

1.2 Méthode de décomposition Adomian

Soit l'équation intégrale-différentielle de Fredholm (2.2) En remplaçant le noyau $K(x, t) = g(x)h(t)$ dans (2.2), on obtient :

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_a^b h(t)u(t)dt$$

qui peut s'écrire :

$$Lu(x) = f(x) + g(x) \int_a^b h(t)u(t)dt. \quad (2.18)$$

Où L : est l'opérateur différentiel $L = \frac{d^n}{dx^n}$ qui est un opérateur inversible, par conséquent L^{-1} est un opérateur intégral (c'est l'intégration n fois et peut être considérée comme des intégrales définies de a à x pour chaque intégrale).

En intervenant L^{-1} dans les deux côtés de l'équation (2.18), on a alors :

$$\begin{aligned} u(x) = \beta_0 + \beta_1(x-a) + \frac{1}{2!}\beta_2(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\beta^{(n-1)}(x-a)^{(n-1)} + L^{-1}(f(x)) \\ + \left(\int_a^b h(t)u(t)dt \right) L^{-1}(g(x)) \end{aligned} \quad (2.19)$$

La méthode de décomposition d'Adomian admet l'utilisation de la série suivante :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x). \quad (2.20)$$

En substituant (2.20) dans (2.19), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \beta_k(x-a)^k + L^{-1}(f(x)) + \left(\int_a^b h(t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt \right) L^{-1}(g(x)). \quad (2.21)$$

L'équation (2.21) peut être écrite explicitement comme suivant :

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \beta_k(x-a)^k + L^{-1}(f(x)) \\ + \left(\int_a^b h(t)u_0(t)dt \right) L^{-1}(g(x)) \\ + \left(\int_a^b h(t)u_1(t)dt \right) L^{-1}(g(x)) \\ + \dots \\ \vdots \end{aligned} \quad (2.22)$$

Les composants $u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$ de fonction inconnue $u(x)$ sont déterminés de manière récurrente suivante :

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \beta_k (x-a)^k + L^{-1}(f(x)) \\
u_1(x) &= \left(\int_a^b h(t) u_0(t) dt \right) L^{-1}(g(x)) \\
u_2(x) &= \left(\int_a^b h(t) u_1(t) dt \right) L^{-1}(g(x)) \\
&\vdots \\
u_n(x) &= \left(\int_a^b h(t) u_{n-1}(t) dt \right) L^{-1}(g(x)) \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Alors écrite sous forme suivante :

$$\begin{cases} u_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \beta_k (x-a)^k + L^{-1}(f(x)) \\ u_{n+1}(x) &= \left(\int_a^b h(t) u_n(t) dt \right) L^{-1}(g(x)), n \geq 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Où le $u_0(x)$ est défini par tous les termes non inclus à l'intérieur le signe intégral de (2.22). Après avoir déterminé les composants $u_i(x), i \geq 0$, la solution $u(x)$ de (2.2) est ensuite obtenu sous forme de série En utilisant (2.20), la série obtenue converge vers la solution exacte si une telle solution existe.

Exemple 1.3. *utilisez la méthode de décomposition pour résoudre l'équation integro-differential de Fredholm :*

$$u'(x) = 36x^2 + \int_0^1 u(t) dt, \quad u(0) = 1 \tag{2.25}$$

Solution : En intégrant les deux côtés de l'équation (2.25) de 0 à x , en utilisant la condition initiale, on obtient :

$$u(x) = 1 + 12x^3 + x \int_0^1 u(t) dt \tag{2.26}$$

On remplace la solution donnée par la série :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x). \tag{2.27}$$

On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 + 12x^3 + x \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt. \quad (2.28)$$

Alors :

$$u_0(x) + u_1 + u_2 + \dots = 1 + 12x^3 + x \int_0^1 u_0(t) dt + x \int_0^1 u_1(t) dt + \dots. \quad (2.29)$$

Les composants $u_n(x), n \geq 0$ de $u(x)$ peut être déterminé en utilisant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0(x) &= 1 + 12x^3 \\ u_{n+1}(x) &= x \int_0^1 u_n(t) dt, n \geq 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 + 12x^3 \\ u_1(x) &= x \int_0^1 u_0(t) dt \\ &= x \int_0^1 (1 + 12t^3) dt \\ &= 4x \\ u_2(x) &= x \int_0^1 u_1(t) dt \\ &= x \int_0^1 4t dt \\ &= 2x \\ u_3(x) &= x \int_0^1 u_2(t) dt \\ &= x \int_0^1 2t dt \\ &= x \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \text{ alors}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 + 12x^3 + 4x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) \\ &= 1 + 12x^3 + 4x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + 12x^3 + 8x \end{aligned}$$

La solution exacte de l'équation ((2.25)) est $u(x) = 1 + 8x + 12x^3$.

1.3 Méthode de solution sous forme séries

Soit l'équation intégrale-différentielle de Fredholm

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt, \quad u^{(j)}(a) = \beta_j; 0 \leq j \leq k-1 \quad (2.31)$$

Où β_j les conditions initiales.

La méthode de solution sous forme séries est basé sur la forme de série de Taylor ; pour une solution $u(x)$ de (2.31) analytique en $x = 0$ alors :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (2.32)$$

On suppose que $u(x)$ la solution de (2.31) est analytique, donc possède une série de Taylor de la forme (2.32) où les coefficients a_n seront déterminé d'une façon récurrente.

En remplaçant (2.32) dans (2.31), on obtient :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^{(k)} = T(f(x)) + \lambda \int_a^b K(x, t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt. \quad (2.33)$$

qui peut s'écrire comme suit :

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^{(k)} = T(f(x)) + \lambda \int_a^b K(x, t) (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) dt. \quad (2.34)$$

où $T(f(x))$ est la série de Taylor de $f(x)$.

Après avoir calculé les intégrales définies et la dérivée $k^{\text{ème}}$ dans L'équation (2.34), en faisant une comparaison de deux côtés de l'équation résultante on obtient une relation récurrente entre les coefficient a_k , $k \geq 0$; qui conduira à déterminer ces coefficients, où certains d'entre eux sont déjà obtenues à partir des conditions initiales.

La substitution des coefficients obtenus dans l'équation (2.32) produite la solution sous forme série de l'éq.(2.31).

Exemple 1.4. Résoudre l'équation intégrale-différentielle de Fredholm en utilisant la méthode solution sous forme série ;

$$u'(x) = 4 + 4x + \int_{-1}^1 (1 - xt)u(t)dt, \quad u(0) = 1 \quad (2.35)$$

Solution :

En utilisant la méthode solution sous forme série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2.36)$$

D'après la condition initiale : $u(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$.

En substituant (2.36) dans les deux côtés de l'équation (2.35) on obtient :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = 4 + 4x + \int_{-1}^1 (1 - xt) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt.$$

Alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 4 + 4x + \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt + x \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} dt.$$

d'après l'évaluation de l'intégrale sur le côté droit, on obtient :

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots = \left(6 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{2}{5} a_4 + \frac{2}{7} a_6 + \dots \right) + \left(4 - \frac{2}{3} a_1 - \frac{2}{5} a_3 - \frac{2}{7} a_5 - \dots \right) x \quad (2.37)$$

le 2^{eme} terme de l'éq. (2.37) est un polynome de 1^{er} degré donc $\forall n \geq 3 : a_n = 0$, et par comparaison de deux termes de (2.37) on obtient : $a_1 = 6 + \frac{2}{3} a_2$ et $a_2 = 4 - \frac{2}{3} a_1 \Rightarrow a_1 = 6, a_2 = 0$

donc $a_0 = 1, a_1 = 6$ et $\forall n \geq 2 : a_n = 0$.

La substitution de ces résultats dans (2.36) donne la solution exacte

$$u(x) = 1 + 6x.$$

2 Convertir en équations intégrales de Fredholm

Pour convertir l'équation intégro-différentielle de Fredholm en une équation intégrale de Fredholm, en intégrant les deux côtés de l'équation intégro-différentielle autant de fois que l'ordre de la dérivée impliquée dans l'équation de 0 à x pour chaque fois que nous intégrons, et en utilisant les conditions initiales données.

Il est important de noter que cette technique n'est applicable que si l'équation intégro-différentielle de Fredholm implique uniquement la fonction inconnue $u(x)$, et non aucune de ses dérivées, sous le signe intégral. Après avoir établi la transformation en équation intégrale de Fredholm, on peut utiliser l'une des méthodes discutées précédemment, à savoir la méthode de décomposition adomian, la méthode de calcul direct, de solution sous forme séries.

Exemple 2.1. $u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xtu(t)dt, \quad u(0) = 0$

Solution

En intégrant les deux côtés de l'équation précédente de 0 à x , en utilisant la condition initiale, on obtient :

$$u(x) = x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \int_0^1 tu(t)dt$$

Cet équation peut être écrite comme :

$$u(x) = x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2\alpha \quad (2.38)$$

Où :

$$\alpha = \int_0^1 tu(t)dt. \quad (2.39)$$

En remplaçant l'expression (2.38) de $u(x)$ dans (2.39), on obtient :

$$\alpha = \int_0^1 t\left(t - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{2}t^2\alpha\right)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{8}\alpha t^4\right]_0^1. \quad (2.40)$$

Alors :

$$\alpha = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8}\alpha. \quad (2.41)$$

donc $\alpha = \frac{1}{3}$, en remplaçant la valeur de α dans (2.38) on obtient la solution exacte :
 $u(x) = x$

Exemple 2.2. Résoudre les équations intégro-différentielles de Fredholm suivantes, en les convertissant aux équations intégrales de Fredholm

1. $u''(x) = e^x - x + \int_0^1 xtu(t)dt, \quad u(0) = u'(0) = 1$

2. $u''(x) = -e^x + \frac{1}{2}x + \int_0^1 xtu(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = -1$