا}^{٢}\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right) - \text{جتا}^{٢}\left(\frac{\pi}{٤} - \text{س}\right) = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{-٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{٤}{٥}$

⑩ إذا كان : $\text{جتا ب} = \frac{-٤}{٥}$ حيث $\pi < \text{ب} < \frac{٣\pi}{٢}$ فإن : $\frac{\text{جا ٢ب}}{٢\,\text{جتا ٢ب}} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{٧}{١٢}$ (ب) $\frac{٣}{٤}$ (جـ) $\frac{٢٤}{٧}$ (د) $\frac{١٢}{٧}$

⑪ إذا كانت س قياس زاوية حادة ، $\text{ظا س} = \frac{١}{٣}$ فإن : $\frac{١ - \text{جتا ٢س}}{١ + \text{جتا ٢س}} = \dots\dots\dots$

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٩}$ (د) $\frac{٢}{٩}$

⑫ إذا كان : $٢\,\text{جا س}\,\text{جتا}^{٣}\text{س} - ٢\,\text{جتا س}\,\text{جا}^{٣}\text{س} = \frac{١}{٢}$

فإن : $\text{جا ٤س} = \dots\dots\dots$

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

Scanned by CamScanner

١٥ إذا كان : ٢٥ جتا أ + ٧ = ٠ حيث أ أصغر زاوية موجبة ، ٤ طا ب − ٣ = ٠
حيث ب أكبر زاوية موجبة ، ب ∈]٠ ، ٣٦٠°[أوجد قيمة :
① جتا ٢ أ ② طا (أ − ٢ ب)
« $\frac{-٥٢٧}{٦٢٥}$ ، $\frac{٢٣٦}{٥٢٧}$ »

١٦ إذا كان : طا أ = $\frac{١}{٣}$ حيث أ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[، طا ب = $\frac{١}{٧}$ حيث ب ∈]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[
أوجد قيمة كل من : طا (٢ أ + ب) ، طا (أ − ٢ ب) ، طا ٢ (أ + ب)
« ١ ، $\frac{٣}{٧٩}$ ، $\frac{٤}{٣}$ »

١٧ إذا كان : جا (٢٧٠° + أ) = $\frac{٥}{١٣}$ ، طا ب = $\frac{٤}{٣}$ ، π < ب < أ < ٢ π أوجد قيمة :
① جتا (π + ٢ أ) ② طتا ($\frac{\pi}{٢}$ − ٢ ب)
« $\frac{١١٩}{١٦٩}$ ، $\frac{-٢٤}{٧}$ »

١٨ إذا كان : جا ٢ س = $\frac{١٢٠}{١٦٩}$ حيث ٢ س ∈]٠ ، π[
فأوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة المقدار : جا س + جتا س
« $\frac{١٧}{١٣}$ »

١٩ إذا كان : ٤ جتا ٢ حـ + ٣ جا ٢ حـ = ٠
فأوجد بدون استخدام الحاسبة قيمة : طا حـ حيث حـ قياس زاوية حادة موجبة.
« ٢ »

٢٠ إذا كان : جا ٢ س = $\frac{١}{٥}$ أوجد قيمة :
① جا ٣ س جتا س + جتا ٣ س جا س
② جتا ٥ س جتا س + جا ٥ س جا س
« ± $\frac{٤\sqrt{٦}}{٢٥}$ ، $\frac{٢٣}{٢٥}$ »

٢١ إذا كان : جا س + جتا س = $\frac{٧}{٥}$ حيث س قياس زاوية حادة أثبت أن :
① جا ٢ س = $\frac{٢٤}{٢٥}$ ② قا س + قتا س = $\frac{٣٥}{١٢}$ ③ جتا ٢ س = ± $\frac{٧}{٢٥}$

٢٢ إذا كان : ٤ جا هـ + ٣ جتا هـ = ٣
أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن : طا $\frac{هـ}{٢}$ = $\frac{٤}{٣}$ حيث $\frac{هـ}{٢}$ قياس زاوية حادة موجبة.

٢٣ إذا كانت : أ ، ب ، حـ قياسات زوايا المثلث أ ب حـ وكان طا حـ = $\frac{٣}{٤}$
أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة : جا $\left(\frac{أ + ب}{٢}\right)$
« $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ »

٢٤ إذا كان : ب − ٢ أ = ١٨٠° ، طا أ = $\frac{١}{٢}$ أثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن : طا ب = $\frac{٤}{٣}$

Scanned by CamScanner

٢٥ إذا كان : أ ∈] $\frac{\pi}{٢}$ ، π [، طا $\frac{أ}{٢}$ = ٣ ، طا ب = $\frac{٣}{٤}$ حيث ب قياس زاوية حادة

أوجد : جتا أ + جا ٢ ب « $\frac{٤}{٢٥}$ »

---

٢٦ إذا كان : أ ب حـ مثلث حاد الزوايا فيه : طا أ = ٣ ، ٤ + ٣ طا ٢ ب = صفر

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة كلاً من : طا ب ، ق (∠ حـ) « ٢ ، ٤٥° »

---

٢٧ إذا كان : طا أ = $\frac{١}{٢}$ ، طا ب = ٧ أوجد : طا ٢ أ ثم أثبت أن : ٢ أ + ب = ١٣٥°

حيث أ ، ب قياسا زاويتين حادتين. « $\frac{٤}{٣}$ »

---

٢٨ إذا كان : طا ٢ أ = $\frac{٣}{٤}$ حيث أ ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [، وكان طا ب = $\frac{٣}{٢}$ طا أ حيث ب ∈] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

أثبت أن : أ + ب = ٤٥°

---

٢٩ بدون استخدام الآلة الحاسبة وباستخدام الدوال المثلثية لنصف الزاوية أوجد قيمة كل مما يأتي :

① جتا ٧٥° ② طا ١٥° ③ جتا ٢٢ ٣٠َ° ④ طا ٦٧ ٣٠َ°

---

٣٠ س ص ع مثلث فيه : سَ = ١٢ سم ، صَ = ١٨ سم ، عَ = ١٥ سم

أثبت أن : ق (∠ ص) = ٢ ق (∠ س)

---

٣١ إذا كان أ ب حـ مثلث فيه : أَ : بَ : حَ = ٣ : ٤ : ٥ أوجد قيمة : جا أ ، طا ٢ أ « $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٢٤}{٧}$ »

---

٣٢ أ ب حـ مثلث فيه : أَ = حَ أثبت أن : جا ب = ٢ جا أ جتا حـ

---

٣٣ أثبت أن :

① $\frac{جتا ٢ أ}{جتا أ - جا أ}$ = جتا أ + جا أ

② جا ٨ أ = ٨ جا أ جتا أ جتا ٢ أ جتا ٤ أ

③ ٢ جا^{٢} ٢ أ + جتا ٤ أ = ١

④ ١ − ٢ جا^{٢} ($\frac{\pi}{٤}$ − $\frac{٥ س}{٢}$) = جا ٥ س

⑤ جتا^{٤} س − جا^{٤} س = جتا ٢ س

⑥ $\frac{جا أ + جتا ٢ أ}{١ + ٢ جا أ}$ = ١ − جا أ

⑦ جا أ = $\frac{٢ طا \frac{أ}{٢}}{١ + طا^{٢} \frac{أ}{٢}}$

⑧ طا س = $\frac{جا س - ٢ جا^{٣} س}{٢ جتا^{٣} س - جتا س}$

Scanned by CamScanner

(٩) $\frac{\text{جا}\,٢\text{س}}{١ + \text{جتا}\,٢\text{س}} = \text{ظا}\,\text{س}$

(١٠) $\text{قا}\,٢\text{س} = \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{س}}$

(١١) $\frac{\text{جا}\,٢\text{س} + \text{جا}\,\text{س}}{١ + \text{جتا}\,\text{س} + \text{جتا}\,٢\text{س}} = \text{ظا}\,\text{س}$

(١٢) $\frac{١ - \text{جتا}\,\text{ح} + \text{جا}\,\text{ح}}{١ + \text{جتا}\,\text{ح} + \text{جا}\,\text{ح}} = \text{ظا}\,\frac{\text{ح}}{٢}$

(١٣) $\frac{\text{جتا}^{٢}\,\text{أ}}{\text{ظتا}\,\frac{\text{أ}}{٢} - \text{ظا}\,\frac{\text{أ}}{٢}} = \frac{١}{٤}\,\text{جا}\,٢\text{أ}$

(١٤) $\frac{١ - \text{جا}\,٢\text{هـ}}{\text{جتا}\,٢\text{هـ}} = \frac{١ - \text{ظا}\,\text{هـ}}{١ + \text{ظا}\,\text{هـ}}$

(١٥) $\frac{١ - \text{جتا}\,\text{ح}}{١ + \text{جتا}\,\text{ح}} = \text{ظا}^{٢}\,\frac{\text{ح}}{٢}$

(١٦) $\frac{١ - \text{ظا}\,\frac{\text{س}}{٢}}{١ + \text{ظا}\,\frac{\text{س}}{٢}} = \frac{\text{جتا}\,\text{س}}{١ + \text{جا}\,\text{س}}$

(١٧) $\frac{٢\,\text{جا}\,\text{أ} - \text{جا}\,٢\text{أ}}{٢\,\text{جا}^{٣}\,\text{أ}} = \frac{١}{٢}\,\text{قا}^{٢}\,\frac{\text{أ}}{٢}$

(١٨) $٤\,\text{جا}\,\text{أ}\,\text{جتا}^{٣}\,\text{أ} - \text{جا}\,٢\text{أ} = \frac{١}{٢}\,\text{جا}\,٤\text{أ}$

(١٩) $\frac{١ - \text{جتا}\,٢\text{أ}}{٣ + \text{جتا}\,٢\text{أ}} = \frac{\text{جا}^{٢}\,\text{أ}}{١ + \text{جتا}^{٢}\,\text{أ}}$

(٢٠) $\frac{\text{ظتا}\,\theta - ١}{\text{ظتا}\,\theta + ١} = \frac{\text{جتا}\,٢\theta}{١ + \text{جا}\,٢\theta}$

(٢١) $(\text{جا}\,\text{س} + \text{جتا}\,\text{س})^{٢} - (\text{جا}\,\text{س} - \text{جتا}\,\text{س})^{٢} = ٢\,\text{جا}\,٢\text{س}$

(٢٢) $٢\,\text{جتا}\,(٤٥^{\circ} - ٢\text{أ})\,\text{جتا}\,(٤٥^{\circ} + ٢\text{أ}) = ١ - ٨\,\text{جا}^{٢}\,\text{أ}\,\text{جتا}^{٢}\,\text{أ}$

(٢٣) $(\text{جا}\,\text{أ} - \text{جا}\,\text{ب})^{٢} + (\text{جتا}\,\text{أ} + \text{جتا}\,\text{ب})^{٢} = ٤\,\text{جتا}^{٢}\left(\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}\right)$

(٢٤) $\frac{\text{جا}\,٣\text{أ}}{\text{جا}\,\text{أ}} - \frac{\text{جتا}\,٣\text{أ}}{\text{جتا}\,\text{أ}} = ٢$

(٢٥) $\text{جتا}^{٢}\,\text{أ} = \frac{١}{٢}\,(١ + \text{جتا}\,٢\text{أ})$ ومن ذلك أوجد قيمة : $\text{جتا}\,١٥^{\circ}$ « $\frac{\sqrt{٦} + \sqrt{٢}}{٤}$ »

(٢٦) $\text{قتا}\,٢\text{س} + \text{ظتا}\,٢\text{س} = \text{ظتا}\,\text{س}$ ومن ذلك أوجد قيمة : $\text{ظتا}\,١٥^{\circ}$ « $٢ + \sqrt{٣}$ »

(٢٧) $\text{جتا}\,٢\text{س} = \frac{١ - \text{ظا}^{٢}\text{س}}{١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}}$ ومن ذلك أوجد قيمة : $\frac{١ - \text{ظا}^{٢}\,١٥^{\circ}}{١ + \text{ظا}^{٢}\,١٥^{\circ}}$ « $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ »

---

٣٤ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

(١) $١٦\,\text{جتا}\,٢٠^{\circ}\,\text{جتا}\,٤٠^{\circ}\,\text{جتا}\,٦٠^{\circ}\,\text{جتا}\,٨٠^{\circ} = ١$

(٢) $\text{جا}\,\frac{٥\pi}{٢٤}\,\text{جتا}^{٣}\,\frac{٥\pi}{٢٤} - \text{جا}^{٣}\,\frac{٥\pi}{٢٤}\,\text{جتا}\,\frac{٥\pi}{٢٤} = \frac{١}{٨}$

(٣) $\text{ظا}^{٢}\,١٥^{\circ} + ٢\sqrt{٣}\,\text{ظا}\,١٥^{\circ} = ١$

Scanned by CamScanner

٣٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية حيث س ∈]٠ ، ٢π[:

① جا ٢س = جا س «{π/٣ ، π ، ٥π/٣}»

② جا ٢س = √٣ جا س «{π/٦ ، π ، ١١π/٦}»

③ جتا ٢س + جا س = ٠ «{٧π/٦ ، ١١π/٦ ، π/٢}»

④ √٣ جتا ٢س = جتا س «{٣٠° ، ٣٣٠° ، ١٢٥° ١٦َ ، ٢٣٤° ٤٤َ}»

⑤ جتا ٢س + ٣ جتا س + ٢ = ٠ «{π ، ٢π/٣ ، ٤π/٣}»

⑥ جا² ٢س + ٤ جا س جتا س + ١ = ٠ «{٣π/٤ ، ٧π/٤}»

⑦ جتا² س − جا² س = −١/٢ «{π/٣ ، ٢π/٣ ، ٤π/٣ ، ٥π/٣}»

⑧ طا² س/٢ + ٢ طا س/٢ = ١ «{π/٤ ، ٥π/٤}»

⑨ جتا س − ٢ جا² ١/٢ س = ٠ «{π/٣ ، ٥π/٣}»

---

٣٦ أوجد مجموعة حل المعادلة :

جا س جتا² س − جا³ س جتا س = √٣/٨ حيث س ∈]٠ ، π[«{π/١٢ ، π/٦ ، ٧π/١٢ ، ٢π/٣}»

---

٣٧ إذا كان : ٥ جتا س + ٤ = ٠ ، ٢س ∈]٠ ، ٢π[

أوجد قيمة : جتا ٣س «٤٤/١٢٥»

---

٣٨ إذا كان أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى حـ أثبت أن :

① جا ٢أ = ٢ أَ ب َ / حـَ²

② جتا ٢أ = (ب َ² − أَ²) / حـَ²

③ جا أ/٢ = √((حـَ − ب َ) / (٢ حـَ))

---

٣٩ أ ب حـ مثلث ، $\overrightarrow{أد}$ ينصف زاوية أ من الداخل بحيث يلاقى $\overline{ب حـ}$ فى د

أثبت أن : أد = (٢ ب َ حـَ / (ب َ + حـَ)) جتا أ/٢

Scanned by CamScanner

٤٠ الربط بالميكانيكا :

ركل لاعب كرة القدم بزاوية قياسها ٣٠° مع سطح الأرض وبسرعة ابتدائية مقدارها ١٤,٧ م/ث

إذا كانت المسافة الأفقية ف التى تقطعها الكرة تعطى بالعلاقة : ف = $\frac{٢\ ع^{٢}\ جا\ \theta\ جتا\ \theta}{د}$

حيث د عجلة السقوط الحر وتساوى ٩,٨ م/ث^{٢} ، ع تمثل السرعة الابتدائية.

(١) ضع العلاقة السابقة فى أبسط صورة.

(٢) أوجد المسافة الأفقية ف التى تقطعها الكرة بالمتر. «١٩ م»

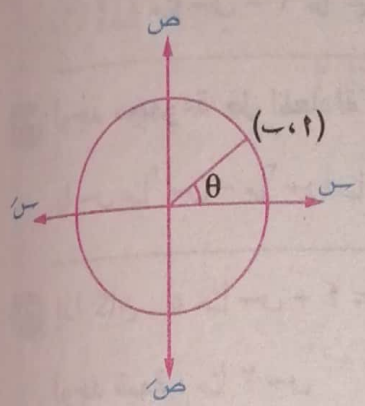
مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

٤١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\frac{جا^{٢}\ ٣أ}{جا^{٢}\ أ} - \frac{جتا^{٢}\ ٣أ}{جتا^{٢}\ أ} = ٢$ فإن : جتا ٢أ = ...

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\frac{١}{٢}$

(٢) الشكل المقابل يمثل دائرة الوحدة



فإن : جا ٢ θ = ...

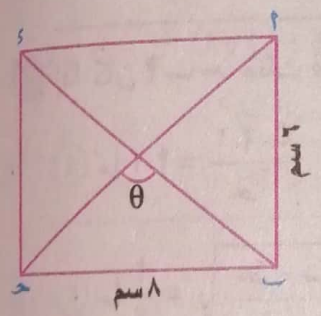
(أ) أب (ب) ٢ أب

(جـ) أ + ب (د) أ^{٢} + ب^{٢}

(٣) فى الشكل المقابل :

إذا كان أ ب جـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم

، ب جـ = ٨ سم



فإن : جا θ = ...

(أ) $\frac{٢٤}{٥}$ (ب) $\frac{٢٤}{٢٥}$

(جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{١٢}{٢٥}$

(٤) مجموعة حل المعادلة : جتا ٣ س − جتا ٢ س + جتا س = ٠

حيث س زاوية حادة هى .....

(أ) {٣٠° ، ٦٠°} (ب) {٣٠° ، ٤٥°}

(جـ) {٤٥° ، ٦٠°} (د) {١٥° ، ٧٥°}

Scanned by CamScanner

٤٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

(١) $\text{جا } ٥٤^\circ \text{ جا } ١٨^\circ = \frac{١}{٤}$ (٢) $\text{جا } ٥٤^\circ - \text{جا } ١٨^\circ = \frac{١}{٢}$

٤٣ بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن : $\text{طا } ٢٠^\circ \text{ طا } ٣٠^\circ \text{ طا } ٤٠^\circ = \text{طا } ١٠^\circ$

٤٤ أثبت أن : $\text{طا } ٣\text{هـ} = \frac{٣\text{ طا هـ} - \text{طا}^٣\text{ هـ}}{١ - ٣\text{ طا}^٢\text{ هـ}}$ ومن ثم أثبت أن : $\text{طا } ٥٠^\circ \text{ طا } ٦٠^\circ \text{ طا } ٧٠^\circ = \text{طا } ٨٠^\circ$

٤٥ في المثلث ء هـ و إذا علم أن : $\text{هـ}' = ٢\sqrt{٣}\text{ ء}'$ ، $\text{ق}(\angle \text{و}) = ٣٠^\circ$

فأثبت بدون استخدام حاسبة الجيب أن : $\text{طا ء} = \frac{\sqrt{٣}}{٩}$

٤٦ أ ب حـ مثلث فيه : $\text{ق}(\angle \text{ب}) = \text{ق}(\angle \text{حـ})$ وكان : $\text{جا } \frac{\text{أ}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{ب}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{حـ}}{٢} = \frac{١}{٨}$

أثبت أن : Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع.

Scanned by CamScanner

الدرس 4

صيغة هيرون

تذكر أن :

* مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع
* مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

قاعدة **هيرون لحساب مساحة المثلث**

إذا رمزنا لأطوال أضلاع المثلث أ ب حـ بالرموز أَ ، بَ ، حـَ

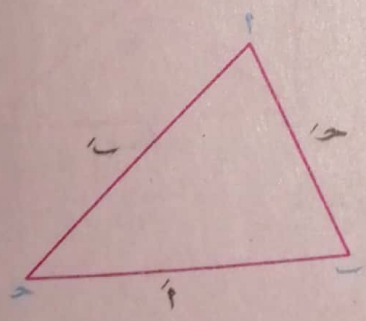
ورمزنا لمحيط المثلث بالرمز ٢ ح

أى أن : ٢ ح = أَ + بَ + حـَ

فإن مساحة (Δ أ ب حـ) = $\sqrt{ح (ح - أَ) (ح - بَ) (ح - حـَ)}$

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

نعلم من قاعدة جيب التمام أن :



جتا حـ = $\frac{أَ^٢ + بَ^٢ - حـَ^٢}{٢ أَ بَ}$ (١)

، ∵ جا^٢ حـ + جتا^٢ حـ = ١ ∴ جا^٢ حـ = ١ − جتا^٢ حـ

∴ جا حـ = $\sqrt{١ - جتا^٢ حـ}$ (٢)

ويرفض الحل السالب لأن [٠° < حـ < ١٨٠° أى (جا حـ) موجبة]

Scanned by CamScanner

بالتعويض من (١) فى (٢) :

$$\therefore \text{جا حـ} = \sqrt{١ - \frac{(\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ - \text{حـ}^٢)^٢}{٤\,\text{أ}^٢\,\text{ب}^٢}} = \sqrt{\frac{٤\,\text{أ}^٢\,\text{ب}^٢ - (\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ - \text{حـ}^٢)^٢}{٤\,\text{أ}^٢\,\text{ب}^٢}}$$

$$= \frac{١}{٢\,\text{أ ب}} \sqrt{٤\,\text{أ}^٢\,\text{ب}^٢ - (\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ - \text{حـ}^٢)^٢}$$

$$= \frac{١}{٢\,\text{أ ب}} \sqrt{[٢\,\text{أ ب} + (\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ - \text{حـ}^٢)]\,[٢\,\text{أ ب} - (\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ - \text{حـ}^٢)]}$$

$$= \frac{١}{٢\,\text{أ ب}} \sqrt{[(\text{أ} + \text{ب})^٢ - \text{حـ}^٢]\,[\text{حـ}^٢ - (\text{أ} - \text{ب})^٢]}$$

$$= \frac{١}{٢\,\text{أ ب}} \sqrt{(\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ})\,(\text{ب} + \text{حـ} - \text{أ})\,(\text{أ} + \text{حـ} - \text{ب})\,(\text{أ} + \text{ب} - \text{حـ})}$$

$$= \frac{١}{٢\,\text{أ ب}} \sqrt{٢\,\text{ح}\,(\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} - ٢\,\text{أ})\,(\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} - ٢\,\text{ب})\,(\text{أ} + \text{ب} + \text{حـ} - ٢\,\text{حـ})}$$

$$= \frac{١}{٢\,\text{أ ب}} \sqrt{٢\,\text{ح}\,(٢\,\text{ح} - ٢\,\text{أ})\,(٢\,\text{ح} - ٢\,\text{ب})\,(٢\,\text{ح} - ٢\,\text{حـ})}$$

$$= \frac{١}{٢\,\text{أ ب}} \sqrt{١٦\,\text{ح}\,(\text{ح} - \text{أ})\,(\text{ح} - \text{ب})\,(\text{ح} - \text{حـ})}$$

$$= \frac{٤}{٢\,\text{أ ب}} \sqrt{\text{ح}\,(\text{ح} - \text{أ})\,(\text{ح} - \text{ب})\,(\text{ح} - \text{حـ})}$$

$$= \frac{٢}{\text{أ ب}} \sqrt{\text{ح}\,(\text{ح} - \text{أ})\,(\text{ح} - \text{ب})\,(\text{ح} - \text{حـ})}$$

، $\because$ مساحة (Δ أ ب حـ) $= \frac{١}{٢}\,\text{أ ب جا أ}$

$$\therefore \text{مساحة } (\Delta\ \text{أ ب حـ}) = \frac{١}{٢}\,\text{أ ب} \times \frac{٢}{\text{أ ب}} \sqrt{\text{ح}\,(\text{ح} - \text{أ})\,(\text{ح} - \text{ب})\,(\text{ح} - \text{حـ})}$$

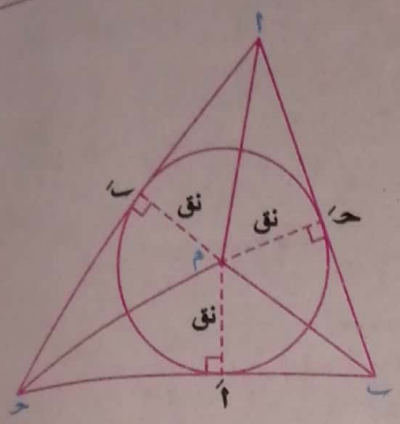
$$= \sqrt{\text{ح}\,(\text{ح} - \text{أ})\,(\text{ح} - \text{ب})\,(\text{ح} - \text{حـ})}$$

إيجاد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث وتمس جميع أضلاعه

إذا كان طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث وتمس جميع أضلاعه = نق

ومساحة المثلث = Δ ، ومحيط المثلث = ٢ ح فإن : $\boxed{\text{نق} = \frac{\Delta}{\text{ح}}}$

Scanned by CamScanner



البرهـان

من هندسة الشكل المقابل نلاحظ أن :

مساحة (Δ أ ب حـ) = مساحة (Δ ب م حـ)

+ مساحة (Δ أ م حـ)

+ مساحة (Δ أ م ب)

∴ مساحة (Δ أ ب حـ) = $\frac{١}{٢}$ أَ نق + $\frac{١}{٢}$ بَ نق + $\frac{١}{٢}$ حـَ نق

∴ Δ = $\frac{١}{٢}$ نق (أَ + بَ + حـَ) ∴ Δ = $\frac{١}{٢}$ نق × ٢ ح

∴ Δ = نق × ح

∴ نق = $\frac{\Delta}{ح}$ = $\frac{\text{مساحة المثلث}}{\frac{١}{٢}\text{ محيط المثلث}}$ = $\frac{\sqrt{ح(ح-أَ)(ح-بَ)(ح-حـَ)}}{ح}$

ملاحظة

الكميات (ح − أَ) ، (ح − بَ) ، (ح − حـَ) كميات موجبة ولا يمكن أن تكون سالبة أو تساوى الصفر.

أى أن : نصف محيط المثلث (ح) > طول أى ضلع فى المثلث أما إذا كان ح ≤ طول أحد الأضلاع فلا يوجد مثلث وبالتالى لا يمكن إيجاد مساحته.

مثال ١

احسب مساحة المثلث أ ب حـ فى كل من الحالات الآتية :

١ أ حـ = ١٠ سم وطول العمود المرسوم من ب على $\overline{أ حـ}$ يساوى ٧ سم

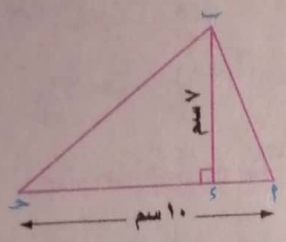
٢ أ ب = ١٢ سم ، ب حـ = ١٥ سم ، ق (∠ب) = ٩٠°

٣ أ ب = ١١ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، ق (∠ب) = ٤٧° مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٤ أ ب = ٢٥ سم ، ب حـ = ١٧ سم ، أ حـ = ٢٦ سم

Scanned by CamScanner

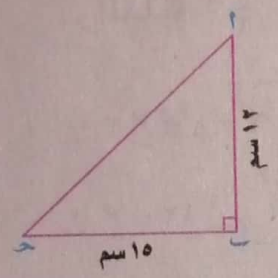
الحل



١ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ حـ × ب ء

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٧

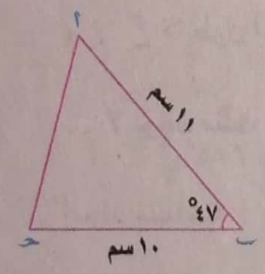
= ٣٥ سم^{٢}



٢ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ × أ ب

= $\frac{١}{٢}$ × ١٥ × ١٢

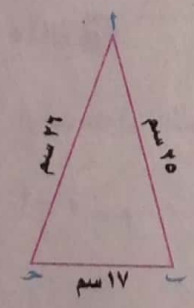
= ٩٠ سم^{٢}



٣ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × ب حـ × جا ب

= $\frac{١}{٢}$ × ١١ × ١٠ × جا ٤٧°

≈ ٤٠,٢٢ سم^{٢}



٤ ∵ ٢ ح = ٢٥ + ١٧ + ٢٦ = ٦٨ ∴ ح = ٣٤ سم

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\sqrt{ح (ح - أَ) (ح - ب) (ح - حـ)}$

= $\sqrt{٣٤ \times (٣٤ - ١٧) (٣٤ - ٢٦) (٣٤ - ٢٥)}$

= $\sqrt{٣٤ \times ١٧ \times ٨ \times ٩}$ = ٢٠٤ سم^{٢}

مثال ٢

أوجد مساحة كل مما يأتي :

١ مثلث أ ب حـ فيه : أَ = ٩ سم ، ب = ٤٠ سم ، حـ = ٤١ سم

٢ مثلث أطوال أضلاعه ٥ ، ٦ ، ١٣ من السنتيمترات

الحل

١ ∵ ٢ ح = ٩ + ٤٠ + ٤١ = ٩٠ ∴ ح = ٤٥ سم

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\sqrt{ح (ح - أَ) (ح - ب) (ح - حـ)}$

= $\sqrt{٤٥ (٤٥ - ٩) (٤٥ - ٤٠) (٤٥ - ٤١)}$ = ١٨٠ سم^{٢}

Scanned by CamScanner

حل آخر :

∵ حَ² = (٤١)² = ١٦٨١ ، أَ² + بَ² = (٩)² + (٤٠)² = ١٦٨١

∴ حَ² = أَ² + بَ² ∴ المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ

∴ المساحة = ½ × ٩ × ٤٠ = ١٨٠ سم²

٢ ∵ ٢ ح = ٥ + ٦ + ١٣ = ٢٤

∴ ح = ١٢ سم

، ∵ ح < طول أحد الأضلاع (١٣ سم)

∴ لا يوجد مثلث وبالتالى لا يمكن إيجاد مساحته.

لاحظ أن

نعلم أن متباينة المثلث هى :

«مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث يكون أكبر من طول الضلع الثالث»

، ∵ (٥ + ٦) سم < (١٣) سم

∴ الأطوال ٥ سم ، ٦ سم ، ١٣ سم لا تكون أطوال أضلاع للمثلث.

مثال ٣

أوجد طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع Δ أ ب حـ الذى فيه :

أَ = ٧ سم ، بَ = ٩ سم ، حَ = ١٢ سم

الحل

∵ ٢ ح = ٧ + ٩ + ١٢ = ٢٨ ∴ ح = ١٤ سم

∴ مساحة (Δ أ ب حـ) = √١٤(١٤ − ٧)(١٤ − ٩)(١٤ − ١٢)

∴ Δ = √١٤ × ٧ × ٥ × ٢ = ١٤ √٥ سم²

، ∵ نق = Δ / ح = ١٤ √٥ / ١٤ = √٥ سم

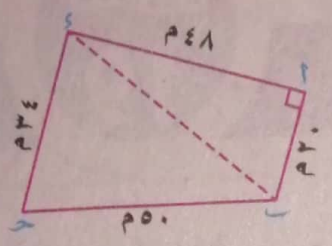
∴ طول نصف قطر الدائرة التى تمس أضلاع المثلث أ ب حـ = √٥ سم

Scanned by CamScanner

مثال ٤

الشكل المقابل يمثل قطعة أرض رباعية الشكل

أوجد مساحتها.



الحل

* نرسم $\overline{\text{ب ء}}$

فى Δ أ ب ء القائم الزاوية فى أ ∵ ب ء = $\sqrt{(٢٠)^٢ + (٤٨)^٢}$ = ٥٢ م

∴ مساحة (Δ أ ب ء) = $\frac{١}{٢}$ × أ ب × أ ء = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ × ٤٨ = ٤٨٠ م^٢

، فى Δ ب حـ ء :

∵ ٢ ع = ٥٢ + ٥٠ + ٣٤ = ١٣٦ ∴ ع = ٦٨

∴ مساحة (Δ ب حـ ء) = $\sqrt{٦٨ (٦٨ - ٥٠) (٦٨ - ٣٤) (٦٨ - ٥٢)}$ = ٨١٦ م^٢

∴ مساحة قطعة الأرض = مساحة (Δ أ ب ء) + مساحة (Δ ب حـ ء)

= ٤٨٠ + ٨١٦ = ١٢٩٦ م^٢

Scanned by CamScanner

اختبر نفسك

تمارين 19

على صيغة هيرون

من أسئلة الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مساحة سطح المثلث الذى طولا ضلعين فيه ٦ ، ٨ من السنتيمترات وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٣٠° تساوى ..... سم^{٢}

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ٢٤

(٢) مساحة المثلث أ ب جـ الذى فيه : أ ب = ٧ سم ، ب جـ = ٨ سم ، ق (∠ب) = ٥٠° تساوى ..... (لأقرب رقمين عشريين)

(أ) ٢١,٤٥ (ب) ٤٥,٢١ (جـ) ٧,٥٦ (د) ٨,٤٥

(٣) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع مساحته ٣٦ $\sqrt{٣}$ سم^{٢} فإن طول ضلعه = ... سم

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢ (د) ١٢ $\sqrt{٣}$

(٤) مساحة المثلث المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٠ سم وقياس إحدى زاويتى قاعدته ٤٥° تساوى ..... سم^{٢}

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٠٠

(٥) المعين الذى قياس إحدى زواياه ٥٠° وطول ضلعه ٦ سم تكون مساحته ..... (لأقرب سم^{٢})

(أ) ٢٠ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٨ (د) ٣٢

(٦) مساحة المثلث المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه س سم تساوى ..... سم^{٢}

(أ) س^{٢} (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ س^{٢} (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ س^{٢} (د) $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

(٧) مساحة سطح المثلث الذى أطوال أضلاعه ٦ سم ، ٨ سم ، ١٠ سم تساوى ..... سم^{٢}

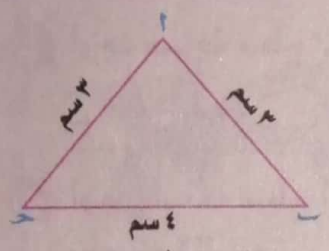
(أ) ٢٤ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٠ (د) ٤٨

Scanned by CamScanner

⑧ في الشكل المقابل :

مساحة سطح Δ أ ب حـ

تساوى ..... سم²



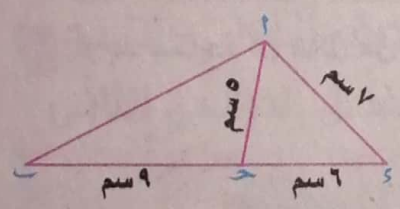
(أ) ٢٠ (ب) ٤ $\sqrt{٥}$ (جـ) ٢ $\sqrt{٥}$ (د) ١٠

⑨ إذا كان محيط مثلث هو ٦٠ سم وطول أحد أضلاعه ٢٦ سم فإن طولى ضلعيه الآخرين بالسم يمكن أن يكونا .....

(أ) ٤ ، ٣٠ (ب) ٣١ ، ٣ (جـ) ٢٠ ، ١٤ (د) ٢ ، ٣٢

⑩ في الشكل المقابل :

مساحة Δ أ ب حـ = ... سم²



(أ) ٦ $\sqrt{٦}$ (ب) ٩ $\sqrt{٦}$

(جـ) ٩ $\sqrt{٣}$ (د) ٢ $\sqrt{٦}$

٢ أوجد مساحة المثلث أ ب حـ في كل من الحالات الآتية :

① أَ = ١٥ سم ، بَ = ١٢ سم ، حـَ = ٩ سم «٥٤ سم²»

② أَ = ٤٠ سم ، بَ = ٢٤ سم ، حـَ = ٣٢ سم «٣٨٤ سم²»

③ بَ = ١٦ سم ، حـَ = ٢٠ سم ، ق (∠ أ) = ٦٠° «٨٠ $\sqrt{٣}$ سم²»

④ أَ = ٥ سم ، بَ = ١٢ سم ، حـَ = ١٣ سم «٣٠ سم²»

⑤ أطوال أضلاعه ٦ ، ٦ ، ٨ من السنتيمترات. «٨ $\sqrt{٥}$ سم²»

⑥ أطوال أضلاعه ٢٤ ، ٣٦ ، ٦٠ من السنتيمترات.

⑦ أطوال أضلاعه ١٢ ، ١٤ ، ٣٠ من السنتيمترات.

٣ أوجد طول نصف قطر الدائرة التي تمس أضلاع المثلث أ ب حـ في كل من الحالات الآتية :

① أَ = ٢٥ سم ، بَ = ١٧ سم ، حـَ = ٢٦ سم «٦ سم»

② أَ = ٧ سم ، بَ = ٩ سم ، حـَ = ١٤ سم «$\frac{٤\sqrt{٥}}{٥}$ سم»

③ أَ = ٥ سم ، بَ = ٦ سم ، ق (∠ حـ) = ٦٠° «١,٦ سم»

Scanned by CamScanner

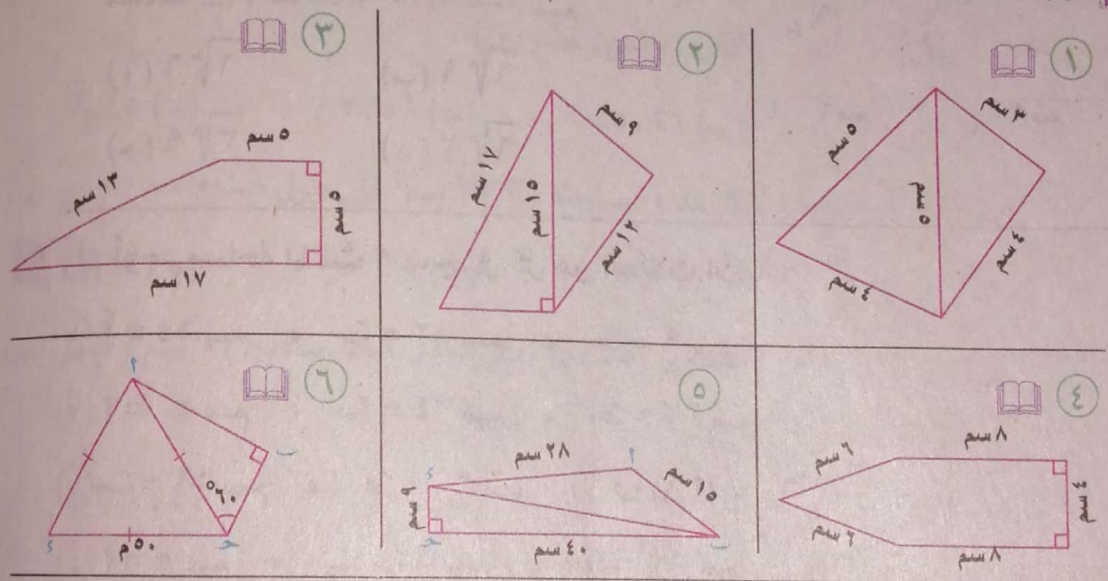
٤ أوجد مساحة سطح المثلث أ ب حـ الذى فيه :
ح − أَ = ٣ سم ، ح − بَ = ٥ سم ، ح − حـَ = ٩ سم
«٣ √٢٥٥ سم²»

٥ أوجد مساحة سطح المثلث المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ١٤ سم ومحيطه ٣٦ سم
«٢٤ √٥ سم²»

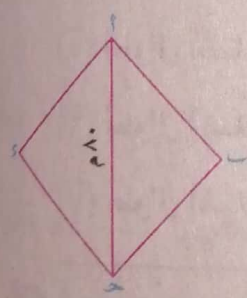
٦ حدائق : حديقة على شكل مثلث النسبة بين أطوال أضلاعه هى ٧ : ٥ : ٣ فإذا كان محيط الحديقة يساوى ٣٠٠ متر فأوجد مساحتها.
«٢٥٩٨ م²»

٧ أوجد مساحة الشكل الرباعى أ ب حـ ء الذى فيه ق (∠ ب) = ٩٠° ، أ ب = ٥ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، أ ء = حـ ء = ١٣ سم
«١٠٣.١٨ سم²»

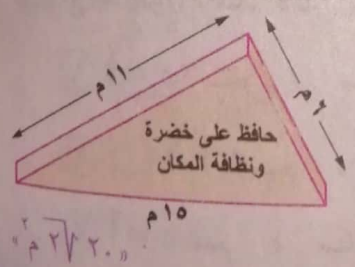
٨ أوجد مساحة كل شكل من الأشكال الآتية مستخدمًا البيانات المبينة على الرسم :



٩ الشكل المقابل يمثل قطعة أرض على شكل معين محيطها ٢٠٠ متر وطول $\overline{\text{أ حـ}}$ = ٨٠ متر
أوجد مساحتها.
«٢٤٠٠ م²»



١٠ الربط بالبيئة :
يبين الشكل المقابل حديقة مثلثة الشكل
أوجد مساحتها.



«٢٠ √٢ م²»

Scanned by CamScanner

المعاصر

احرص على اقتناء

فى

الرياضيات البحتة

للصف الثانى الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

المراجعة النهائية ونماذج الامتحانات

طبقًا لمواصفات الورقة الامتحانية

اسم يعنى التفوق

Scanned by CamScanner

يُصرف مجانًا مع هذا الكتاب

- الجزء الخاص بالامتحانات
- الجزء الخاص بالإجابات

عزيز إسحق سرجيوس
حسين جاويش

2
ثانوى
2020

الآن بالمكتبات

المعاصر في:

- تطبيقات الرياضيات (علمى)
- الرياضيات العامة (أدبى)
- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية

للصف الثانى الثانوى

5 321122 220103

/ElMoasser.eg

مكتبة الطلبة
للطبع والنشر والتوزيع
٣ شارع كامل صدقى - الفجالة
تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤٠١٢
e-mail: info@elmoasserbooks.com
www.elmoasserbooks.com

Scanned by CamScanner