الأستاذ . بوعجاب عبد القادر

في

المراجعة النهائية

للرياضيات

- دروس ملخصة
- تمارين محلولة بالتفصيل
- مواضيع بكالوريا محلولة

3AS

علوم تجريبية - رياضيات

تقني رياضي

منشورات كليك

ClicEditions

زاد للنشر
Zed Publishing

الفهرس

1. النهايات ـ الاستمرارية ـ الاشتقاقية ودراسة الدوال العددية ـــــ 3
معارف ـــــ 3
تمارين محلولة بالتفصيل ـــــ 11

2. الدوال الأسية واللوغاريتمية ـــــ 30
معارف ـــــ 30
تمارين محلولة بالتفصيل ـــــ 35

3. الهندسة في الفضاء ـــــ 72
معارف ـــــ 72
تمارين محلولة بالتفصيل ـــــ 77

4. الأعداد المركبة و التحويلات النقطية ـــــ 96
معارف ـــــ 96
تمارين محلولة بالتفصيل ـــــ 98

5. المتتاليات العددية ـــــ 118
معارف ـــــ 118
تمارين محلولة بالتفصيل ـــــ 121

6. الدوال الأصلية و الحساب التكاملي ـــــ 143
معارف ـــــ 143
تمارين محلولة بالتفصيل ـــــ 146

مواضيع بكالوريا محلولة ـــــ 164

النهايات ـ الاستمرارية ـ الاشتقاقية ـ دراسة دوال عددية

■ حساب النهايات :

$\frac{\infty}{0}=\infty$	$\frac{a}{0}=\infty \quad (a\in R^*)$	$\frac{a}{\infty}=0$
$\frac{0}{\infty}=0$	$\frac{0}{a}=0 \quad (a\in R^*)$	

حالات عدم التعيين : $0\times\infty$; $+\infty-\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

لإزالة حالة عدم التعيين يمكن أن نتبع إحدى الطرق التالية:

الاختزال أو التحليل او المرافق أوالعدد المشتق.

■ النهايات والحصر : الحصر عند نهاية منتهية :

f, h, g دوال عددية معرفة على المجال I و l عدد حقيقي.

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$ و كانت

$g(x)\le f(x)\le h(x)$ من أجل كل x من I فإن :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

مثال : برهن أنه إذا كان $x>-1$ فإن :

$\frac{-1}{x+1}\le\frac{\cos x}{x+1}\le\frac{1}{x+1}$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}$.

* $x>-1$ و منه فإن : $x+1>0$ كما أن :

$-1\le\cos x\le 1$ و منه فإن : $\frac{-1}{x+1}\le\frac{\cos x}{x+1}\le\frac{1}{x+1}$.

* بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x+1}=0$.

■ المستقيمات المقاربة : (a عدد حقيقي ثابت)

المستقيم المقارب العمودي على محور الفواصل :

☜ (إذا كانت : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ فإن : (C_f)

يقبل مستقيم مقارب عمودي على محور الفواصل معادلته $(x=a)$.

المستقيم المقارب الموزاي لمحور الفواصل :

☜ (إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ فإن :

(C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل

معادلته ($y=a$).

المستقيم المقارب المائل :

☜ (إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ فإنه يحتمل وجود

مستقيم مقارب مائل معادلته من الشكل ($y=ax+b$)

■ طريقة إثبات أن المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=0$

فإن: المستقيم $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

■ طريقة إيجاد معادلة المستقيم المقارب المائل مباشرة من عبارة الدالة f :

إذا كانت: عبارة f من الشكل: $f(x)=ax+b+h(x)$

وكانت: $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=0$

فإن: $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

■ دراسة وضعية منحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ) الذي معادلته $y=ax+b$:

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y=f(x)-(ax+b)$

تمرين تطبيقي

f هي الدالة العددية المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^2+5}{x+2}$$

- أحسب النهايات ثم أعط التفسير البياني لكل نهاية .
- عين الأعداد الحقيقية a , b , c بحيث يكون :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$$

- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x-2$ مقارب مائل لـ : (C_f).
- أدرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f).

الحل:

* حساب النهايات مع إعطاء التفسير البياني لكل نهاية :

لدينا : $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(\frac{x^2+5}{x+2}\right)=+\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to -2^+}(x^2+5)=9$ و $\lim\limits_{x\to -2^+}(x+2)=0^+$

و عليه فإن المستقيم الذي معادلته $x=-2$ هو مستقيم مقارب يوازي (yy').

لدينا: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ لأن :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+5}{x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

*تعيين الأعداد الحقيقية a , b , c :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$$

$$f(x)=\frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}$$

$$=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}$$

$$=\frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases}a=1\\2a+b=0\\2b+c=5\end{cases}$

و عليه : $\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=9\end{cases}$

و بالتالي فإن : $f(x)=x-2+\frac{9}{x+2}$

* إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x-2$ مقارب مائل لـ : (C_f) :

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-2+\frac{9}{x+2}-(x-2)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9}{x+2}\right)=0$$

و منه: $y=x-2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

* دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

بما أن : $f(x)-y=\frac{9}{x+2}$ و $x>-2$

فإن : $f(x)-y>0$

و بالتالي فإن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ).

■ الاستمرارية ونظرية القيم المتوسطة :

*دراسة استمرارية دالة f عند عدد حقيقي a من مجموعة تعريفها:

تكون f مستمرة عند a إذا تحقق ما يلي :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

ملاحظة: (في بعض الدوال ندرس الاستمرارية من اليمين ومن اليسار عند القيمة a)

* دراسة الاستمرارية على يمين a :

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ فإن f مستمرة على يمين a.

* دراسة الاستمرارية على يسار a :

إذا كنت: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ فإن f مستمرة على يسار a.

* نظرية القيم المتوسطة :

∴ طريقة إثبات أن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$:

1) f مستمرة على المجال $[a,b]$

2) f رتيبة على المجال $[a,b]$ (أي متناقصة أو متزايدة)

3) k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

إذا تحقق 1 و 2 و 3 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$.

ملاحظة مهمة :

يمكن أن يطرح السؤال كالأتي :

أثبت أن (C_f) يقطع المستقيم الذي معادلته $y=k$ في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]a;b[$.

* حالة خاصة :

∴ طريقة إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$:

1) f مستمرة على المجال $[a,b]$

2) f رتيبة على المجال $[a,b]$ (أي متناقصة أو متزايدة).

3) 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

أو : $f(a)\times f(b)<0$

إذا تحقق 1 و 2 و 3 ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a;b[$

ملاحظة مهمة :

يمكن أن يطرح السؤال كالأتي :

أثبت أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $[a,b]$.

تمرين تطبيقي:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1,2]$ بـ: $f(x)=x^4-x^2+1$.

* بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا α في المجال $]1,2[$.

الحل:

f مستمرة على المجال $[1,2]$ لأنها دالة كثير حدود

و $f(1)=1$ و $f(2)=13$.

و بما أن $1<3<13$ أي $f(1)<3<f(2)$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا α حيث $\alpha\in]1,2[$.

تمرين تطبيقي:

g دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=2x^3-3x^2-1$

1- أدرس تغيرات الدالة g .

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 1,6 و 1,7 .

الحل:

1) تغيرات الدالة g :

g معرفة وقابلة للاشتقاق على IR ومنه قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

إشارة $g'(x)$

قيم x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
إشارة: $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

و منه : g متزايدة على كل من المجالات $]-\infty;-1]$; $[0;1]$ و متناقصة لما $x \in [-1;0]$

2) $g(1,6) = 2(4,096) - 3(2,56) - 1 = -0,488$

و $g(1,7) = 9,826 - 8,67 - 1 = 0,156$

لدينا الشروط التالية :

1) g مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,6;1,7]$

2) 0 محصور بين $g(1,6)$ و $g(1,7)$

أو: $g(1,6) \times g(1,7) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد α من المجال $]1,6;1,7[$ يحقق $g(\alpha) = 0$ وبما أن g متزايدة تماما على $]1,6;1,7[$ فإن α وحيد .

تمرين تطبيقي:

بين أن المعادلة : $2x^3 - 5x^2 - 3 = 0$ تقبل حلا في المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$

الحل:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$

حيث: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$

f دالة مستمرة على المجال $\left[\frac{5}{2};3\right]$ لأنها دالة كثير حدود

و $f\left(\frac{5}{2}\right) = -3$ ، $f(3) = 6$.

و بما أن $f(3) \times f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $2x^3 - 5x^2 - 3 = 0$ تقبل حلا α

حيث: $\alpha \in \left]\frac{5}{2},3\right[$.

■ الإشتقاقية:

تعريف: f دالة معرفة على مجال مفتوح من مجموعة الأعداد الحقيقية يشمل العدد a فإن f قابلة للاشتقاق عند a إذا كانت : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ منتهية .

معناه : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$ حيث : (L عدد حقيقي ثابت).

ويسمى L العدد المشتق للدالة f عند العدد الحقيقي a .

ونرمز له بـ : $f'(a) = L$.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على R بـ: $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد $a = 2$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(3x^2 - 2x - 1) - (7)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2}$$

لاحظ : ($0 \to$ البسط و $0 \to$ المقام)

لدينا: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x - 2}$

$$= \lim_{x \to 2} (3x + 4) = 10$$

ومنه : نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $a = 2$ والعدد المشتق للدالة f عند العدد $a = 2$ هو : $f'(2) = 10$.

ملاحظة : بوضع: $x - a = h$ ، ومنه : $x = a + h$.

وإذا كان: $x \to a$ فإن: $x - a \to 0$ أي: $h \to 0$

ومنه : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

أي لدراسة الاشتقاق عند العدد a يمكن حساب: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ وإذا كانت النتيجة منتهية نقول f قابلة للاشتقاق عند a .

مثال: (نفس المثال السابق) . $f(x)=3x^2-2x-1$

دراسة اشتقاق الدالة f عند العدد $a=2$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(3(2+h)^2-2(2+h)-1\right)-(7)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+10h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3h+10)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3h+10)=10$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد $a=2$ والعدد المشتق للدالة f عند العدد $a=2$ هو :

$f'(2)=10$.

*العدد المشتق على اليمين :

تعريف :

إذا كانت دالة f معرفة على مجال من الشكل $[a;a+h[$ حيث h عدد حقيقي موجب تماما .

وكانت : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$

حيث : (L عدد حقيقي ثابت).

نقول أن f تقبل الاشتقاق على اليمين عند العدد الحقيقي a، ويسمى العدد L العدد المشتق للدالة f على يمين العدد a.

*العدد المشتق على اليسار:

تعريف :

إذا كانت دالة f معرفة على مجال من الشكل $]a-h;a[$ حيث h عدد حقيقي موجب تماما .

وكانت : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$ حيث (L عدد حقيقي ثابت).

نقول أن f تقبل الاشتقاق على اليسار عند العدد الحقيقي a، ويسمى العدد L العدد المشتق للدالة f على يسار العدد a.

ملاحظة :

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين وعلى يسار العدد الحقيقي a.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\substack{x\to a\\ x\to a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ و

نقول أن f قابلة للاشتقاق عند a.

مثال01 : $f(x)=x.|x|$ المعرفة على R .

دراسة الاشتقاق عند 0 :

كتابة عبارة الدالة f بدون رمز القيمة المطلقة :

$f(x)=x.(x)=x^2$ إذا كان $x\geq 0$

$f(x)=x.(-x)=-x^2$ إذا كان $x\leq 0$

لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}(x)=0$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يمين 0 والعدد المشتق على يمين 0 يساوى : 0 .

ولدينا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0}(-x)=0$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يسار 0 والعدد المشتق على يسار 0 يساوى : 0 .

• بما أن العدد المشتق على اليمين يساوى العدد المشتق على اليسار فإن f قابلة للاشتقاق عند 0 .

مثال 02: $f(x)=x.|x-1|$ المعرفة على R .

دراسة الاشتقاق عند 1 :

كتابة عبارة الدالة f بدون رمز القيمة المطلقة :

$f(x)=x.(x-1)=x^2-x$ إذا كان $x\geq 1$

$f(x)=x.(-x+1)=-x^2+x$ إذا كان $x\leq 1$

لدينا :

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}x=1$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يمين 1 والعدد المشتق على يمين 1 يساوى : 1 .

ولدينا: $\lim\limits_{x\to 1^{>}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^{>}} \dfrac{-x^2+x}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^{>}} \dfrac{-x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^{>}} -x = -1$

ومنه f قابلة للاشتقاق على يسار 1 والعدد المشتق على يسار 1 يساوى : -1 .

• بما أن العدد المشتق على اليمين لا يساوى العدد المشتق على اليسار فإن f غير قابلة للاشتقاق عند 1 .

***الدالة المشتقة :**

تعريف: f دالة معرفة على مجال مفتوح I من R .

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أن الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال I .

وتسمى الدالة التي ترفق بكل عدد x_0 من I العدد المشتق $f'(x_0)$ بالدالة المشتقة الأولى للدالة f ونرمز لها بالرمز $f'(x)$.

وإذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة هي f'' وتسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f وهكذا نسمي الدوال f' ، f'' ، ..... ، $f^{(n)}$ بالمشتقات المتتابعة للدالة f .

ملاحظات :

• الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على R .

• الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال مفتوح من مجموعة تعريفها .

• الدوال الصماء قابلة للاشتقاق على كل مجال مفتوح من مجموعة تعريفها.

• الدوال المثلثية من الشكل : $x \mapsto \sin(ax+b)$ ، $x \mapsto \cos(ax+b)$ (حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان) قابلة للاشتقاق على R .

***جدول مشتقات دوال مألوفة :**

مجال قابلية الاشتقاق	$f'(x)$	$f(x)$
$]-\infty;+\infty[$	0	λ (عدد حقيقي ثابت)
$]-\infty;+\infty[$	1	x
$]-\infty;+\infty[$	$n.x^{n-1}$	n عدد طبيعي و $n\geq 2$ x^n
$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$
$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$]-\infty;+\infty[$	$\cos x$	$\sin x$
$]-\infty;+\infty[$	$-\sin x$	$\cos x$

***العمليات على المشتقات : (الجمع ، الجداء ، النسبة)**

U و V دالتان قابلتان الاشتقاق على مجال I و α عدد حقيقي ثابت .

الدالة	الدالة المشتقة
$U+V$	$U'+V'$
$U\times V$	$U'.V+V'.U$
$\alpha.U$	$\alpha.U'$
$\dfrac{U}{V}$	$\dfrac{U'V-V'U}{V^2}$
$\dfrac{1}{U}$	$\dfrac{-U'}{U^2}$

أمثلة :

عين مشتقة كل دالة من الدوال التالية المعرفة على المجال I في كل حالة :

1) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2-5x+\frac{2}{3}$ ، $I=]0;+\infty[$.

2) $f(x)=(x^2-1)\sqrt{x}$ ، $I=]0;+\infty[$.

3) $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-4}$ ، $I=]2;+\infty[$.

4) $f(x)=1-2x+\frac{3}{5x-10}$ ، $I=]-\infty;2[$.

الحل

1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $I=]0;+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x)=\frac{1}{2}(4x^3)-3(2x)-5(1)+0=2x^3-6x-5$$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

$$f'(x)=(2x)\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)$$

$$=\frac{2x\sqrt{x}.2\sqrt{x}+x^2-1}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}$$

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ ولدينا :

$$f'(x)=\frac{2(x^2-4)-2x(2x-3)}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^2+6x-8}{(x^2-4)^2}$$

4) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;2[$ ولدينا :

$$f'(x)=-2-\frac{3(5)}{(5x-10)^2}=-2-\frac{15}{(5x-10)^2}$$

مشتقة دالة مركبة :

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على المجال J و g دالة قابلة للاشتقاق على المجال I حيث من أجل كل عدد حقيقي x من I فإن : $g(x)\in J$ فيكون من أجل كل عدد حقيقي x من I : $[(f\circ g)(x)]'=g'(x)\times f'(g(x))$

مثال01: $f(x)=\sin(2x-3)$

نلاحظ أن الدالة f هي مركب دالتين $U\circ V$.

حيث : $U(x)=\sin x$ (قابلة للاشتقاق على R)

بحيث: $U'(x)=\cos x$

$V(x)=2x-3$ (قابلة للاشتقاق على R)

بحيث: $V'(x)=2$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على R ولدينا :

$$f'(x)=V'(x)\times U'(V(x))=2\cos(2x-3)$$

مثال02: $f(x)=(2x-3)^5$

نلاحظ أن الدالة f هي مركب دالتين $U\circ V$ حيث :

$U(x)=x^5$ (قابلة للاشتقاق على R).

ومنه : $U'(x)=5x^4$

$V(x)=2x-3$ (قابلة للاشتقاق على R).

ومنه : $V'(x)=2$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على R ولدينا :

$$f'(x)=V'(x)\times U'(V(x))=2\times5(2x-3)^4$$
$$=10(2x-3)^4$$

نتائج :

1) $\left(\sqrt{U}\right)'=\frac{U'}{2\sqrt{U}}$

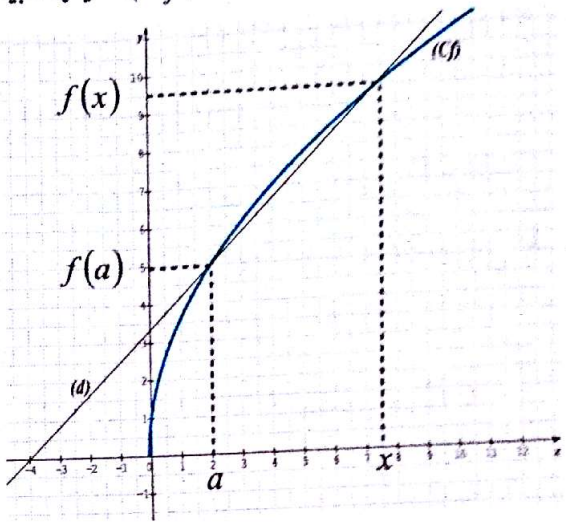
2) $(U)^n=n.U'.U^{n-1}$

3) $(\sin(ax+b))'=a.\cos(ax+b)$

4) $(\cos(ax+b))'=-a.\sin(ax+b)$

التفسير الهندسي للعدد المشتق و معادلة المماس :

f دالة معرفة على مجال I من R و (C_f) تمثيلها البياني .



لتكن النقطة M_0 من (C_f) ذات الفاصلة a .

ولتكن $M(x;f(x))$ نقطة متغيرة من (C_f) .

ننشئ المستقيم (d) الذي يشمل النقطتين M_0 و M .

نحسب معامل توجيه (ميل) المستقيم (d) باستعمال النقطتين M_0 و M .

معامل توجيه المستقيم (d) : $\alpha=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

نلاحظ أنه :

لما x يؤول لـ a فإن $f(x)$ يؤول لـ $f(a)$.

ومنه فإن : النقطة M تقترب من النقطة M_0

وهكذا فإن المستقيم (d) يكون مماسا لـ (C_f) عند النقطة M_0 معامل توجيهه : $\alpha=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

ملاحظات :

- إذا كان α عدد حقيقي ثابت غير معدوم فإن : $\alpha=f'(a)$ ونقول أن (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة a معادلته : $y=\alpha.x+\beta$ أي : $y=f'(a).x+\beta$

وبما أن النقطة M_0 تنتمي للمماس فإن إحداثياتها تحقق معادلة المماس ومنه : $f(x_0)=f'(a).a+\beta$

أي : $\beta=f(x_0)-a.f'(a)$

بتعويض قيمة β في المعادلة $y=f'(a).x+\beta$ نحصل على المعادلة : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

- إذا كانت $\alpha=0$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند a و (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة a موازي لمحورا لفواصل .
- إذا كانت :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$$

فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند a و (C_f) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة a موازي لمحور التراتيب .

- إذا كانت :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L' \text{ و } \lim_{x\overset{<}{\to}a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$$

حيث: $L\neq L'$ فإن الدالة .

f غير قابلة للاشتقاق عند a و (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة a معامل توجيههما L ; L' .

* اتجاه تغير دالة:

f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من R .

- إذا كانت $f'(x)>0$ من أجل كل x من I فإن الدالة f متزايدة تماما على I .

(يمكن أن تكون f' منعدمة من أجل قيم منعزلة من I)

- إذا كانت $f'(x)<0$ من أجل كل x من I فإن الدالة f متناقصة تماما على I .

(يمكن أن تكون f' منعدمة من أجل قيم منعزلة من I)

- إذا كانت $f'=0$ من أجل كل x من I فإن الدالة f ثابتة على I .

القيم الحدية المحلية :

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من R و a عدد حقيقي من I حيث : $f'(a)=0$ و غيرت f' من إشارتها عند القيمة a . فإن : $f(a)$ قيمة حدية محلية للدالة f .

مثال :

x قيم	-3		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(1)$	↘	

$f(1)$ قيمة حدية محلية صغرى

x قيم	-3		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	$f(1)$	↗	

$f(1)$ قيمة حدية محلية عظمى

تمارين

التمرين 01:

f دالة عددية معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ (C_f) تمثيلها البياني و جدول تغيراتها معطى كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$+\infty \parallel +\infty$	↘	2

1/ عين النهايات ثم فسر بيانيا كل نهاية.

2/ أجب بصحيح أو خطأ على كل سؤال مما يلي مع تبرير الإجابة .

أ- المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب لـ (C_f) .

ب- المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا .

ج- مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>0$ هي $S=]-\infty;-1[$.

د- على المجال $]-\infty;-1[$ يكون : $f(-2)>f(x)$ عندما يكون $x<-2$.

هـ- النقطة $A(-3;1)$ تنتمي إلى (C_f) .

و- الدالة f زوجية.

حل التمرين 01 :

1/ تعيين النهايات ثم التفسير البياني :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

فإن : $y=2$ مستقيم مقارب أفقي يوازي (xx')

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=+\infty$

فإن : $x=-1$ مستقيم عمودي يوازي (yy')

2/ الإجابة بصح أو خطأ مع التبرير :

أ/ المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مقارب لـ (C_f).

صحيح لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

ب/ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا .

خطأ لأن $f(x)>2$ من أجل كل x من $R-\{-1\}$.

ج/ مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>0$ هي $]-\infty;-1[$ $S=$.

خطأ لأن مجموعة حلول المتراجحة .

$f(x)>0$ هي : $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ $S'=$.

د/ على المجال $]-\infty;-1[$ يكون : $f(-2)>f(x)$ عندما يكون $x<-2$. صحيح لأن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1[$.

هـ/ النقطة $A(-3;1)$ تنتمي إلى (C_f) .

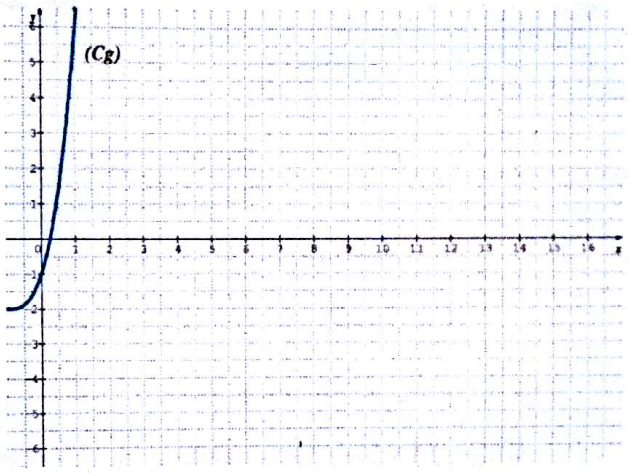
خطأ لأن القيمة الحدية الصغرى للدالة 2 و عليه فإنه مهما يكن x من D_f فإن: $f(x)>2$ أي أن: $f(-3)\neq 1$.

و/ الدالة f زوجية. خطأ لأن : $f(-1)\neq f(1)$.

التمرين 02:

1/ المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ كما يلي :

$$g(x)=x^3+3x^2+3x-1$$



أ/ بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدد $g(0)$ و إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب/ علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$.

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.

2/ f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يأتي : $f(x)=\dfrac{x^2+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$.

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، من المجال $]-1,+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$.

ب/ عين دون حساب : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، و فسر النتيجة بيانيا.

ج/ أحسب $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$

و فسر النتيجتين بيانيا.

د/ شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أنشئ (Γ).

(بأخذ $\alpha\cong 0,26$)

حل التمرين 02 :

1) أ/ بقراءة بيانية تشكيل جدول تغيرات g :

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$\|$ -2	↗	$+\infty$

تحديد $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$: $g(0)=-1$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)>0$

ب/ تعليل وجود عدد حقيقي α من $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ حيث $g(\alpha)=0$:

لدينا g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$

و $g(0)\times g\left(\frac{1}{2}\right)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ حيث :

ج/ تعيين إشارة $g(x)$:

$g(x)<0$ من أجل $x\in]-1,\alpha[$

و $g(x)>0$ من أجل $x\in]\alpha,+\infty[$ و $g(\alpha)=0$

2/ أ/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

لدينا الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ تعيين $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ دون حساب :

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3}=0$$

تفسير النتيجة : (Γ) يقبل مماس يوازي محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α .

ج/ حساب النهايتين :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=+\infty$ لأن : $\begin{cases}x^3+3x^2+3x+2\to 1\\(x+1)^2\to 0^+\end{cases}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)\right]$$

$$=1\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

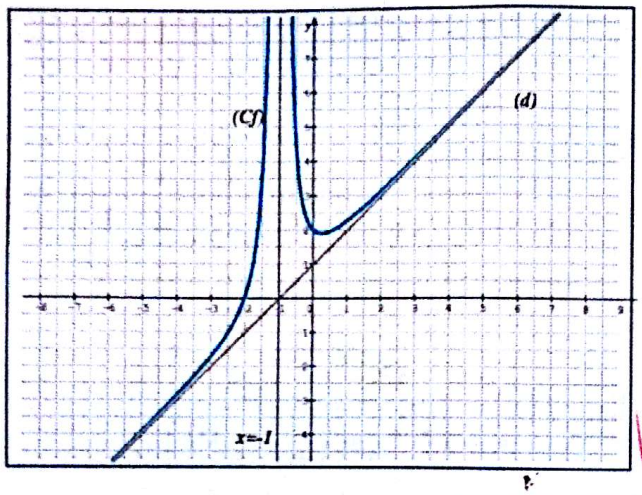
التفسير : (Γ) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-1$ و مستقيم مقارب مائل (d) معادلته $y=x+1$ عند $+\infty$.

د/ جدول تغيرات f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ‖	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

بأخذ $f(\alpha)\cong 1{,}89$ $\quad\alpha\cong 0{,}26$

رسم (Γ) :



التمرين 03 :

1) f دالة معرفة على IR بـ : $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+5}{x^2+2x+10}$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) f دالة معرفة على $IR-\{2\}$ بـ : $f(x)=\frac{1-\sqrt{x^2+4}}{x-2}$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) f دالة معرفة على IR بـ : $f(x)=5x+\sqrt{x^2+1}$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) f دالة معرفة على IR بـ : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}$

أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

حل التمرين 03 :

1) حالة عدم تعيين من الشكل $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}$

(لإزالة حالة عدم التعيين نستعمل أكبر حد كعامل في البسط و المقام)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+5}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+5}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+5}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{5}{x}\right]}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+5}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{5}{x}\right]}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{5}{x}\right]}{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{10}{x^2}\right)} = 0$$

2) حالة عدم تعيين من الشكل $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-\infty}{+\infty}$

لإزالة حالة عدم التعيين $\frac{-\infty}{+\infty}$ نستعمل أكبر حد كعامل مشترك في البسط و المقام .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right]}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}} = -1$$

(لأن $-1 \to$ البسط و $1 \to$ المقام)

حالة عدم التعيين من الشكل $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-\infty}{-\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}} = 1$$

3) $f(x) = 5x+\sqrt{x^2+1}$

حالة عدم تعيين من الشكل $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 5x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 5x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 5x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left[5-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

4) $f(x) = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}$

حالة عدم تعيين من الشكل $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty-\infty$

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - |x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - (-x)\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\left[-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{x+\frac{4}{x^2}}\right]$$

$$= FI$$

(حالة عدم تعيين من الشكل $0\times\infty-$)

ملاحظة :

(طريقة العامل المشترك لا تنفعنا في هذا المثال ، نستعمل طريقة المرافق)

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+4}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}^2 - \sqrt{x^2+4}^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty} \frac{(x^2+1)-(x^2+4)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+4}} = 0$$

التمرين 04:

باستعمال قابلية الاشتقاق أحسب نهايات الدوال التالية عندما ينتهي المتغير x إلى العدد الحقيقي a .

1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1}$ $\quad a=1$

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ $\quad a=0$

3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\quad a=0$

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x}-2}{x-1}$ $\quad a=\dfrac{\pi}{3}$

حل التمرين 04 :

1) نضع : $h(x)=\sqrt{x^2+3x}$ و $h(1)=2$ الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و $]0,+\infty[\in 1$

و منه : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'(1)$

حيث : $h'(x)=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$ و عليه : $h'(1)=\dfrac{5}{4}$

$$\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2}{x-1} = h'(1) = \frac{5}{4}$$

2) نضع : $h(x)=\sqrt{x+1}$ و $h(0)=1$ الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]-1,+\infty[$ و $]-1,+\infty[\in 0$

و منه : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(0)$

حيث : $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ و عليه : $h'(0)=\dfrac{1}{2}$

و نلاحظ أن :

$$\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = h'(0) = \frac{1}{2}$$

3) نضع : $h(x)=\sin x$ و $h(0)=0$ الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال IR و $IR\in 0$

و منه : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(0)$

حيث : $h'(x)=\cos x$ و عليه : $h'(0)=1$

و نلاحظ أن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

4) نضع : $h(x)=\sqrt{2+2\cos x}$

و $h\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال IR

و $\dfrac{\pi}{3}\in IR$

و منه : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=h'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

حيث : $h'(x)=\dfrac{-2\sin x}{2\sqrt{2+2\cos x}}$

و عليه : $h'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$

و نلاحظ أن :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{2+2\cos x}-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{2}$$

التمرين 05:

لتكن f دالة عددية معرفة وقابلة للاشتقاق على R لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$\frac{7}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	2

تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل:

$f(x)=a+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$ حيث a,b,c أعداد حقيقية ثابتة

1) أحسب $f'(x)$ بدلالة a,b و c.

2) اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f عين:

أ- صورتي العددين -1 و 1 بالدالة f.

ب- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا.

ج- إشارة $f(x)$ حسب قيم x.

د- عبارة الدالة $f(x)$.

3) نأخذ فيما يلي: $a=2$ ، $b=-3$ ، $c=0$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f.

أ- بين أن : $f'(x)=\dfrac{3x^2-3}{(x^2+1)^2}$.

ب- أدرس إشارة $f'(x)$.

ج- هل النتيجة تتوافق مع جدول تغيرات الدالة f ؟

د- عين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=2$

ثم أرسم (C_f) في معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

حل التمرين 05 :

1) عبارة $f'(x)$:

من أجل كل x من R :

$$f'(x)=0+\frac{b(x^2+1)-2x(bx+c)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-bx^2-2cx+b}{(x^2+1)^2}$$

2) أ/ من خلال جدول التغيرات :

$f(1)=\dfrac{1}{2}$ و $f(-1)=\dfrac{7}{2}$.

ب/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

ومنه : (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=2$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

جـ/ إشارة $f(x)$:

من خلال جدول تغيرات f نستنتج :

قيم x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة $f(x)$	+	

د/ عبارة الدالة f :

- $f(-1)=\frac{7}{2}$ أي $a+\frac{-b+c}{2}=\frac{7}{2}$

أي $2a-b+c=7$

- $f(1)=\frac{1}{2}$ أي $a+\frac{b+c}{2}=\frac{1}{2}$

أي $2a+b+c=1$

- $f'(-1)=0$ أي $-b+2c+b=0$ أي $c=0$.

بتعويض قيمة $c=0$ في المعادلات (1) و (2) نجد :

$\begin{cases}2a-b=7\\2a+b=1\end{cases}$ بالجمع نجد : $4a=8$ ومنه $a=2$.

بتعويض قيمة a في $2a+b=1$ نجد $b=-3$.

ومنه : $f(x)=2-\frac{3x}{x^2+1}$

3) أ/ لدينا : $f(x)=2-\frac{3x}{x^2+1}$

من أجل كل x من R :

$$f'(x)=0-\frac{3(x^2+1)-2x(3x)}{x^2+1}$$

$$=-\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^2-3}{(x^2+1)^2}$$

ب/ دراسة إشارة $f'(x)$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب .

قيم x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
إشارة $3x^2-3$	+	0	−	0	+
إشارة $f'(x)$	+	0	−	0	+

ج/ النتيجة تتوافق مع جدول تغيرات الدالة f .

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{3x}{x^2}\right)=2$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3x}{x^2}\right)=2$

و : $f(-1)=\frac{7}{2}$ ، $f(1)=\frac{1}{2}$

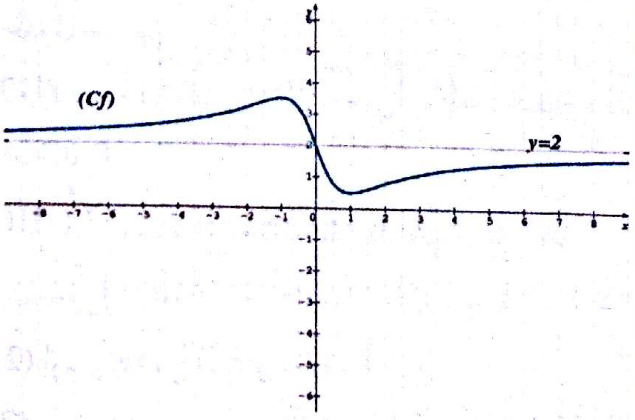
د) تعيين نقط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ) : $\begin{cases}y=f(x)\\y=2\end{cases}$

ومنه: $f(x)=2$ معناه : $2-\frac{3x}{x^2+1}=2$

أي : $-\frac{3x}{x^2+1}=0$ ومنه : $x=0$

معناه : $(C_f)\cap[y=2]=\{(0;2)\}$

● إنشاء (C_f)



التمرين 06:

f دالة عددية معرفة على $IR-\{-1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$$

و يرمز بـ (C_f) إلى المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) 1) عين الأعداد الحقيقية a,b,c بحيث يكون من أجل كل x من $IR-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$;

2) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

3) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب يطلب تعيين معادلته.

4) أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

5) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

II) 1) أثبت أنه من أجل كل x من f'

$IR-\{1\}: f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ هي الدالة المشتقة للدالة f.

2) عين اتجاه تغير الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها و شكل جدول تغيراتها.

3) أكتب معادلة المماس (D) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

III) 1) أثبت أن النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

2) أرسم كلا من (Δ) و (D) و (C_f).

3) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة : $f(x)=m$ حلان مختلفان.

حل التمرين 06 :

I) 1) تعيين الأعداد الحقيقية a,b,c حيث :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

$$=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}$$

$$=\frac{ax^2+bx+ax+b+c}{x+1}$$

$$=\frac{ax^2+(b+a)x+b+c}{x+1}$$

و عليه $\begin{cases}a=1\\ b+a=0 \quad ; \quad b=-1\\ b+c=3 \quad ; \quad c=4\end{cases}$

و منه : $f(x)=x-1+\frac{4}{x+1}$

2) حساب النهايات على أطراف مجموعة تعريف f :

$$D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=+\infty$

$\lim_{x\to-1} f(x)=+\infty$ (البسط $\to 4$ و المقام $\to 0^+$)

$\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$ (البسط $\to 4$ و المقام $\to 0^-$)

3) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب : لدينا : $\lim_{x\to-1} f(x)=\infty$

و عليه فإن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=-1$.

4) إثبات أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل :

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-y)=\lim_{|x|\to+\infty}x-1-\frac{4}{x+1}-(x-1)$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{4}{x+1}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{4}{x}=0$$

و منه (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

5) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{4}{x+1}$$

قيم x	$-\infty$		-1		$+\infty$
إشارة $x+1$	$-$	$\|$	0	$+$	
إشارة $f(x)-y$	$-$	$\|$	$\|\|$	$+$	
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)	تحت		$\|\|$	فوق	

(II) 1) إثبات أنه من أجل كل x من $IR-\{1\}$:

$$f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

لدينا f قابلة للاشتقاق على $IR-\{1\}$ و :

$$f'(x)=\frac{(2x)(x+1)-(1)(x^2+3)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

2) ندرس إشارة $f'(x)$:

قيم x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
إشارة $(x-1)$	$-$		$-$		$-$	$\|$	0	$+$	
إشارة $x+3$	$-$		0	$+$		$+$		$+$	
إشارة $(x+1)^2$	$+$			$+$	$\|$	$+$		$+$	
إشارة $f'(x)$	$+$		0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

و منه : f متزايدة لما $x\in]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$

و f متناقصة لما $x\in[-3;-1[\cup]-1;+1]$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

معادلة المماس (D) : $f'(0)=-3$ و $f(0)=3$

ومنه $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه: $y=-3x+3$

(III)

1) إثبات أن النقطة $A(-1;-2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

$A(-1;-2)$ مركز تناظر لـ (C_f) إذا تحقق ما يلي :

- من أجل كل $x\in D_f$ فإن $(2(-1)-x)\in D_f$
- $f(2(-1)-x)+f(x)=2(-2)$

لدينا من أجل كل $x\in D_f$: $x\in IR-\{-1\}$

أي : $x\neq-1$

فإن: $x\neq1-$ ومنه : $-2-x\neq-1$

أي : $(-2-x)\in IR-\{1\}$

لدينا :

$$f(-2-x)+f(x)=\frac{(-2-x)^2+3}{-2-x+1}+\frac{x^2+3}{x+1}$$

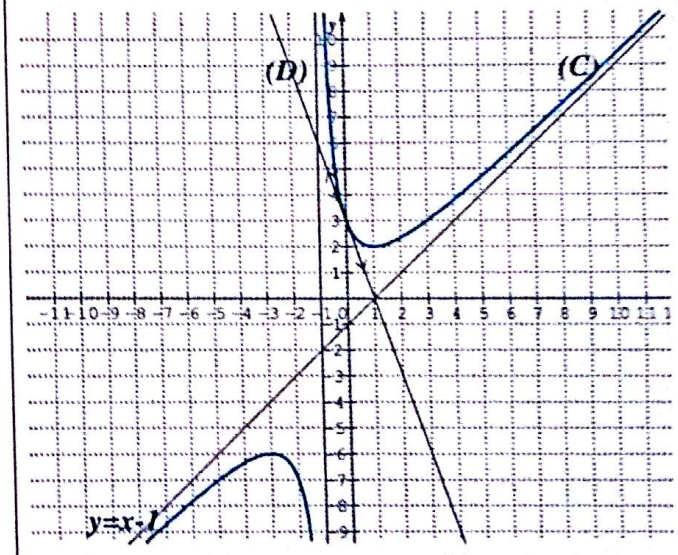
$$=\frac{4+4x+x^2+3}{-x-1}+\frac{x^2+3}{x+1}$$

$$=\frac{-4x-4}{x+1}$$

$$=\frac{-4(x+1)}{x+1}=-4$$

و منه $A(-1;-2)$ مركز تناظر لـ (C_f)

2) إنشاء كلا من (Δ) و (D) و (C_f) :



3) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة :

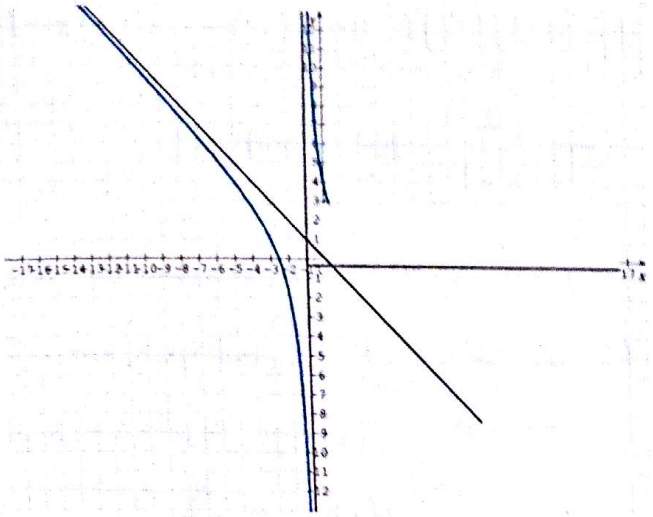
$f(x)=m$ حلان مختلفان (بيانيا) :

حلول المعادلة $f(x)=m$ بيانيا هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الموازي لمحور الفواصل الذي معادلته $y=m$ ومنه: تقبل المعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان لما: $m\in]-\infty;-6[\cup]2;+\infty[$.

التمرين 07:

❶ f دالة معرفة على $]-1;0[\cup]-\infty;-1[=I$ بـ :

$f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل .



1) أ/ أحسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I .

ب/ بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات f شكل جدول تغيراتها .

2) g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$

و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .

أ/ أحسب نهاية g عند $+\infty$.

ب/ تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلته .

جـ/ أدرس تغيرات g .

❷ k دالة معرفة على $R-\{-1\}$ كما يلي : $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ و $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$

ماذا تستنتج :

ب/ أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

2) أكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

3) أرسم (Δ_1) و (Δ_2) و (C_k) .

حل التمرين 07 :

❶ 1) أ/ $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$ معرفة على:

$]-\infty;-1[\cup]-1;0[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(-x+\frac{4}{x+1}\right)=4$$ و

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=-\infty$$

ب) جدول تغيرات الدالة f :

قيم x	$-\infty$		-1		0
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	‖	↘	4
		$-\infty$	‖	$+\infty$	

2) g دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=x+\frac{4}{x+1}$$

أ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{4}{x+1}\right)=+\infty$

ب/ لدينا : $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4}{x+1}\right)=0$

ومنه : $y=x$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ (C_g) بجوار $+\infty$.

جـ/ من أجل كل عدد حقيقي من المجال : $]0;+\infty[$

$$g'(x)=1+\frac{-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب .

جدول إشارة $g'(x)$:

قيم x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$+$	‖	$+$	
إشارة: $g'(x)$		$-$	‖	$+$	

جدول تغيرات g:

قيم x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	4	↘	3	↗	$+\infty$

❷ k دالة معرفة على $R-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1) أ/ حساب : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{h^2-3h}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{h(h-3)}{h(h+1)}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ >}}\frac{h-3}{h+1}=-3$$

حساب : $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{-h^2-5h}{h(h+1)}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{h(-h-5)}{h(h+1)}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ <}}\frac{-h-5}{h+1}=-5$$

بما أن : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k(h)-k(0)}{h} \neq \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$

نستنتج أن الدالة k غير قابلة للاشتقاق عند 0 .

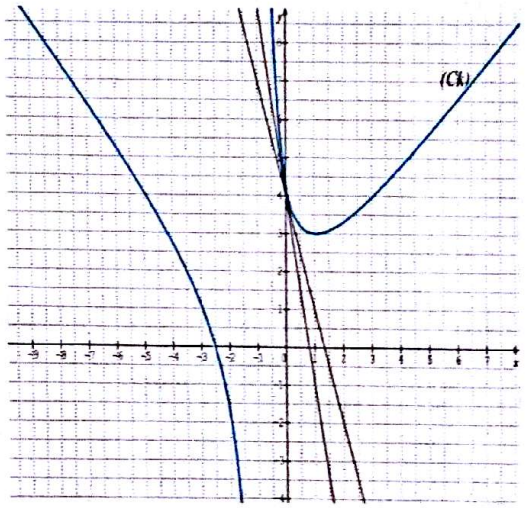
ب/ النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة زاوية و (C_k) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 0 ميلاهما 3- و5- .

2) معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها 0:

معادلة (Δ_1): $y=k'(0)(x-0)+k(0)$ ومنه: $y=-3x+4$

معادلة (Δ_2): $y=k'(0)(x-0)+k(0)$ ومنه: $y=-5x+4$

3) إنشاء (Δ_1) و (Δ_2) و (C_k) :



التمرين 08:

لتكن الدالة f المعرفة على $R-\{0\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^3+3x-1}{3x^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ و 0

ثم استنتج أن (C_f) يقبل مقاربين أحدهما مائل معادلته.

$$y=\frac{1}{3}x$$

2) أثبت أنه من أجل كل x من D_f فإن : $f'(x)=\dfrac{(x+2)(x-1)^2}{3x^3}$ ، ثم أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{3}$.

4) أنشئ (C_f) في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

5) لتكن الدالة g حيث : $g(x)=|f(x)|$

أ/ أكتب عبارة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .

ب/ كيف يتم رسم المنحنى (Cg) الممثل للدالة g باستعمال المنحنى (Cf) ؟ علل ثم أنشئ (Cg).

6) لتكن الدالة h حيث : $h(x)=f(|x|)$

أ/ بين أن h دالة زوجية .

ب/ كيف يتم رسم المنحنى (Ch) الممثل للدالة h باستعمال المنحنى (Cf) ؟ علل ثم أنشئ (Ch).

حل التمرين 08 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{3}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{3}=-\infty$

($\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$)

$x^3+3x-1\to -1$

$3x^2\to 0^+$

و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$

و عليه فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ يقبل (C_f) مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته $x=0$.

إثبات أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=\frac{1}{3}x$ مستقيم مقارب مائل : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}(f(x)-y)$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x^3+3x-1}{3x^2}-\frac{1}{3}x=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x-1}{3x^2}=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{3x-1}{3x^2}$$

قيم x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
إشارة $3x-1$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
إشارة $f(x)-y$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)		تحت	$\|$	تحت	Δ	فوق	

2) من أجل كل x من D_f :

$$f'(x)=\frac{(3x^2+3)(3x^2)-(6x)(x^3+3x-1)}{(3x^2)^2}$$

$$=\frac{9x^4+9x^2-6x^4-18x^2+6x}{9x^4}$$

$$=\frac{3x^4-9x^2+6x}{9x^4}$$

$$=\frac{3x^3-3x+2}{3x^3}=\frac{(x+2)(x-1)^2}{3x^3}$$

ندرس إشارة $f'(x)$:

قيم x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
إشارة $(x-1)^2$		$+$		$+$	$\|$	$+$	0	$+$	
إشارة $x+2$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$		$+$	
إشارة $3x^3$		$-$		$-$	$\|$	$+$		$+$	
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	

ومنه: f متزايدة على المجالات $]-\infty;-2]$ و $[0;+\infty[$

و متناقصة لما $x\in[-2;0[$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$	↘	$-\infty$	↗	$-\frac{5}{4}$	↗	$+\infty$

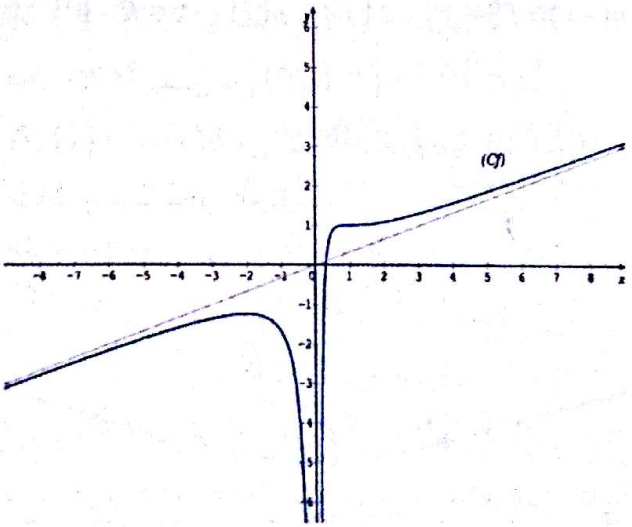
3) لدينا f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $\left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)\times f\left(\frac{1}{3}\right)<0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من $\left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[$ حيث: $f(\alpha)=0$.

أي (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث: $\frac{1}{4}<\alpha<\frac{1}{3}$.

4) إنشاء (C_f):



5) لتكن الدالة g حيث : $g(x)=|f(x)|$

أ/ كتابة عبارة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة :

$g(x)=f(x)$ إذا كان $f(x)\geq 0$ أي $x\in[\alpha;+\infty[$

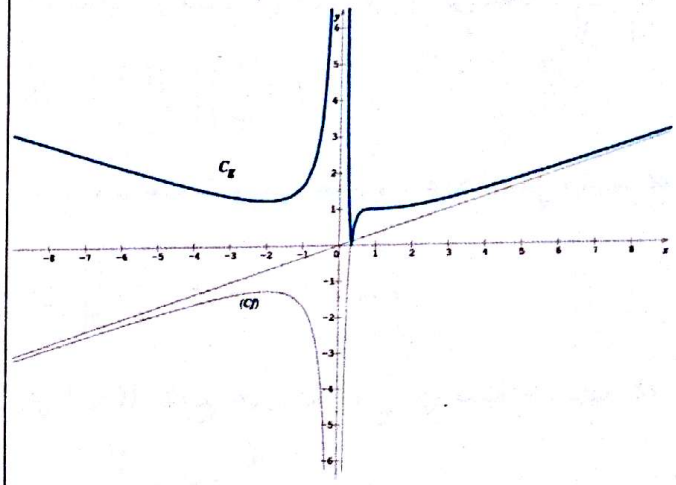
و $g(x)=-f(x)$ إذا كان $f(x)\leq 0$

أي $x\in]-\infty;0[\cup]0;\alpha]$

ب/ (Cg) ينطبق على (Cf) لما $x\in[\alpha;+\infty[$

(Cg) هو نظير (Cf) بالنسبة لمحور الفواصل لما $x\in]-\infty;0[\cup]0;\alpha]$

إنشاء (Cg) :



6) لتكن الدالة h حيث : $h(x)=f(|x|)$

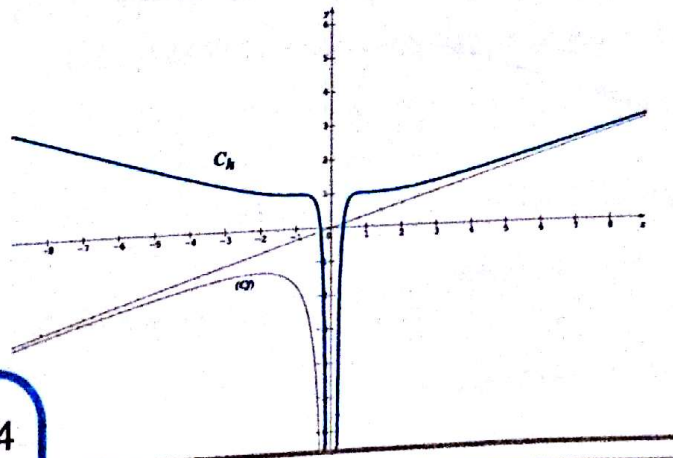
أ/ إثبات أن h دالة زوجية : من أجل كل x من $R-\{0\}$

فإن: $-x\in R-\{0\}$ و $h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$

ب/ (Ch) ينطبق على (Cf) لما $x\in]0;+\infty[$

لأن $h(x)=f(x)$ وبما أن h دالة زوجية فإن (Ch) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

إنشاء (Ch) :



التمرين 09:

f دالة معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1) أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ جدول تغيراتها .

2) برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\propto$ حيث $\propto\in]1;2[$

حل التمرين 09 :

1) دراسة التغيرات: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-\sqrt{x}=-\infty$

f مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $]1;+\infty[$ إذن: f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$

حيث: $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=-1\times\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

إذن: من أجل كل من x من $]1;+\infty[$: $f'(x)<0$

ومنه: f متناقصة على المجال $]1;+\infty[$

جدول التغيرات:

قيم x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

2) f مستمرة على $[1;2]$ و متناقصة تماما على $[1;2]$

و $f(2)=\frac{1}{2-1}-\sqrt{2}=1-\sqrt{2}$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

أي : $f(2)\times\lim\limits_{x\to 1} f(x)<0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\propto$ من المجال $[1;2]$ يحقق $f(\propto)=0$

التمرين 10 :

f دالة معرفة على المجموعة D_f بـ :

$D_f =]-\infty;-4] \cup [0;+\infty[$ مع $f(x) = x+1+\sqrt{x^2+4x}$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) بين أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x+3$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

3) هل f قابلة للاشتقاق عند 0 ؟ -4 ؟

4) أحسب $f'(x)$ من أجل $x \in D_f - \{0;-4\}$.

5) أنشئ جدول تغيرات الدالة f ثم للمنحنى (C).

حل التمرين 10 :

1) ح ع ت من الشكل :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+1+\sqrt{x^2+4x} = -\infty+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x+1\sqrt{x^2+4x}\right)\times\frac{x+1-\sqrt{x^2+4x}}{x+1-\sqrt{x^2+4x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2x-1-x^2-4x}{x+1-\sqrt{x^2+4x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x+1}{x+1-|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x\left(1-\frac{1}{2x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right)} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x+1+\sqrt{x^2+4x} = +\infty$$

2) $\lim_{x\to+\infty} [f(x)-(2x+3)]$

$$= \lim_{x\to+\infty} x+1+\sqrt{x^2+4x}-2x-3$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x}-(x+2)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2+4x}-(x+2)\right]\times\frac{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x-(x^2+4x+4)}{\sqrt{x^2+4x}+x+2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)} = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x+3$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

3) لا يمكن لـ f أن تكون قابلة للاشتقاق عند 0 لأنها ليست معرفة على يسار 0.

لا يمكن لـ f أن تكون قابلة للاشتقاق عند -4 لأنها ليست معرفة على يمين -4

4) من أجل $x \in D_f - \{0;-4\}$:

$$f'(x) = 1+\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}} = 1+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$$

5) إشارة $f'(x)$: على المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $x+2>0$

إذن : $1+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} > 0$ أي $f'(x) > 0$

على المجال $]-\infty,-4[$ لدينا : $f'(x) \geq 0$

$$1+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq -\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{x^2+4x+4}{x^2+4x} \Leftrightarrow 1 \geq \left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}\right)^2$$

لأن الطرفين موجبين لما $x \in]-\infty,-4[$

$\Leftrightarrow x^2+4x \geq x^2+4x+4$

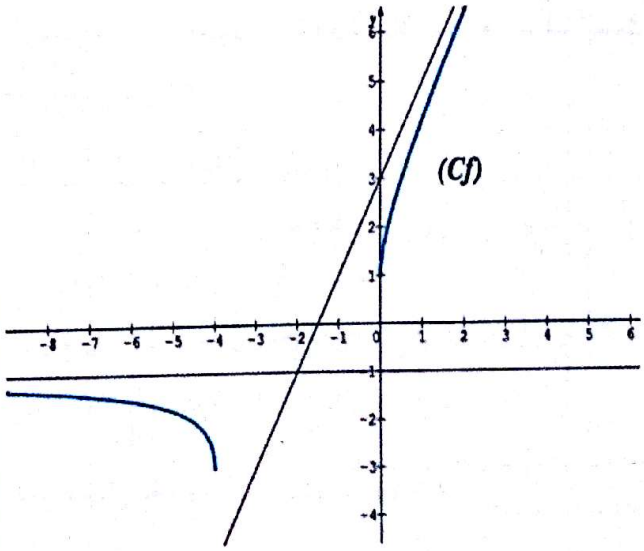
$\Leftrightarrow 0 \geq 4$ مستحيل.

إذن على المجال $]-\infty,-4[$ لا يمكن أن يكون $f'(x) \geq 0$ أي $f'(x) < 0$.

منه جدول تغيرات الدالة f :

قيم x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	‖	‖	$+$	0	
$f(x)$	-1 ↘		‖	‖	↗		$+\infty$
		-3	‖	‖		1	

الإنشاء:



التمرين 11 :

f دالة معرفة على $]0;1[$ بـ: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$ نسمي (C) منحاها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) هل الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 ؟

2) أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة $1/2$

4) أرسم في نفس المعلم كل من (T) و (C) .

حل التمرين 11 :

1) الدالة f ليست معرفة على يسار 0 إذن: f ليست قابلة للاشتقاق عند 0 .

2) f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0;1[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=\left(\frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}\right)\times\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}}$$

$$=\frac{x^2(3-2x)}{2x(1-x)^2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}\times\frac{1}{2x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

لأن $x>0$ إذن $\sqrt{x^3}=x\sqrt{x}$ ومنه: $f'(x)=\dfrac{x(3-2x)}{2(1-x)^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

إذن إشارة $f'(x)$ على $]0;1[$ هي إشارة $3-2x$ لأن : $x>0$

و $(1-x)^2>0$ و $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}>0$ منه جدول إشارة $f'(x)$:

قيم x	0		1
إشارة $f'(x)$	‖	$+$	

منه جدول تغيرات الدالة f على $]0;1[$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

قيم x	0		1
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	0 ↗		$+\infty$

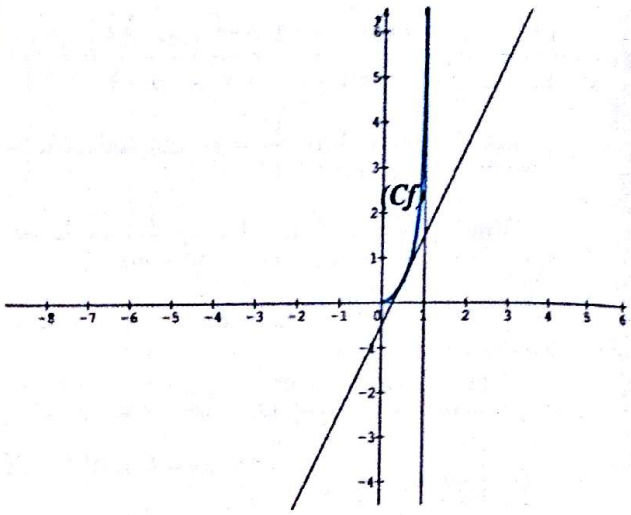
3) معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $1/2$ تكتب من الشكل $y=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}(3-1)}{2\left(1-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{1/2}}=\frac{1}{2(1/4)}\sqrt{1}=2$$

و $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1/8}{1/2}}=\sqrt{1/4}=1/2$

منه معادلة (T) : $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$ أي: $y=2x-\frac{1}{2}$

4)الإنشاء:



التمرين 12 :

❶ نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$f(x)=\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) عين D_f ثم أحسب النهايات على أطراف مجموعة التعريف المفتوحة واستنتج معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)

2) أدرس تغيرات الدالة f وأنشئ جدول تغيراتها .

3) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 5.

4) أثبت أن المستقيم $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_f) .

❷ نعتبر الدالة $f_m(x)=\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}$ حيث (m وسيط حقيقي) ونرمز لـ (C_m) إلى المنحنى الممثل للدالة f_m .

1) أوجد D_{f_m} مجموعة تعريف الدالة f_m .

2) تحقق أنه من أجل كل $x\in D_{f_m}$: $f(x)=1-\frac{12}{x^2-mx-3}$

ثم أحسب النهايات للدالة f على الأطراف المفتوحة لـ D_{f_m}

3) أدرس تغيرات الدالة f_m .

4) بين أنه توجد نقطة ثابتة تنتمي لكل المنحنيات (C_m) .

5) ماهو المنحنى (C_m) الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيات $(4;1)$.

6) أنشئ (C_f) .

حل التمرين 12 :

1) تعين مجموعة تعريف f : f معرفة إذا كان :

$x^2-2x-3\neq 0$ وعليه: $x_1=-1$ و $x_2=3$

ومنه : $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$

حساب النهايات : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل معادلته $y=1$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=-\infty$ $\left(x^2-2x-3\to 0^+;\ x^2-2x-15\to -12\right)$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty$ $\left(x^2-2x-3\to 0^-;x^2-2x-15\to -12\right)$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي على محور الفواصل معادلته $x=-1$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}3} f(x)=+\infty$

$\left(x^2-2x-3\to 0^-\ ;\ \ x^2-2x-15\to -12\right)$

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3} f(x)=-\infty$

$\left(x^2-2x-3\to 0^+\ ;\ \ x^2-2x-15\to -12\right)$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي على محور الفواصل معادلته $x=3$

2) دراسة تغيرات f : عبارة $f'(x)$: من أجل كل $x\in D_f$:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(x^2-2x-15)}{(x^2-2x-3)^2}$$

$$=\frac{(2x-2)(x^2-2x-3-x^2+2x+15)}{(x^2-2x-3)^2}=\frac{24(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$$

إشارة $f'(x)$:

قيم x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$	

وعليه f متزايدة على المجالات $[1;3]$ و $]3;+\infty[$

و f متناقصة على المجالات $]-\infty;-1]$ و $[-1;1]$.

جدول تغيرات f :

قيم x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	1	$+\infty$		$+\infty$		$-\infty$	1
	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$
	$-\infty$		4				

3) معادلة المماس (Δ) :

$$y=f'(5)(x-5)+f(5) \qquad f'(5)=\frac{2}{3} \quad و \quad f(5)=0$$

$y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$ هي معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 5 .

4) إثبات أن المستقيم $x=1$ محور تناظر لـ (C_f) :

ليكن $x\in D_f$ فإن $2-x\in D_f$.

ولدينا :

$$f(2-x)=\frac{(2-x)^2-2(2-x)-15}{(2-x)^2-2(2-x)-3}$$

$$=\frac{4-4x+x^2-4+2x-15}{4-4x+x^2-4+2x-3}$$

$$=\frac{x^2-2x-15}{x^2-2x-3}=f(x)$$

ومنه: فالمستقيم الذي معادلته $x=1$ محور تناظر لـ (C_f) .

❷ 1) f_m معرفة إذا كان : $x^2-mx-3\neq 0$ ، $\Delta=m^2+12>0$

ومنه : $x_1=\frac{m-\sqrt{m^2+12}}{2}$ ، $x_2=\frac{m+\sqrt{m^2+2}}{2}$

$D_{f_m}=]-\infty;x_1[\cup]x_1;x_2[\cup]x_2;+\infty[$

2) التحقق أن $f_m(x)=1-\frac{12}{x^2-mx-3}$

$$1-\frac{12}{x^2-mx-3}=\frac{x^2-mx-3-12}{x^2-mx-3}=\frac{x^2-mx-15}{x^2-mx-3}=f_m(x)$$

حساب النهايات : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f_m(x)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}x_1} f_m(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}x_1}1-\frac{12}{x^2-mx-3}=-\infty$$

لأن : $\left(x^2-mx-3\to 0^-\right)$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}x_1} f_m(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}x_1}1-\frac{12}{x^2-mx-3}=+\infty$$

لأن : $\left(x^2-mx-3\to 0^+\right)$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}x_2} f_m(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}x_2}1-\frac{12}{x^2-mx-3}=+\infty$$

لأن : $\left(x^2-mx-3\to 0^-\right)$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}x_2} f_m(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}x_2}1-\frac{12}{x^2-mx-3}=+\infty$$

لأن : $\left(x^2-mx-3\to 0^+\right)$

3) دراسة تغيرات f_m :

$$f_m'(x)=\left(1-\frac{12}{x^2-mx-3}\right)=12\cdot\frac{2x-m}{\left(x^2-mx-3\right)^2}$$

إشارة f'_m :

قيم x	$-\infty$	x_1		$\frac{m}{2}$		x_2	$+\infty$
إشارة $f_m'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$	

وعليه f_m متزايدة على المجالات $\left[\frac{m}{2};x_2\right[$ و $\left]\frac{x}{2};+\infty\right[$.

و f متناقصة على المجالات $]-\infty;x_1[$ و $\left[x_1;\frac{m}{2}\right]$.

جدول تغيرات f_m :

قيم x	$-\infty$		x_1		$\frac{m}{2}$		x_2		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	
$f_m(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$	$\searrow$	$f_m\left(\frac{m}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$	1

4) إثبات وجود نقطة ثابتة تنتمي لكل المنحنيات (C_m) لتكن

$M_0(x_0;y_0)$ من (C_m) $\quad y_0=\dfrac{x_0^2-mx_0-15}{x_0^2-mx_0-3}$

$$y_0x_0^2-my_0x_0-3y_0=x_0^2-mx_0-15$$

$$m(-y_0x_0+x_0)+y_0x_0^2-3y_0-x_0^2+15=0 \quad m\in R \text{ (من أجل كل}$$

فإن :
$$\begin{cases}-y_0x_0+x_0=0.....(1)\\ y_0x_0^2-3y_0-x_0^2+15=0.....(2)\end{cases}$$

من (1) : $x_0(-y_0+1)=0$ ومنه $x_0=0$ أو $y_0=1$

نعوض $x_0=0$ في المعادلة (2) نجد : $y_0=5$ ونعوض $y_0=1$

في المعادلة (2) نجد: $x_0^2-x_0^2+12=0$

لاتقبل(حلول) .ومنه : $M_0(0;5)$

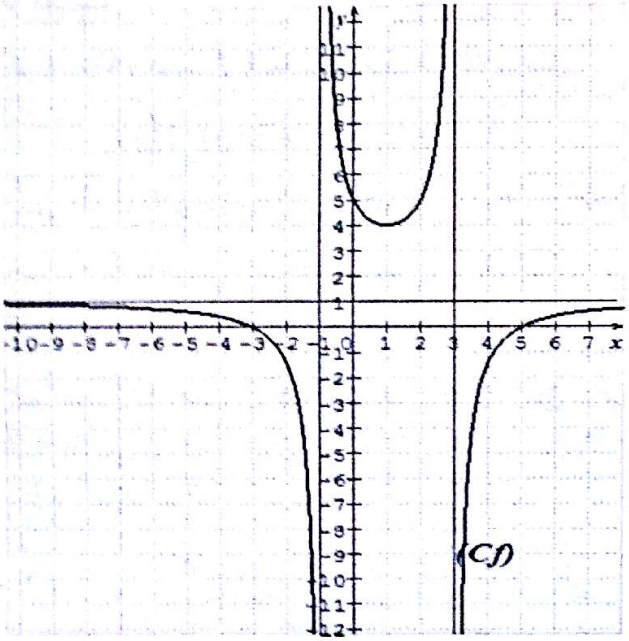
5) تعيين m بحيث النقطة $A(4;1)$ تنتمي للمنحنى (C_m)

$$4=\frac{(1)^2-m(1)-15}{(1)^2-m(1)-3} \text{ أي: } 4=\frac{-m-14}{-m-2}$$

ومنه $-4m-8=-m-14$ ومنه $-3m=-6$ ومنه $m=2$

فالمنحنى الذي يشمل النقطة $A(4;1)$ هو المنحنى (C_2).

6) الإنشاء :



الـــدوال الأسيـــة واللـــوغاريتميـــة

*الدالة الأسية النيبيرية ذات الأساس e :

■ تعريف :

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على R وتحقق

$$f'(x)=f(x) \quad و \quad f(0)=1$$

تسمى الدالة الآسية ذات الأساس e ونرمز لها بالرمز: $x\mapsto e^x$

حيث e عدد حقيقي ثابت قيمته التقريبية : $e\approx 2,718$

■ خواص :

من أجل كل عددين حقيقيين x و y و n عدد صحيح كيفي:

1) $e^{x+y}=e^x\times e^y$ ، 2) $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$ ،

3) $\frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}$ ، 4) $\left(e^x\right)^n=e^{n.x}$ ، 5) $e^0=1$ ،

6) $e^1=e$

■ إشارة و اتجاه تغير الدالة الآسية :

1) الدالة الآسية ذات الأساس e موجبة تماما على R

2) من أجل كل x من R فإن: $f'(x)=f(x)$

أي : $\left(e^x\right)'=e^x$ ومنه الدالة الآسية ذات الأساس e متزايدة تماما على R .

ولدينا : من أجل كل عددين حقيقيين x و y من R .

- إذا كان : $x=y$ يعني : $e^x=e^y$
- إذا كان : $x>y$ يعني : $e^x>e^y$
- إذا كان : $x>0$ يعني : $e^x>1$
- إذا كان : $x<0$ يعني : $0<e^x<1$

■ النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty \quad و \quad \lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad و$$

تمرين تطبيقي

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=e^{2x}-e^x$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) تحقق أن:

$f'(x)=e^{2x}(1-e^{-x})$ ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

الحل:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}-e^x=0$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

2) لدينا: $f(x)=e^{2x}-e^{2x}.e^{-x}=e^{2x}(1-e^{-x})$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}(1-e^{-x})=+\infty$

لأن: $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\right)$

■ التزايد المقارن :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ بشكل عام لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$

حيث $\left(n\in N^*\right)$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^x=0$ بشكل عام لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n.e^x=0$

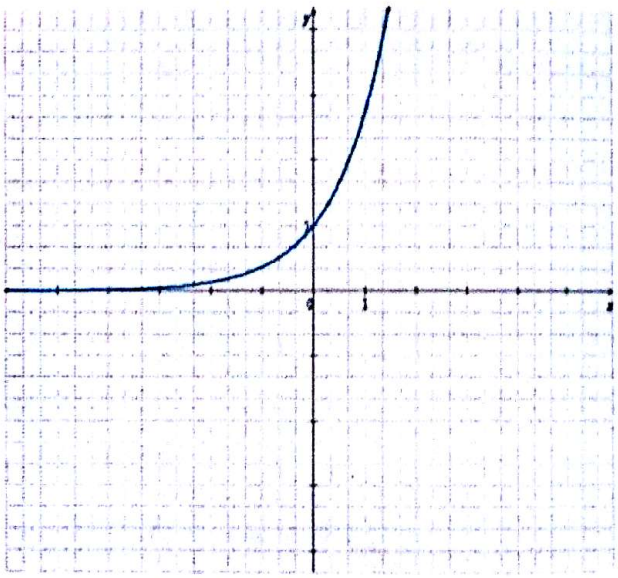
حيث $\left(n\in N^*\right)$

■ التمثيل البياني للدالة : $f(x)=e^x$ المعرفة على R

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	0	↗	$+\infty$

الإنشاء البياني :



■ دراسة الدالـة : $x \longmapsto e^{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من R

فإن الدالة $x \longmapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ومن أجل كل عدد حقيقي من I فإن :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).e^{u(x)}$$

أمثلة :

1) $f(x)=e^{x^2-3x+1} \rightarrow f'(x)=(2x-3).e^{x^2-3x+1}$ على R

2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}} \longrightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}$ على R^*

مثال تطبيقي:

دراسة تغيرات الدالة : $f(x)=x.e^{-x}$ على المجال R

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$

$\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\right)$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=-\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+\right)$

عبارة $f'(x)$ و إشارتها :

من أجل كل $x\in R$: $f'(x)=\frac{1.e^x-e^x.x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة العبارة : $1-x$ (لأن : $e^x>0$)

جدول تغيرات f :

قيم x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

■ حل المعادلات من الشكل : $(e^x=a)$ حيث a عدد حقيقي ثابت .

1) $e^x=a$: $a\le 0$ (مستحيلة)

2) $e^x=a$: $a>0$ معناه $x=\ln a$

تمرين تطبيقي:

حل في R المعادلات التالية:

1) $2e^x+6=0$ ، 2) $e^{x-1}-1=0$ ،

3) $e^{x-1}-e^{2x}=0$ ، 4) $e^{2x}-2e^x+1=0$

الحل:

1) $2e^x+6=0$ ومنه $e^x=-3$ مستحيل لأن e^x دوما موجب وعليه مجموعة حلول المعادلة هي مجموعة خالية .

2) $e^{x-1}-1=0$ ومنه $e^{x-1}=1$ ومنه $e^{x-1}=e^0$

ومنه $x-1=0$ أي $x=1$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{1\}$.

3) $e^{x-1}-e^{2x}=0$ ومنه $e^{x-1}=e^{2x}$

ومنه $x-1=2x$ ومنه $x-2x=1$ ومنه $-x=1$

أي: $x=-1$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{-1\}$.

4) $e^{2x}-2e^x+1=0$

$(e^x)^2-2\times1\times e^x+(1)^2=0$

ومنه : $(e^x-1)^2=0$ وعليه فإن: $e^x-1=0$

ومنه $e^x=1$ ومنه : $e^x=e^0$ وعليه: $x=0$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{0\}$.

تمرين تطبيقي:

حل في R المتراجحات التالية:

1) $e^{x-1}-e^{-2x+3}\geq0$

2) $(e^x-2)(e^x+1)\geq0$

3) $e^{2x}-5e^x+6<0$

الحل:

1) $e^{x-1}-e^{-2x+3}\geq0$ ومنه $e^{x-1}\geq e^{-2x+3}$

ومنه $x-1\geq-2x+3$ ومنه $x+2x\geq1+3$

أي $3x\geq4$ $x\geq\frac{4}{3}$

وعليه مجموعة حلول المتراجحة : $S=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

2) $(e^x-2)(e^x+1)\geq0$ بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x

فإن: $e^x+1>0$

ومنه حلول المتراجحة $(e^x-2)(e^x+1)\geq0$ هي حلول المتراجحة $e^x-2\geq0$

ومنه $e^x\geq2$ ومنه $e^x\geq e^{\ln2}$ ومنه $x\geq\ln2$

وعليه مجموعة حلول المتراجحة : $S=[\ln2;+\infty[$

3) $e^{2x}-5e^x+6<0$ (بوضع: $X=e^x$ حيث $X>0$)

فإن : $X^2-5.X+6<0$

$\Delta=(-5)^2-4\times1\times(6)=1$

ومنه: $X_1=\frac{5+1}{2}=3$ و $X_2=\frac{5-1}{2}=2$

ومنه : $e^x=3$ أي $x=\ln3$ أو $e^x=2$ أي $x=\ln2$

جدول إشارة العبارة $X^2-5.X+6$:

قيم x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
إشارة $X^2-5.X+6$		+	0	-	0	+	

وبما أن : $X>0$

قيم x	0		2		3		$+\infty$
إشارة $X^2-5.X+6$		+	0	-	0	+	

وعليه تكون إشارة العبارة : $e^{2x}-5e^x+6$

قيم e^x	0		2		3		$+\infty$
إشارة $e^{2x}-5e^x+6$		+	0	-	0	+	

ومنه :

قيم x	$+\infty$		$\ln2$		$\ln3$		$-\infty$
إشارة $e^{2x}-5e^x+6$		+	0	-	0	+	

وعليه تكون حلول المتراجحة: $S=]\ln2;\ln3[$

*الدالة الأسية ذات الأساس a حيث $a \in R_+^* - \{1\}$

■ تعريف : لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$a^x = e^{x.\ln a}$$

■ خواص : من أجل كل عددين حقيقيين x و y من R

1) $a^{x+y} = a^x \times a^y$ ، 2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

3) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ، 4) $\left(a^x\right)^n = a^{n.x}$

5) $a^0 = 1$

■ النهايات :

$a \succ 1$	$0 \prec a \prec 1$
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	

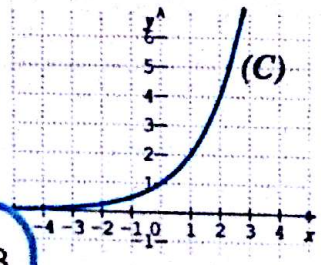
■ المشتقة : $\left(a^x\right)' = (\ln a) \times a^x$

■ التمثيل البياني للدالة : $f(x) = a^x$ المعرفة على R

حالة : $0 \prec a \prec 1$	حالة : $a \succ 1$

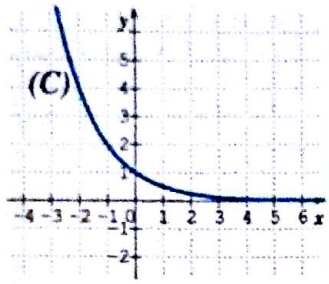
$\left(a^x\right)' = (\ln a) \times a^x \prec 0$ $\left(a^x\right)' = (\ln a) \times a^x \succ 0$

إنشاء (C) (مثلا : $a = 2$)



x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$	+	
(a^x)	0	$+\infty$

إنشاء (C) (مثلا : $a = \frac{1}{2}$)



x	$-\infty$	$+\infty$
$(a^x)'$	−	
(a^x)	$+\infty$	0

*الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ذات الأساس e :

■ اللوغاريتم النيبيري لعدد a :

تعريف: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a$.

يسمي هذا العدد " اللوغاريتم النيبيري للعدد a " و نرمز إليه بالرمز" $\ln a$ ".

مثال: العدد الحقيقي الوحيد b الذي يحقق $e^b = 3$ هو العدد $\ln 3$.

■ تعريف الدالة " ln ":

نسمي" الدالة اللوغاريتمية النيبيرية" الدالة التي نرمز إليها بالرمز" ln " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$.

■ خواص:

خاصية 1 : إذا كان x و y عددان حقيقيان موجبان تماما .

$\ln x > \ln y$ يعني أن $x > y$

$\ln x = \ln y$ يعني أن $x = y$

$\ln x < \ln y$ يعني أن $x \prec y$

مثال تطبيقي:

1) حل في R المعادلة: $\ln(2x-3) = \ln(x+4)$

تكون المعادلة معرفة إذا كان: $x+4 \succ 0$ و $2x-3 \succ 0$

أي : $x > -4$ ومنه : $x \in]-4;+\infty[$

و $x > \frac{3}{2}$ ومنه : $x \in \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

ومنه : $x\in\left]-4;+\infty\right[\cap\left]\frac{3}{2};+\infty\right[=\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

ولدينا : $\ln(2x-3)=\ln(x+4)$

ومنه: $2x-3=x+4$

أي : $x=7\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ ومنه : $S=\{7\}$

2) حل في R المتراجحة $\ln(x-1)>\ln(x)$

تكون المتراجحة معرفة إذا كان: $x\succ 1$ و $x\succ 0$

يعني $x\in\left]1;+\infty\right[$

لدينا $\ln(x-1)\succ\ln(x)$ يعني أن $x-1\succ x$

يعني أن $2x\succ 1$ يعني $x\succ\frac{1}{2}$.

و لدينا تقاطع المجالين $\left]1;+\infty\right[$ و $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

هو المجال $\left]1;+\infty\right[$ إذن حل المتراجحة هو المجال $\left]1;+\infty\right[$.

خاصية 2 :

إذا كان x و y عددان حقيقيان موجبان تماما .

$$\ln(x\times y)=\ln x+\ln y$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$$

$$\ln\left(x^{r}\right)=r\ln x \qquad r\in Q$$

■ النهايات : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\ln x=-\infty$

■ التزايد المقارن : n عدد طبيعي غير معدوم

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x\ln x=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{n}}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^{+}}x^{n}\ln x=0$ ، $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

■ المشتقة :

1) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن : $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

ومنه الدالة اللوغاريثمية النيبيرية متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2) u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و لا تنعدم على هذا المجال لكل عدد x من I لدينا $\left(\ln|u(x)|\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

■ جدول تغيرات الدالة " $\ln x$ " :

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	$+$	
$\ln x$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

* الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ذات الأساس a

■ تعريف : ليكن $a\succ 0$ و $a\neq 1$

الدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{\ln a}$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ،

تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a و نرمز لها بالرمز $\log_a$

$\log_a:]0;+\infty[\to R$

و لدينا : $x\mapsto\log_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}$

ملاحظة : لدينا : $\forall x\in]0;+\infty[$:

$\log_e(x)=\frac{\ln x}{\ln e}=\ln x$.

دالة اللوغاريتم النبيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e .

■ خواص : ليكن $a\succ 0$ و $a\neq 1$

1- لكل x و y من $]0;+\infty[$ و لكل $n\in N$ ، لدينا :

$\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$

$\log_a(x^{n})=n\log_a(x)$

$\log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-\log_a(x)$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$

2- لكل $r \in Q$ و لكل $x \in]0;+\infty[$ لدينا :

$$\log_a(x^r) = r\log_a(x)$$

3- رتابة الدالة $\log_a$:

أ- مجموعة تعريف الدالة $\log_a$ هي : $D_{\log_a} =]0;+\infty[$

ب- النهايات : نعلم أنه مهما يكن x من $]0;+\infty[$ إذن :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

* إذا كان $a > 1$: فإن : $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$

و $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a(x) = +\infty$

* إذا كان $0 < a < 1$: فإن : $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a(x) = -\infty$

ج- جدول التغيرات : لدينا : $\forall x \in]0;+\infty[$:

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$$

أ- حالة $a > 1$: لدينا $\log_a$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$\log_a'(x)$	$+$	
$\log_a(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

ب- حالة $0 < a < 1$:

لدينا $\log_a$ متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$\log_a'(x)$	$-$	
$\log_a(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

دالة اللوغاريتم العشري :

1/ تعريف :

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و نرمز لها بالرمز log (عوض $\log_{10}$) ، و

$$\log :]0;+\infty[\to R$$

لدينا : $x \mapsto \log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$

2/ ملاحظة :

أ- $\log 10 = 1$ ، $\log 1 = 0$

ب- $\forall r \in Q$ ، $\log(10^r) = r\log 10$

ج- $\forall (x;y) \in (]0;+\infty[)^2$ ، $x = y$ يعني أن $\log x = \log y$

تمارين

التمرين 01:

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x مايلي:

أ) $(e^x + e^{-x})^2 = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{2x}}$

ب) $e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}}$

ج) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

2) عين العددين الحقيقيين a و b في كل حالة:

أ) $\frac{e^x-2}{e^x+1}=a+\frac{b}{e^x+1}$

ب) $\frac{e^{2x}-3e^x+5}{e^x+2}=e^x+a+\frac{b}{e^x+2}$

حل التمرين 01:

1) أ/ إثبات أن: $(e^x+e^{-x})^2=\frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{e^{2x}}$

$(e^x+e^{-x})^2=e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}=e^{2x}+2e^{x-x}+e^{-2x}$

$=e^{2x}+2+\frac{1}{e^{2x}}=\frac{e^{2x}e^{2x}+2e^{2x}+1}{e^{2x}}$

$=\frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{e^{2x}}$

ب/ إثبات أن: $e^{-x}-e^{-2x}=\frac{e^x-1}{e^{2x}}$

$e^{-x}-e^{-2x}=\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{2x}}=\frac{e^x}{e^xe^x}-\frac{1}{e^{2x}}$

$=\frac{e^x}{e^{2x}}-\frac{1}{e^{2x}}=\frac{e^x-1}{e^{2x}}$

جـ/ إثبات أن: $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x-\frac{1}{e^x}}{e^x+\frac{1}{e^x}}=\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}$

$=\frac{e^{2x}-1}{e^x}\cdot\frac{e^x}{e^{2x}+1}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

2) أ/ تعيين a و b حيث: $\frac{e^x-2}{e^x+1}=a+\frac{b}{e^x+1}$

$a+\frac{b}{e^x+1}=\frac{ae^x+a+b}{e^x+1}=\frac{e^x-2}{e^x+1}$

وعليه فإن:

$\begin{cases}a=1\\a+b=-2\end{cases}$; $1+b=-2$; $b=-3$

ومنه: $\frac{e^x-2}{e^x+1}=1-\frac{3}{e^x+1}$

ب/ تعيين a و b حيث:

$\frac{e^{2x}-3e^x+5}{e^x+2}=e^x+a+\frac{b}{e^x+2}$

$e^x+a+\frac{b}{e^x+2}=\frac{e^x(e^x+2)+a(e^x+2)+b}{e^x+2}$

$=\frac{e^{2x}+2e^x+ae^x+2a+b}{e^x+2}$

$=\frac{e^{2x}+(2+a)e^x+2a+b}{e^x+2}$

$=\frac{e^{2x}-3e^x+5}{e^x+2}$

وعليه فإن: $\begin{cases}(2+a)=-3;a=-5\\2a+b=5\end{cases}$

ومنه: $-10+b=5$ أي: $b=15$

ومنه: $\frac{e^{2x}-3e^x+5}{e^x+2}=e^x-5+\frac{15}{e^x+2}$

التمرين 02:

تعتبر كثير الحدود $P(x)$ للمتغير الحقيقي x حيث:

$P(x)=2x^3-5x^2+x+2$

1) أحسب $P(2)$ ثم تحقق من أن:

$P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$

حيث a,b,c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

2) حل في R المعادلة: $P(x)=0$

3) استنتج الحلول في R للمعادلة:

$2e^{3x}-5e^{2x}+e^x+2=0$

حل التمرين 02 :

$P(x)=2x^3-5x^2+x+2$

1) حساب $P(2)$:

$P(2)=2(2)^3-5(2)^2+2+2=0$

• تعيين الأعداد الحقيقية a,b,c:

$P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$

$=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c.$

بالمطابقة نجد :

$\begin{cases} a=2 \\ b-2a=-5;b-4=-5;b=-1. \\ c-2b=1;c+2=1;c=-1. \\ -2c=2;c=-1. \end{cases}$

ومنه : $P(x)=(x-2)(2x^2-x-1)$

2) حلول المعادلة $P(x)=0$:

معناه : $(x-2)(2x^2-x-1)=0$

أي : $x-2=0$ • و $2x^2-x-1=0$ •

ومنه : $x=2$ أو $x=1$ أو $x=-\frac{1}{2}$ ومنه : $S=\left\{1;2;-\frac{1}{2}\right\}$

3) $2e^{3x}-5e^{2x}+e^x+2=0$

بوضع : $e^x=y$ حيث $(y>0)$

فإن المعادلة تصبح : $2y^3-5y^2+y+2=0$

الحلول (من السؤال 2) : $y=1$ ، $y=2$ ، $y=-\frac{1}{2}$.

ومنه : • $e^x=2;x=\ln 2$

• $e^x=1;x=0$

• $e^x=-\frac{1}{2}$ (مستحيل)

ومنه : $S=\{0;\ln 2\}$

التمرين 03 :

1) حل في R المعادلات التالية:

أ/ $e^{x-1}-1=0$

ب/ $e^{x-1}-e^{2x}=0$

ج/ $e^{2x}+e^{1-2x}-(e+1)=0$

د/ $e^{2x}+2e^x+1=0$

هـ/ $e^{2|x|}+e^{|x|}-2=0$.

2) حل في R المتراجحات التالية :

أ) $e^{x-1}-e^{-2x+3}\geq 0$

ب) $-e^x-3<0$

ج) $(e^x-2)(e^x+1)\geq 0$

د) $e^{2x}-5e^x+6<0$

هـ) $e^{2x}+e^x-6<0$

و) $\frac{e^x-1}{2-e^x}>0$

حل التمرين 03 :

1) أ/ $e^{x-1}-1=0$ ومنه $e^{x-1}=1$ ومنه $e^{x-1}=e^0$

ومنه $x-1=0$ أي $x=1$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{1\}$.

ب/ $e^{x-1}-e^{2x}=0$ ومنه $e^{x-1}=e^{2x}$ ومنه $x-1=2x$

ومنه $x-2x=1$ ومنه $-x=1$ أي $x=-1$

وعليه مجموعة حلول للمعادلة هي للمجموعة $S=\{-1\}$.

ج) $e^{2x}+e^{1-2x}-(e+1)=0$

$e^{2x}+e\times e^{-2x}-(e+1)=0$

$e^{2x}+e\times\frac{1}{e^{2x}}-(e+1)=0$

بما أن $e^{2x}\neq 0$ $\frac{e^{4x}+e-ee^{2x}-e^{2x}}{e^{2x}}=0$

فإن: $e^{4x}-(e+1).e^{2x}+e=0$

(بوضع: $X=e^{2x}$ حيث $X>0$)

فإن: $X^2-(e+1).X+e=0$

$\Delta=(e+1)^2-4\times1\times e=e^2-2e+1=(e-1)^2$

$X_1=\frac{e+1+\sqrt{(e-1)^2}}{2}=\frac{e+1+e-1}{2}=e$ ،

$X_2=\frac{e+1-\sqrt{(e-1)^2}}{2}=\frac{e+1-e+1}{2}=1$

ومنه: $X=1\rightarrow e^{2x}=1\rightarrow 2x=0\rightarrow x=0$

$X=e\rightarrow e^{2x}=e\rightarrow 2x=1\rightarrow x=\frac{1}{2}$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\left\{0\ ;\frac{1}{2}\right\}$

د) $e^{2x}-2e^x+1=0$

$(e^x-1)^2=0$ ومنه: $(e^x)^2-2\times1\times e^x+(1)^2=0$

وعليه فإن: $e^x-1=0$ ومنه $e^x=1$

ومنه: $e^x=e^0$ وعليه: $x=0$ وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{0\}$

هـ) $e^{2|x|}+e^{|x|}-2=0$

(بوضع: $X=e^{|x|}$ حيث $X>0$) فإن: $X^2+X-2=0$

$\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=9$

$X_1=\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=\frac{-1+3}{2}=1$

و $X_2=\frac{-1-\sqrt{9}}{2}=\frac{-1-3}{2}=-2$ (مرفوض)

ومنه: $X=1$ أي $e^{|x|}=1$ وعليه $e^{|x|}=e^0$

ومنه $|x|=0$ أي $x=0$

وعليه مجموعة حلول المعادلة هي المجموعة $S=\{0\}$

2) أ/ $e^{x-1}-e^{-2x+3}\geq0$ ومنه $e^{x-1}\geq e^{-2x+3}$

ومنه $x-1\geq-2x+3$

ومنه $x+2x\geq1+3$

ومنه $3x\geq4$ أي $x\geq\frac{4}{3}$

وعليه مجموعة حلول المتراجحة: $S=\left[\frac{4}{3};+\infty\right[$

ب/ $-e^x-3<0$ محققة دوما.

وعليه مجموعة حلول المتراجحة: $S=\left]-\infty;+\infty\right[$

جـ/ $(e^x-2)(e^x+1)\geq0$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $e^x+1>0$ فإن حلول المتراجحة $(e^x-2)(e^x+1)\geq0$ هي حلول المتراجحة $e^x-2\geq0$ ومنه $e^x\geq2$ ومنه $e^x\geq e^{\ln 2}$

ومنه $x\geq\ln 2$

وعليه مجموعة حلول المتراجحة: $S=[\ln 2\ ;+\infty[$

د/ $e^{2x}-5e^x+6<0$ (بوضع: $X=e^x$ حيث $X>0$)

فإن: $X^2-5.X+6<0$

$\Delta=(-5)^2-4\times1\times(6)=1$

$X_1=\frac{5+1}{2}=3$ و $X_2=\frac{5-1}{2}=2$

ومنه: $e^x=3$ أي $x=\ln 3$ أو $e^x=2$ أي $x=\ln 2$

جدول إشارة العبارة $X^2-5.X+6$:

قيم x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
إشارة $X^2-5.X+6$		+	0	-	0	+	

وبما أن: $X>0$

قيم x	0		2		3		$+\infty$
إشارة $X^2-5.X+6$		+	0	-	0	+	

وعليه تكون إشارة العبارة: $e^{2x}-5e^x+6$

قيم e^x	0		2		3		$+\infty$
إشارة $e^{2x}-5e^x+6$		+	0	-	0	+	

ومنه :

قيم x	$-\infty$		$\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
إشارة $e^{2x}-5e^x+6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

وعليه تكون حلول المتراجحة: $S=]\ln 2;\ln 3[$

هـ/ $e^{2x}+e^x-6<0$ (بوضع: $X=e^x$ حيث $X>0$)

فإن: $X^2+X-6<0$

$\Delta=(1)^2-4\times1\times(-6)=25$

$X_1=\frac{-1+5}{2}=2$ و $X_2=\frac{-1-5}{2}=-3$ (مرفوض)

ومنه: $e^x=2$ أي $x=\ln 2$

جدول إشارة العبارة X^2+X-6:

قيم x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
إشارة X^2+X-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

وبما أن: $X>0$

قيم x	0		2		$+\infty$
إشارة X^2+X-6		$-$	0	$+$	

وعليه تكون إشارة العبارة: $e^{2x}+e^x-6$

قيم e^x	0		2		$+\infty$
إشارة $e^{2x}+e^x-6$		$-$	0	$+$	

ومنه:

قيم x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
إشارة $e^{2x}+e^x-6$		$-$	0	$+$	

وعليه تكون حلول المتراجحة: $S=]-\infty;\ln 2[$

و) $\frac{e^x-1}{2-e^x}>0$

لما: $e^x-1=0$ فإن: $e^x=1$ أي $x=0$

لما: $2-e^x=0$ فإن: $e^x=2$ أي $x=\ln 2$

قيم x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
إشارة e^x-1		$-$	0	$+$		$+$	
إشارة $2-e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
إشارة $\frac{e^x-1}{2-e^x}$		$-$	0	$+$		$-$	

وعليه تكون حلول المتراجحة: $S=]0;\ln 2[$

التمرين 04:

1) حل في R المعادلات التالية: (المجهول x)

أ) $\ln(3+x)=\ln 3+\ln x$

ب) $\ln x+\ln(x-2)=\ln(x+10)$

ج) $\ln(x^2+x)=1$

د) $\ln|1-x|=\ln 3$

هـ) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-1$

و) $\ln(x^2-2x)=\ln(x+10)$

2) حل في R المتراجحات ذات المجهول x التالية:

أ) $\ln^2 x-\ln x-6<0$

ب) $\ln(2x+3)<5$

ج) $\ln x>\ln(2x-1)$

د) $x.\ln x-\ln x\geq 0$

حل التمرين 04:

1) أ) $\ln(3+x)=\ln 3+\ln x$

المعادلة معرفة إذا و فقط إذا كان:

$x>0$ أي: $x>0$ و $3+x>0$

- من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln(3+x)=\ln 3+\ln x$

ومنه $\ln(3+x)=\ln 3x$ ومنه $3+x=3x$

ومنه $x=\frac{3}{2}$

ب) $\ln x+\ln(x-2)=\ln(x+10)$

المعادلة معرفة إذا وفقط إذاكان :

$x>0$ و $2-x>0$ و $x+10>0$ أي: $x>2$

• من أجل كل x من $]2;+\infty[$:

$\ln x+\ln(x-2)=\ln(x+10)$

ومنه $\ln(x(x-2))=\ln(x+10)$

ومنه $x(x-2)=x+10$

ومنه $x^2-3x-10=0$

ومنه $x=5$ أو $x=-2$

أي $x=5$ (لأن : $-2\notin]2;+\infty[$)

جـ) $\ln(x^2+x)=1$

تكون المعادلة معرفة إذا كان : $x^2+x\succ 0$

ومنه : $x\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

ولدينا : $\ln(x^2+x)=1$ أي $x^2+x=e$

أي : $x^2+x-e=0$

$\Delta=1^2-4.1.(-e)=1+4e$

ومنه : $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{1+4e}}{2}\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

ومنه : $S=\left\{\dfrac{-1-\sqrt{1+4e}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{1+4e}}{2}\right\}$

د) $\ln|1-x|=\ln 3$

تكون المعادلة معرفة إذا كان : $1-x\neq 0$ ومنه : $x\neq 1$

أي : $x\in R-\{1\}$.

ولدينا : $\ln|1-x|=\ln 3$ أي $|1-x|=3$

ومنه : $1-x=3$ أو $1-x=-3$

أي : $x=-2\in[R-\{1\}]$ أو $x=4\in[R-\{1\}]$

ومنه : $S=\{-2;4\}$

هـ) $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=-1$ تكون المعادلة معرفة إذا كان :

$$\frac{x+1}{x-1}>0$$

قيم x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
إشارة $x+1$	$-$	0	$+$	$+$
إشارة $x-1$	$-$	$\|$	$-$	0 $+$
إشارة $\frac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$ $\|$	$+$

ومنه : $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

ولدينا : $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=-1$

أي: $\dfrac{x+1}{x-1}=e^{-1}$ أي : $\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{1}{e}$ أي: $e.x+e=x-1$

ومنه : $e.x-x=-e-1$

ومنه : $x=\dfrac{-e-1}{e-1}$ أي : $x=\dfrac{e+1}{1-e}$

ومنه : $x=\dfrac{e+1}{1-e}\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ و $S=\left\{\dfrac{e+1}{1-e}\right\}$

و) $\ln(x^2-2x)=\ln(x+10)$

المعادلة معرفة إذا وفقط إذا كان :

بـ : $x+10>0$ و $x^2-2x>0$

تكافئ $x\geq -10$ و $x(x-2)>0$

تكافئ $x\geq -10$ و $x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

أي : $x\in]-10;0[\cup]2;+\infty[$

• من أجل كل x من $]-10;0[\cup]2;+\infty[$

$\ln(x^2-2x)=\ln(x+10)$

تكافئ $x^2-2x=x+10$ تكافئ $x^2-3x-10=0$

تكافئ $x=5$ أو $x=-2$

2) أ) $\ln^2 x - \ln x - 6 < 0$

بوضع $X = \ln x$

لاحظ أن : $X^2 - X - 6 = (X+2)(X-3)$

أي : $X^2 - X - 6 < 0$ حلولها $-2 < X < 3$

ومنه تكون: $\ln^2 x - \ln x - 6 < 0$ لما يكون $-2 < \ln x < 3$

أي $e^{-2} < x < e^3$

ومنه حلول المتراجحة هي المجموعة : $S =]e^{-2}, e^3[$

ب) $\ln(2x+3) < 5$

تكون المتراجحة معرفة إذا كان : $2x+3 > 0$

أي : $x > -\frac{3}{2}$ ومنه : $x \in]-\frac{3}{2}; +\infty[$

ولدينا : $\ln(2x+3) < 5$

أي : $2x+3 < e^5$ ومنه: $x < \frac{e^5-3}{2}$ $x \in]-\infty; \frac{e^5-3}{2}[$

ومنه : $S =]-\infty; \frac{e^5-3}{2}[\cap]-\frac{3}{2}; +\infty[=]-\frac{3}{2}; \frac{e^5-3}{2}[$

جـ) $\ln x > \ln(2x-1)$

تكون المتراجحة معرفة إذا كان : $x > 0$ و $2x-1 > 0$

$x > 0$ معناه : $x \in]0; +\infty[$

$2x-1 > 0$ أي: $x > \frac{1}{2}$ معناه : $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$

ومنه : $x \in]0; +\infty[\cap]\frac{1}{2}; +\infty[=]\frac{1}{2}; +\infty[$

ولدينا : $\ln x > \ln(2x-1)$

أي : $x > 2x-1$ ومنه : $x \in]-\infty; 1[$

ومنه : $S =]-\infty; 1[\cap]\frac{1}{2}; +\infty[=]\frac{1}{2}; 1[$

د) $x.\ln x - \ln x \geq 0$

تكون المتراجحة معرفة إذا كان : $x > 0$ أي : $x \in]0; +\infty[$

ولدينا : $x.\ln x - \ln x \geq 0$ أي $(x-1).\ln x \geq 0$

قيم x	0		1		$+\infty$
إشارة $x-1$		$-$	0	$+$	
إشارة $\ln x$		$-$	0	$+$	
إشارة $(x-1)\ln x$		$+$	0	$+$	

ومنه : $x \in]0; +\infty[$ ومنه : $S =]0; +\infty[$

التمرين 05:

1) حل في R المعادلات التالية : أ/ $4(\ln x)^2 - 1 = 0$

ب/ $4(\ln|x|)^2 - 1 = 0$

2) نعتبر كثير الحدود $A(x)$ حيث :

$A(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$

أ/ أحسب $A(2)$ ثم بين أن :

$A(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

ب/ حل في R المعادلة $A(x) = 0$

ج/ استنتج حلول المعادلة :

$4(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - \ln x + 2 = 0$

حل التمرين 05 :

1) أ/ $4(\ln x)^2 - 1 = 0$ المعادلة معرفة إذا كان $x > 0$:

نضع : $X = \ln x$ ومنه : $4X^2 - 1 = 0$

أي : $X^2 = \frac{1}{4}$

ومنه: $X = \frac{1}{2}$ أو $X = \frac{-1}{2}$

ومنه: $\ln x = \frac{1}{2}$ أو $\ln x = \frac{-1}{2}$

ومنه: $x = e^{\frac{1}{2}}$ أو $x = e^{\frac{-1}{2}}$ ومنه: $S = \left\{e^{\frac{-1}{2}}; e^{\frac{1}{2}}\right\}$

ب/ $4(\ln|x|)^2-1=0$

المعادلة معرفة إذا كان: $x\neq 0$

نضع: $X=\ln|x|$ ومنه: $4X^2-1=0$ أي: $X^2=\frac{1}{4}$

ومنه: $X=\frac{1}{2}$ أو $X=\frac{-1}{2}$

ومنه: $\ln|x|=\frac{1}{2}$ أو $\ln|x|=\frac{-1}{2}$

ومنه: $|x|=e^{\frac{1}{2}}$ أو $|x|=e^{\frac{-1}{2}}$

$(x=-e^{\frac{1}{2}}\ ;\ x=e^{\frac{1}{2}})$ أو $(x=-e^{\frac{-1}{2}}\ ;\ x=e^{\frac{-1}{2}})$

ومنه: $S=\left\{e^{\frac{-1}{2}};e^{\frac{1}{2}};-e^{\frac{1}{2}};-e^{\frac{-1}{2}}\right\}$

2) $A(x)=4x^3-8x^2-x-2$

أ) $A(2)=4(2)^3-8(2)^2-2-2=0$

تعيين $a;b;c$ حيث: $A(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$

$(x-2)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$

$=a^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$

بالمطابقة:
$$\begin{cases}a=4\\b-2a=-8;b-8=-8;b=0\\c-2b=-1;c=-1\\-2c=2;c=-1\end{cases}$$

ومنه: $A(x)=(x-2)(4x^2-1)$

ب) حلول المعادلة $A(x)=0$ في R:

$A(x)=0$ أي: $(x-2)(4x^2-1)=0$

إما: $x-2=0$ ومنه: $x=2$

أو $(4x^2-1)=0$ ومنه: $x^2=\frac{1}{4}$ أي: $x=\frac{1}{2}$ أو $x=\frac{-1}{2}$

ومنه $S=\left\{2;\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right\}$

ج) استنتاج حلول المعادلة:

$4(\ln x)^3-8(\ln x)^2-\ln x+2=0$

نضع: $X=\ln x$ حيث $x>0$

$4X^3-8X^2-X+2=0$

$$\begin{cases}X=\frac{1}{2};\ln x=\frac{1}{2};x=e^{\frac{1}{2}}\\X=\frac{-1}{2};\ln x=\frac{-1}{2};x=e^{\frac{-1}{2}}\\X=2;\ln x=2;x=e^2\end{cases}$$

ومنه $S=\left\{e^{\frac{1}{2}};e^{\frac{-1}{2}};e^2\right\}$

التمرين 06:

اختر الجواب الصحيح مع التبرير.

1) حلول المتراجحة $\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)<0$ في مجموعة الأعداد الحقيقية هي المجموعة S حيث:

أ/ $S=]-\infty;-2[$ ، ب/ $S=]-\infty;1[$

جـ/ $S=]2;+\infty[$ ، د/ $S=]-2;+\infty[$

2) f دالة حيث: $f(x)=2x+1+x.\ln x$

قابلة للاشتقاق على المجال: $]0;+\infty[$ و

أ/ $f'(x)=x.f(x)+2$

ب/ $f'(x)+f(x)=2x+5+x\ln x$

جـ/ $f(x)-xf'(x)=-x+1$

د/ $f'(x)=2f(x)-x\ln x$

3) بيان الدالة f حيث: $f(x)=x.e^x$ يقبل في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ مماسا عند النقطة O معامل توجيهه يساوي:

أ/ 2 ، ب/ -2 ، جـ/ -1 ، د/ 1.

4/ $\lim\limits_{x\to+\infty}[2x-x.\ln(x-1)]$ هي: أ/ $-\infty$ ، ب/ $+\infty$ ، جـ/ 0 ، د/ 1.

حل التمرين 06 :

1) $\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)<0$ تكون المتراجحة معرفة إذا كان :

$$\frac{x+2}{x-1}>0$$

قيم x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
إشارة $x+2$		-	0	+		+	
إشارة $x-1$		-		-	0	+	
إشارة النسبة		+	0	-	‖	+	

ومنه : $x\in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$

ولدينا : $\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)<0$ أي : $\frac{x+2}{x-1}<1$

أي : $\frac{x+2}{x-1}-1<0$ أي : $\frac{3}{x-1}<0$

ومنه : $x\in]-\infty;1[$

ومنه:

$$S=(]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[)\cap(]-\infty;1[)=]-\infty;-2[$$

معناه اللإجابة الصحيحة هي : (أ)

2) $f(x)=2x+1+x.\ln x$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$:

حيث : $f'(x)=2+1.\ln x+\frac{1}{x}.x=3+\ln x$

ولدينا : $f'(x)\neq x.f(x)+2$

و $f'(x)+f(x)\neq 2x+5+x\ln x$

و $f'(x)\neq 2f(x)-x\ln x$

و $f(x)-xf'(x)=2x+1+x.\ln x-3x-x\ln x$

$=-x+1$

معناه الإجابة الصحيحة هي : (جـ) .

3) $f(x)=x.e^x$

ومنه : $f'(x)=e^x+x.e^x=(x+1).e^x$

ولدينا : $f'(0)=e^0(0+1)=1$ (معامل توجيه المماس عند النقطة O) معناه الإجابة الصحيحة هي : (د) .

4)

$$\lim_{x\to+\infty}[2x-x.\ln(x-1)]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x.(2-\ln(x-1))$$

$$=-\infty$$

(لأن : $x\to+\infty$ و $2-\ln(x-1)\to-\infty$)

معناه الإجابة الصحيحة هي : (أ) .

التمرين 07:

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ و (C) منحاها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1/ أدرس تغيرات الدالة f .

2/ بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب معادلتهما.

3/ أثبت أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

4/ أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة A .

■ لتكن g الدالة المعرفة على IR كمايلي:

$$g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$

5/ بين أن من أجل كل x من IR : $g'(x)=\frac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$

6/ شكل جدول تغيرات الدالة g .

ثم إستنتج إشارة $g(x)$ على IR

7/ استنتج الوضعية النسبية للمماس (T) بالنسبة إلى المنحنى (C).

8/ أرسم المنحنى (C).

حل التمرين 07 :

1-تغيرات الدالة f : f معرفة على IR

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=0$ (لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x\left(e^{-x}+1\right)}=\dfrac{1}{0+1}=1$

(لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$)

f قابلة للاشتقاق على IR ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=\frac{e^x\left(1+e^x\right)-e^x.e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$$

إذن: من أجل كل x من IR : $f'(x)\rangle 0$

منه جدول تغيرات الدالة f :

قيم x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	0	↗	1

2) المستقيمات المقاربة:

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

إذن: المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ إذن: المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب للمنحنى (C) في جوار $+\infty$

3) من أجل كل x من IR فإن: $(-x)\in IR$

أي $\left[2(0)-x\right]\in IR$

و $f(-x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}\left(e^x+1\right)}=\dfrac{1}{e^x+1}$

من جهة أخرى $2(1/2)-f(x)=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}$

$=\dfrac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x+1}$

نتيجة: من أجل كل x من IR :

$$f\left(2(0)-x\right)=2(1/2)-f(x)$$

إذن: النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

4) معادلة المماس عند النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ تكتب من الشكل:

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$f(0)=1/2$ $f'(0)=\dfrac{1}{(2)^2}=\dfrac{1}{4}$ منه: معادلة المماس (T) هي: $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$

5) g قابلة للإشتقاق على IR ودالتها المشتقة:

$$g'(x)=\frac{1}{4}-f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}=\frac{\left(1+e^x\right)^2-4e^x}{4\left(1+e^x\right)^2}$$

$$=\frac{1+2e^x+e^{2x}-4e^x}{4\left(1+e^x\right)^2}$$

$$=\frac{\left(1-e^x\right)^2}{4\left(1+e^x\right)^2}=\frac{\left(e^x-1\right)^2}{4\left(1+e^x\right)^2}=\frac{1-2e^x-e^{2x}}{4\left(1+e^x\right)^2}$$

6) لاحظ أن $g'(x)$ من إشارة $\left(e^x-1\right)^2$ لأن المقام دوما موجب ولدينا:

قيم x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$+$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}-f(x)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}=-\infty$

(لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$)

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}+1 = +\infty$$

($\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ لأن)

منه: جدول تغيرات الدالة g :

$$g(0)=\frac{1}{4}(0)+\frac{1}{2}-f(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

قيم x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج إشارة $g(x)$:

قيم x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	

7) الوضعية النسبية لـ (C) و (T) :لدينا:

$$\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)=g(x)$$

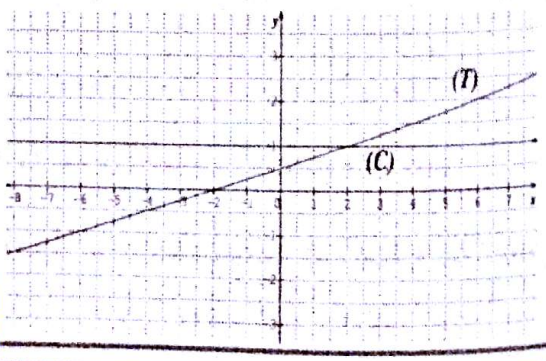
إذن: إشارة $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$ هي إشارة $g(x)$.

ومنه: لما $x\in]-\infty;0[$:المماس (T) يقع تحت المنحنى (C).

لما $x=0$: المماس (T) يقطع المنحنى (C).

لما $x\in]0;+\infty[$: المماس (T) يقع فوق المنحنى (C).

8-الإنشاء



التمرين 06:

الهدف من هذه المسألة هو حساب : ($\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^x$)

f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ حيث : $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$

1) أوجد عبارة $f'(x)$ و $f''(x)$.

2) حل في R المتراجحة : $e^x-1\geq 0$ ثم عين إشارة $f''(x)$ على المجال $[0;+\infty[$ و استنتج اتجاه تغير الدالة $f'(x)$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f' (النهايات لا يطلب حسابها) ثم استنتج إشارة f' .

4) عين اتجاه تغير الدالة f و استنتج إشارتها .

5) أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن : $\frac{e^x}{x}\geq\frac{x}{2}$.

6 – باستعمال نظريات النهايات بالحصر إستنتج $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$

ثم استنتج $\lim_{x\to-\infty} xe^x$

7) بالاعتماد على ما سبق أحسب :

1) $\lim_{x\to+\infty}(e^x-x)$ ، 2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^x}{x}$ ، 4) $\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^x$

8) استنتج مما سبق حساب لـ($\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ و $\lim_{x\to0} x\ln x$)

9) أحسب: 1) $\lim_{x\to+\infty}(3-x-2\ln x)$

2) $\lim_{x\to+\infty}(3-x-2\ln(x+1))$

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln(x-2)}{x+1}$

4) $\lim_{x\to0}(2-x\ln x^3)$

حل التمرين 08 :

1) من أجل $x\in[0;+\infty[$: $f'(x)=e^x-\frac{2x}{2}=e^x-x$

و $f''(x)=e^x-1$

2) حل في R المتراجحة : $e^x-1\geq 0$ أي $e^x\geq 1$

ومنه : $x\geq 0$ ومنه : $S=[0;+\infty[$

إشارة $f''(x)$:

من أجل $x\in[0;+\infty[$ فإن $e^x-1\geq 0$ أي : $f''(x)\geq 0$

ومنه : f' متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3) جدول تغيرات الدالة f' : $(f'(0)=1)$

قيم x	0	$+\infty$
إشارة $f''(x)$	$+$	
$f'(x)$	1	↗

إشارة $f'(x)$:

نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل $x\in[0;+\infty[$:

$f'(x)\geq 1$ ومنه $f'(x)$ موجبة تماما .

4) بما أن $f'(x)$ موجبة تماما من أجل $x\in[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

إشارة الدالة f :

بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ و $f(0)=1$

فإن : من أجل $x\in[0;+\infty[$ $f(x)\geq f(0)$

أي : $f(x)\geq 1$ ومنه : f موجبة تماما .

5) من أجل $x\in]0;+\infty[$ فإن : $f(x)\geq 0$

أي: $e^x-\frac{x^2}{2}\geq 0$ ومنه : $e^x\geq\frac{x^2}{2}$

ومنه : $\frac{e^x}{x}\geq\frac{x}{2}$

6) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$

وبما أنه من أجل $x\in]0;+\infty[$: $\frac{e^x}{x}\geq\frac{x}{2}$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\geq\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

إستنتاج $\lim\limits_{x\to-\infty}x.e^x$: نضع : $X=-x$ أي : $x=-X$

لما : $x\to-\infty$ فإن : $X\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}x.e^x=\lim_{X\to+\infty}(-X).e^{-X}$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\frac{-X}{e^X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{-1}{\frac{e^X}{X}}=0$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}x.e^x=0$

7) /1 $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x)=+\infty-\infty$ (F.I)

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x-x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$$

(لأن : $x\to+\infty$ و $\frac{e^x}{x}\to+\infty$)

/2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}$ (F.I)

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$

/3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\frac{+\infty-\infty}{+\infty}$ (F.I)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(1-e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}(1-e^x)=-\infty$$

(لأن : $1-e^x\to-\infty$ و $\frac{e^x}{x}\to+\infty$)

/4 $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1).e^x=-\infty\times 0$ (F.I)

$$\lim_{x\to-\infty}(2x-1).e^x=\lim_{x\to-\infty}\left[2xe^x-e^x\right]=0$$

(لأن : $xe^x\to 0$ و $e^x\to 0$)

8) حساب : ($\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0}x\ln x$)

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}$ (F.I)

نضع : $X=\ln x$ ومنه : $x=e^X$

لما : $x\to+\infty$ فإن : $X\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=0$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

• $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0\times(-\infty)$ (F.I)

نضع : $X=\frac{1}{x}$ ومنه : $x=\frac{1}{X}$

لما : $x\to0$ فإن : $X\to+\infty$

$$\lim_{x\to0}x\ln x=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{X}\left(\ln\frac{1}{X}\right)$$

$$=\lim_{X\to+\infty}\left[-\frac{1}{X}(\ln X)\right]$$

$$=\lim_{X\to+\infty}-\frac{\ln X}{X}=0$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$

9) حساب: 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x-2\ln x)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x-2\ln(x+1))$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\ln(x-2)}{x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-x\ln x^3\right)$

1)

$$\lim_{x\to+\infty}(3-x-2\ln x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x.\left(\frac{3}{x}-1-2\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

2)

$$\lim_{x\to+\infty}(3-x-2\ln(x+1))$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x+1).\left(\frac{3}{x+1}-\frac{x}{x+1}-2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$$

$$=-\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$)

لأنها من الشكل : ($\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$

3)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln(x-2)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{\ln(x-2)}{x+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x+1}\times\frac{\ln(x-2)}{x-2}\right)=0$$

4) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-x\ln x^3\right)=\lim\limits_{x\to0}(2-3x\ln x)=2$

التمرين 09:

الهدف من هذه المسألة هو حساب :

($\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x$)

و($\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}$ و $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x$)

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن :

$$e^{x-n\ln x}=\frac{e^x}{x^n}$$

2) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-n\ln x)$ ، ثم استنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}$.

3) بوضع $X=-x$ بين أن : $x^ne^x=\frac{(-X)^n}{e^X}$

ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x$.

4) بوضع: $X=\ln x$ أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$

5) بوضع: $X=\dfrac{1}{x}$ أحسب: $\lim\limits_{x\to0} x^n\ln x$

6) بالاعتماد على ما سبق أحسب:

أ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2e^x\right)$ ب/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x+1\right)e^x$

جـ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-3\ln(x+1)\right)$

حل التمرين 09:

1) $e^{x-n\ln x}=e^{x-\ln x^n}=e^x\,e^{-\ln x^n}=\dfrac{e^x}{e^{\ln x^n}}=\dfrac{e^x}{x^n}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-n\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1-n\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-n\ln x}=+\infty$

3) بوضع $X=-x$ فإن: $x=-X$

لما: $x\to-\infty$ فإن: $X\to+\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{(-X)^n}{e^X}$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}(-1)^n\dfrac{X^n}{e^X}=0$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ (F.I)

نضع: $X=\ln x$ ومنه: $x=e^X$

لما: $x\to+\infty$ فإن: $X\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln e^X}{\left(e^X\right)^n}$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^{nX}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{n}.\dfrac{nX}{e^{nX}}$

بوضع: $u=nX$ لما: $X\to+\infty$ فإن: $nX\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{n}.\dfrac{nX}{e^{nX}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{n}.\dfrac{u}{e^u}=0$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$

5) $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x=0\times(-\infty)$ (F.I)

نضع: $X=\dfrac{1}{x}$ ومنه: $x=\dfrac{1}{X}$

لما: $x\to0$

فإن: $X\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X^n}\left(\ln\dfrac{1}{X}\right)$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{X^n}(\ln X)\right]$

$=\lim\limits_{X\to+\infty}-\dfrac{\ln X}{X^n}=0$

ومنه: $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x=0$

6) أ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2e^x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(1-2.\dfrac{e^x}{x^3}\right)=-\infty$

لأن: $\left(x^3\longrightarrow+\infty\ \text{و}\ \dfrac{e^x}{x^3}\longrightarrow+\infty\right)$

ب/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x+1\right)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3e^x-2xe^x+e^x\right)=-\infty$

لأن: $\left(x^3e^x\longrightarrow0\ \text{و}\ xe^x\longrightarrow0\right)$

جـ/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-3\ln(x+1)\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\dfrac{2x}{x+1}-3\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=+\infty$

لأن: $\left(\dfrac{2x}{x+1}\to2\ \text{و}\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\to0\right)$

التمرين 10 :

❶• لتكن الدالة g المعرفة على R كما يلي :

$$g(x) = 2e^x + 2x - 7$$

1) أحسب النهايات على $-\infty$ و $+\infty$ للدالة g .

2) أحسب $g'(x)$ واستنتج اتجاه تغير g وشكل جدول تغيراتها.

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيد α حيث :

$0.94 < \alpha < 0.96$.

4) عين إشارة g على R .

❷• لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$$

1) أدرس إشارة الدالة f على R .

2) أحسب النهايات على $-\infty$ و $+\infty$ للدالة f .

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$f'(x) = g(x)e^{-x}$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على R

4) شكل جدول تغيرات f .

5) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 5$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

6) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

7) بفرض $-1 < f(\alpha) < -2$ أنشئ (Δ) و (C_f).

حل التمرين 10 :

❶• لتكن الدالة g المعرفة على R كما يلي :

$$g(x) = 2e^x + 2x - 7$$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

2) من أجل كل x من R : $g'(x) = 2e^x + 2$

من أجل كل x من R فإن $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على R .

جدول تغيرات g :

قيم x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة g مستمرة و متزايدة على المجال $[0{,}94;0{,}96]$

ومنه : $g(0{,}94) \times g(0{,}96) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيد α حيث : $0.94 < \alpha < 0.96$.

4) إشارة g على R :

قيم x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة g		$-$	0	$+$	

❷• لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$$

1) دراسة إشارة الدالة f على R .

قيم x	$-\infty$		0		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
إشارة $2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
إشارة $1-e^{-x}$		$-$	0	$+$		$+$	
إشارة $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x-5)(1-e^{-x}) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x-5)(1-e^{-x}) = +\infty$

3) من أجل كل عدد حقيقي x فإن :

$f'(x)=(2)(1-e^{-x})+(e^{-x})(2x-5)$

ومنه : $f'(x)=2-2e^{-x}+2xe^{-x}-5e^{-x}$

ومنه : $f'(x)=e^{-x}(2e^{x}+2x-7)$

ومنه : $f'(x)=g(x).e^{-x}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه : f متزايدة تماما لما $x\in[\alpha;+\infty[$ و f متناقصة تماما لما $x\in]-\infty;\alpha[$

4) جدول تغيرات f :

قيم x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

5) $f(x)=(2x-5)(1-e^{-x})$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-5)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-5)e^{-x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}2xe^{-x}=0$

أنها من الشكل : $\lim\limits_{X\to-\infty}X.e^{X}=0$

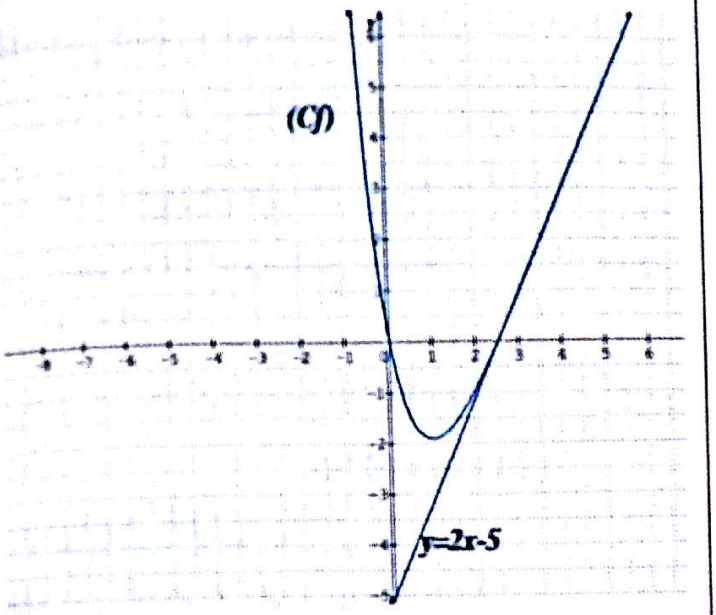
ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-5$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

6) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-(2x-5)=-(2x-5)e^{-x}$

قيم x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
إشارة $2x-5$		$-$	0	$+$	
إشارة e^{-x}		$+$		$+$	
$-(2x-5)e^{-x}$		$+$	0	$-$	
وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)	فوق		(C_f) و (Δ) يتقاطعان		تحت

7) إنشاء (Δ) و (C_f) .



التمرين 11 :

❶ g دالة معرفة على R بـ: $g(x)=2+\dfrac{x-1}{e^{x}}$

1- أ) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$

ب) أدرس تغيرات الدالة g

2- بين أن $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]-0,38;-0,37[$

3- استنتج إشارة $g(x)$ على R .

❷ f دالة معرفة على R بـ : $f(x)=2x+1-\dfrac{x}{e^{x}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- عين نهايتي f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(نقبل أن $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$)

2- أ) بين انه من اجل كل x من R : $f'(x)=g(x)$

و استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4- (T_m) مستقيم معادلته $y=2x+m$ حيث m عدد حقيقي.

عين العدد الحقيقي m حتى يكون (T_m) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة I يطلب تعيين احداثياتها.

5- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيينها.

6- بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$

7- ارسم (Δ) و (C_f). (نأخذ $\alpha\approx-0.375$)

حل التمرين 11 :

❶ لدينا: $g(x)=2+\dfrac{x-1}{e^x}$ و $D_g=R$

1- أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}-\dfrac{1}{e^x}\right)=2$

لان $\left(\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}\to 0\right)$

ب) دراسة تغيرات الدالة g:

$$g'(x)=\frac{e^x-e^x(x-1)}{e^{2x}}=\frac{2-x}{e^x}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ و متناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$.

2- إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]-0,38;-0,37[$:

لدينا: $g(-0,38)\approx-0,03$ و $g(-0,37)\approx 0,01$

بما أن g مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]-0,38;-0,37[$ و $g(-0,37)\times g(-0,38)<0$ فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحدا α في المجال $]-0,38;-0,37[$ بحيث: $g(\alpha)=0$.

3- إشارة $g(x)$ على R.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

❷ f دالة معرفة على R بـ: $f(x)=2x+1-\dfrac{x}{e^x}$

1- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

لان $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(2+\dfrac{1}{x}-e^{-x}\right)=+\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لان $\left(\lim\limits_{-x\to-\infty}\left(-xe^{-x}\right)=0\right)$

2- أ) الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال R و لدينا:

$$f'(x)=2-\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=2+\frac{x-1}{e^x}=g(x)$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ب) جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3- أ) المستقيم $(\Delta): y=2x+1$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(2x+1))=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(2x+1))=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{x}{e^x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$

ومنه $(\Delta): y=2x+1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

ب) الوضعية : لدينا : $f(x)-(2x+1)=-\frac{x}{e^x}=-$

$-\frac{x}{e^x}=0$ تكافئ $x=0$ ومنه (C_f) يقطع (Δ) في

النقطة $(0;1)$ حيث $f(0)=1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-(2x+1)=-\frac{x}{e^x}$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)		(C_f) يقع تحت (Δ)

4- ليكن : $(T_m): y=2x+m$ حيث $m\in R$

(T_m) مماسا للمنحنى (C_f) معناه $f'(x)=2=g(x)$

$g(x)-2=0$ تكافئ $x=1$ و منه $I(1;f(1))$

حيث $f(1)=3-e^{-1}$

$(T_m): y=2(x-1)+3-e^{-1}=2x+1-e^{-1}$

و عليه $m=1-e^{-1}$

5- (C_f) يقبل نقطة انعطاف A : الدالة f' قابلة الاشتقاق

على المجال R و لدينا : $f''(x)=g'(x)=\frac{2-x}{e^x}$

$f''(x)=0$ تكافئ $x=2$ و منه $A(2;f(2))$

حيث $f(2)=5-2e^{-2}\approx 4,72$

6- بين أن $f(\alpha)=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$:

لدينا $f(\alpha)=2\alpha+1-\frac{\alpha}{e^\alpha}$

بما أن $g(\alpha)=0$ فان $2+\frac{\alpha-1}{e^\alpha}=0$

وعليه $e^\alpha=\frac{1-\alpha}{2}$

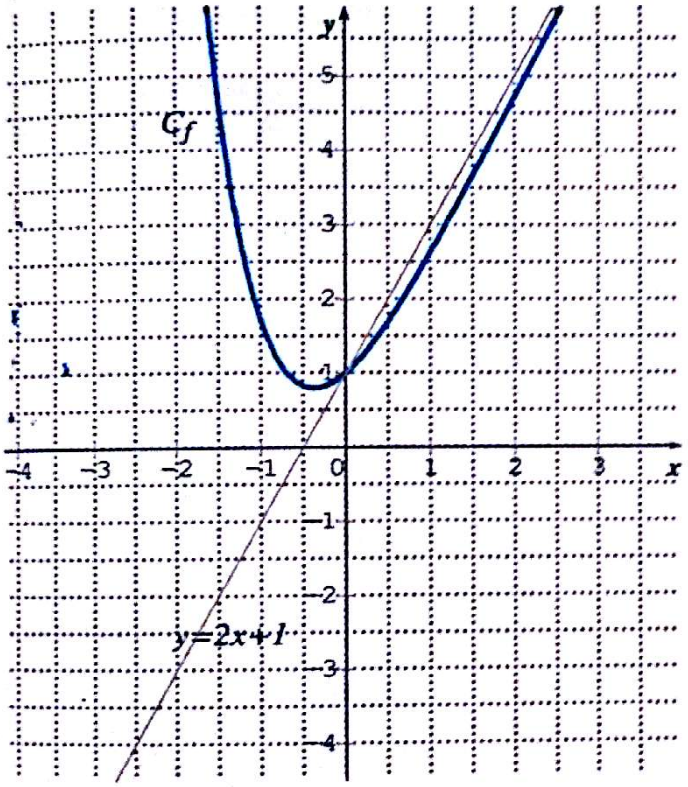
بالتعويض في $f(\alpha)$ نجد : $f(\alpha)=2\alpha+1-\frac{\alpha}{\frac{1-\alpha}{2}}$

$=2\alpha+1+\frac{2\alpha}{\alpha-1}=\frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$

7- رسم (Δ) و (C_f) :

$f(-0,375)=\frac{2(-0,375)^2+(-0,375)-1}{(-0,375)-1}$

$\approx 0,8977$



التمرين 12 :

I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ حيث a و b عددان حقيقيان .

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول 1cm.

عين قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ/ بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و عبر هذه النتيجة بيانيا.

(نذكر $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$).

ب/ أدرس تغيرات الدالة g ثم أنشئ جدول تغيراتها.

ج/ بين أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثيها.

د/ أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

هـ/ أرسم (C_g).

III) لتكن الدالة المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي :

$K(x)=g(x^2)$

باستعمال مشتقة دالة مركبة عين اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

حل التمرين 12 :

1) $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$

تعيين a و b حيث : $f(-1)=1$ و $f'(-1)=-e$

f تقبل الاشتقاق على $]-2,+\infty[$:

$f'(x)=ae^{-x}-(ax+b)e^{-x}$

ومنه $f'(x)=-(ax+b-a)e^{-x}$

نجد: $\begin{cases}f(-1)=1\\f'(-1)=-e\end{cases}$ يعني $\begin{cases}(-a+b)e+1=1\\-(-2a+b)e=-e\end{cases}$

أي : $a=-1$ و $b=-1$: $f(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

II) $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}+1\right)=1$

التفسير : (C_g) يقبل مستقيم مقارب أفقي عند $+\infty$ معادلته $y=1$.

ب) دراسة تغيرات الدالة : g

g تقبل الاشتقاق على $]-2,+\infty[$: $g'(x)=xe^{-x}$

إشارة $g'(x)$ من إشارة x

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	ϕ	$+$	

g متناقصة تماما على $[-2,0]$ و متزايدة تماما على $[2,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g.

x	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	ϕ	$+$	
$f(x)$	$1+e^2$	↘	0	↗	1

ج) g' تقبل الاشتقاق على $]-2,+\infty[$:

$g''(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$

x	-2		1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	ϕ	$-$	

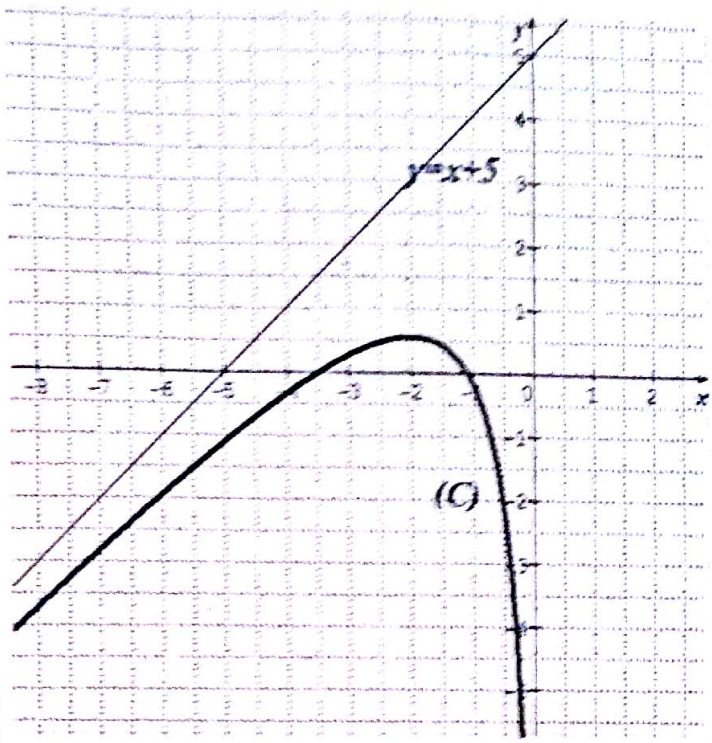
الدالة المشتقة الثانية g'' انعدمت عند 1 و غيرت من إشارتها بجوار 1 إذن النقطة $I\left(1;1-\frac{2}{e}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_g).

د/ معادلة المماس للمنحنى (C_g) هند I :

$(T): y=g'(1)(x-1)+g(1)$

$y=\frac{1}{e}(x-1)+1-\frac{2}{e}$ ، $y=\frac{1}{e}x+1-\frac{3}{e}$

هـ/ رسم (C_g) :



III) K تقبل الاشتقاق على $]-\infty;-2[$ حيث :

$$K'(x)=2x\ g'(x^2)$$

$$K'(x)=2xx^2e^{-x2}=2x^3e^{-x2}$$

إشارة $K'(x)$ هي إشارة x.

K متناقصة تماما على المجال $[-2,0]$ و متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$

جدول تغيرات K :

x	-2		0		$+\infty$
$K'(x)$		$-$	0	$+$	
$K(x)$	$1-\frac{5}{e^4}$	↘	0	↗	1

التمرين 13 :

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي:

$$f(x)=x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعا
والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

❶ أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

❷ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ،

$$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}.$$

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

❸ أ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y=x+5$
هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

❹ بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث
$-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1<\beta<-1,1$.

❺ أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

❻ أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$
و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0
يطلب تعيين إحداثيتها.

حل التمرين 13 :

❶ أ- حساب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ ، ثم التفسير النتيجة هندسيا:

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left[x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to0}\left[6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$.

ومنه المستقيم الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب عمودي.

ب- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

بما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)=-\infty$

فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$

❷ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ،

$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و دالتها المشتقة:

$$f'(x)=1+6.\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\frac{x}{x-1}}=1+6.\frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$f'(x)=1+6.\frac{-1}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x}$$

$$=1+6.\frac{-1}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)-6}{x(x-1)}$$

أي: $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

استنتاج اتجاه تغيرات الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة المشتقة من إشارة البسط x^2-x-6 لأنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$: $x(x-1)>0$.

لدينا: $x^2-x-6=0$ ومنه $x=-2$ وهو مقبول أو $x=3$ وهو مرفوض.

وبالتالي: f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و f متناقصة تماما على المجال $[-2;0[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3+6Ln\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

❸ أ- إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل:

المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل يعني أن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+5)]=0$.

لدينا: $f(x)-(x+5)=6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+5)]=\lim\limits_{x\to-\infty}6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=Ln1=0$

ومنه: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق $[f(x)-(x+5)]$: لدينا :

$f(x)-(x+5)=6Ln\frac{x}{x-1}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ يكون لدينا $x>x-1$.

ومنه $\frac{x}{x-1}<1$ لأن $(x-1)$ عدد سالب بالقسمة عليه تتغير المتباينة ومنه: $Ln\frac{x}{x-1}<Ln1$ وبالتالي

$f(x)-(x+5)<0$ أي أن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل x من المجال $]-\infty;0[$.

❹ إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث: $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$:

لدينا الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]-\infty;-2]$

و المجال $]-3,5;-3,4[\subset]-\infty;-2]$ فالدالة f مستمرة و رتيبة تماما عليه :

$f(-3,5)=-3,5+5+6\ln\left(\frac{3,5}{4,5}\right)\approx-0,007$ و

$f(-3,4)=-3,4+5+6\ln\left(\frac{3,4}{4,4}\right)\approx0,053$ و

وبالتالي $f(-3,5)\times f(-3,4)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل α حيث: $-3,5<\alpha<-3,4$.

من جهة أخرى دالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]-2;0[$ و المجال $]-1,1;-1[\subset]-2;0[$ فالدالة f مستمرة و رتيبة تماما عليه.

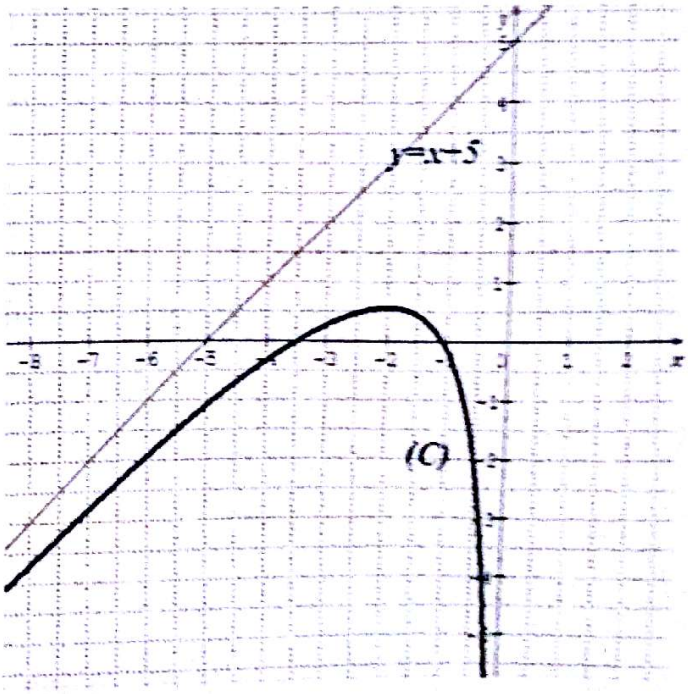
$f(-1,1)=-1,1+5+6\ln\left(\frac{1,1}{2,1}\right)\approx 0,02$ و

$f(-1)=-1+5+6\ln\left(\frac{1}{2}\right)\approx -0,158$ و

وبالتالي $f(-1,1)\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل β حيث: $-1,1<\beta<-1$.

وعليه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$.

❺ إنشاء المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):



❻ أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

إثبات أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB):

نعتبر النقطة $M(x,y)$ نقطة من المستقيم (AB) ومنه: $\overrightarrow{AB}$ // $\overrightarrow{AM}$.

لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3-6Ln\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ // $\overrightarrow{AM}$ يعني أن:

$$(x+1)\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(y-3-6Ln\frac{3}{4}\right)(-1)=0$$

$$-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+y-3-6Ln\frac{3}{4}=0$$

$$-\frac{1}{2}x+y-\frac{7}{2}-6Ln\frac{3}{4}=0$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$$

و بالتالي المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) هي:

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}.$$

ب- إثبات أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0: المستقيم (AB) مماس للمنحنى (C_f) يعني أن لهما نفس معامل التوجيه أي $f'(x)=\frac{1}{2}$

$f'(x)=\frac{1}{2}$ تعني أن: $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$

أي: $2x^2-2x-12=x^2-x$ وبالتالي: $x^2-x-12=0$

التمرين 14:

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1-xe^x$.

❶ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

❷ ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثم شكّل جدول تغيراتها.

❸ أ- بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- تحقق أن $0,5<\alpha<0,6$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^x-x-1$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 لتكن f' مشتقة الدالة f، بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن: $f'(x)=-g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3 بيّن أن $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

4 أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) أ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1,5<x_1<-1,6$ و $1,5<x_2<1,6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f).

حل التمرين 14 :

I) لتكن g الدالة المعرفة على R كما يلي: $g(x)=1-xe^x$.

1 حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-xe^x)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-xe^x)=-\infty$

2 دراسة اتجاه تغيرات الدالة g وتشكيل جدول تغيراتها:

g دالة قابلة للاشتقاق على R ودالتها المشتقة هي g' حيث:

$g'(x)=-e^x-xe^x$

$g'(x)=(-1-x)e^x$

إشارة المشتقة من إشارة $-1-x$ لأنه من اجل كل عدد حقيقي: $e^x>0$.

لدينا $-1-x=0$ ومنه: $x=-1$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↗	$1+\frac{1}{e}$	↘	$-\infty$

3 أ- إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$:

من جدول تغيرات الدالة نلاحظ أن g متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]-\infty;1+\frac{1}{e}\right[$

و العدد صفر ينتمي إلى $\left]-\infty;1+\frac{1}{e}\right[$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- التحقق أن $0,5<\alpha<0,6$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا: $g(0,6)=-0,09$ و $g(0,5)=0,18$ و بما أن $g(0,5)\times g(0,6)<0$ إذن $0,5<\alpha<0,6$.

إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) 1 حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x-x-1=+\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=0$

2 إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$:

فإن $f'(x)=-g(x)$

f دالة قابلة للاشتقاق على $]-\infty;2]$ ودالتها المشتقة هي f' حيث: $f'(x)=e^x+(x-1)e^x-1=(1+x-1)e^x-1$

$f'(x)=xe^x-1=-(-xe^x+1)$

$f'(x)=-g(x)$

استنتاج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f:

إشارة المشتقة هي عكس إشارة $g(x)$ وعليه:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة f'		$-$	0	$+$	

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$.

و f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;2]$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	e^2-3

❸ إثبات أن $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$: لدينا

$f(\alpha)=(\alpha-1)e^{\alpha}-\alpha-1$.

من جهة أخرى لدينا $g(\alpha)=0$ أي: $1-\alpha e^{\alpha}=0$

وبالتالي: $e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$

$f(\alpha)=(\alpha-1)\frac{1}{\alpha}-\alpha-1$

وعليه: $f(\alpha)=\frac{\alpha-1}{\alpha}-\alpha-1=\frac{\alpha-1-\alpha^2-\alpha}{\alpha}$

$f(\alpha)=\frac{-\alpha^2-1}{\alpha}=-\frac{\alpha^2+1}{\alpha}$

بالتعويض نجد: $f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}):

لدينا $0,5<\alpha<0,6$ ومنه $\frac{1}{0,6}<\alpha<\frac{1}{0,5}$ .....(1)

ومن جهة أخرى $0,25<\alpha^2<0,36$ أي $1,25<\alpha^2+1<1,36$

أي: $-1,36<-(\alpha^2+1)<-1,25$

ومنه: $-\frac{1,36}{0,5}<-\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)<-\frac{1,25}{0,6}$

إذن: $-2,72<f(\alpha)<-2,08$.

❹ أ- إثبات أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا: $f(x)-(-x-1)=(x-1)e^x$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=0$

ومنه (Δ): $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

دراسة إشارة الفرق $[f(x)-(-x-1)]$:

لدينا: $f(x)-(-x-1)=(x-1)e^x$ إشارة الفرق من إشارة $(x-1)$.

على المجال $]-\infty;1]$ يكون لدينا $f(x)-(-x-1)<0$

و بالتالي المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) وعلى المجال $[1;2]$ يكون لدينا $f(x)-(-x-1)>0$ وبالتالي المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ).

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $M(-2;1)$.

❺ أ- إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1,6<x_1<-1,5$ و $1,5<x_2<1,6$

لدينا: $f(-1,6)=0,08$ و $f(-1,5)=-0,06$

f متناقصة تماما على المجال $[-1,6;-1,5]$

و $f(-1,5)\times f(-1,6)<0$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_1 حيث: $-1,6<x_1<-1,5$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

* لدينا $f(1,6)=0,37$ و $f(1,5)=-0,26$

f متناقصة تماما على المجال $[1,5;1,6]$

و $f(1,5)\times f(1,6)<0$

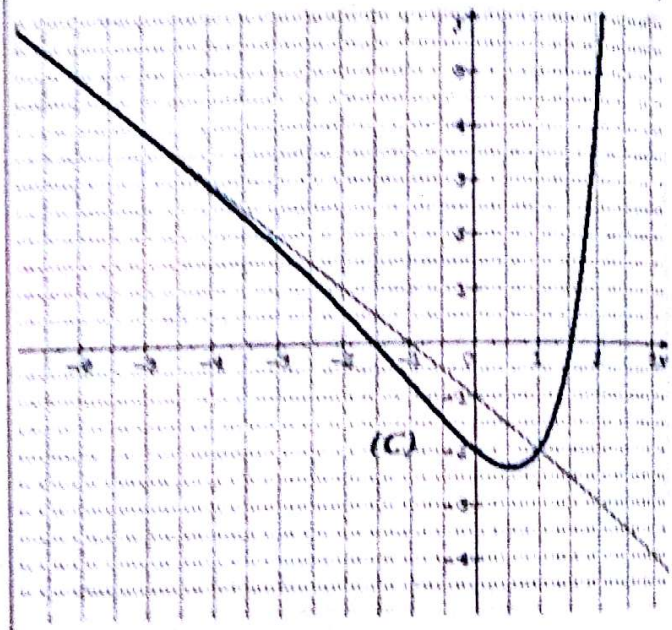
إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث

$1,5<x_0<1,6$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة ومنه نستنتج

أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين هما

$M_1(x_1;0)$ و $M_2(x_2;0)$.

ب- إنشاء (Δ) و (C_f):



التمرين 15 :

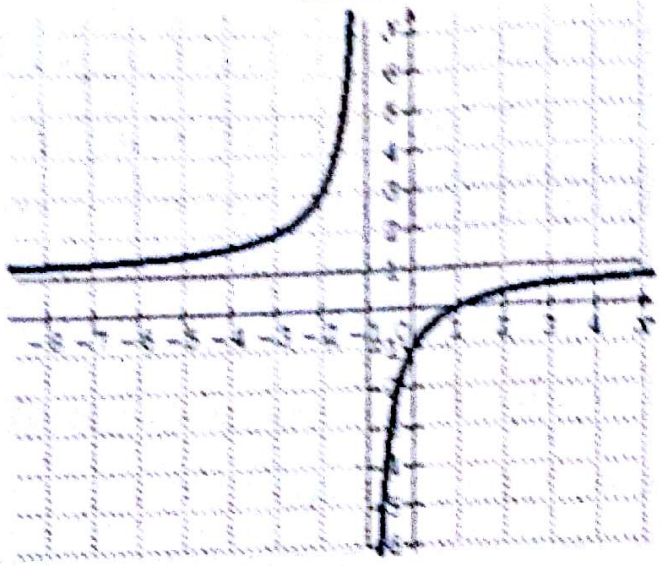
I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $R-\{-1\}$ كما يلي : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;i;j)$.

كما يوضحه الشكل المقابل.

أ. شكل جدول تغيرات الدالة g.

ب. حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

ج. عين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$



II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;i;j)$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ، فسر النتيجتين هندسيا.

2. أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$$

ب. احسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. أ. باستعمال الجزء I) السؤال ج. عين إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

حل التمرين 15 :

I) أ. تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	
$g(x)$	1	↗	$\|\|$	↘	1
		$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	

ب. حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$:

الحل البياني للمتراجحة $g(x)>0$ هو :

$x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

ج. تعيين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$:

من البيان $0<g(x)<1$ لما : $x\in]1;+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$

و تفسير النتيجتين هندسيا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=1$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$$

التفسير البياني :

$x=1$ مستقيم مقارب عمودي يوازي (yy') بجوار $(-\infty)$.

$y=1$ مستقيم مقارب أفقي يوازي (xx').

2. أ. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

ب. حساب f' و دراسة إشارتها :

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-1)+2(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}$$

دراسة إشارة المشتقة : بما أن $x>1$ فإن :

$x-1>0$ و $\frac{4x}{(x+1)^2}>0$ و عليه من أجل كل x من $]1,+\infty[$:

$f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1

3. تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$:

مما سبق من أجل $x>1$ لدينا : $0<\frac{x-1}{x+1}<1$

و نعلم أن $\ln a<0$ لما $a\in]0,1[$ و بالتالي :

$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<0$ و بالتالي إشارة العبارة سالبة.

التمرين 16 :

I) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ بـ : $f(x)=1+\ln(2x-1)$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} f(x)$.

2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) عين فاصلة النقطة (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$.

4) أ) أثبت أنه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=\ln(x+a)+b$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبرية $\ln$ ثم ارسم (C) و (C_f).

II) نعتبر الدالة g العددية المعرفة على المجال I بـ: $g(x)=f(x)-x$.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} g(x)$ ثم بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على I ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) أحسب $g(1)$ ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ حلا وحيدا α. تحقق أن: $2<\alpha<3$.

ب) ارسم (C_g) منحنى الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2},5\right[$ في المعلم السابق.

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (d).

5) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1,\alpha[$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1,\alpha[$.

III) نسمي (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N^* كما يلي: $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$.

1) عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$.

2) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$.

حل التمرين 16 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}\frac{1}{2}} f(x)=-\infty$

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$

و عليه $f'(x)>0$ في I إذن f متزايدة تماما.

على المجال I، و يكون جدول تغيراتها كما يلي:

x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3) كي يكون المماس موازيا للمنصف الأول يجب أن يتحقق ما يلي: $f'(x_0)=1$ حيث: x_0 فاصلة النقطة المطلوبة.

لدينا: $f'(x_0)=1$ تعني $\frac{2}{2x_0-1}=1$ أي $x_0=\frac{3}{2}$

4) أ) لدينا من أجل كل x من I:

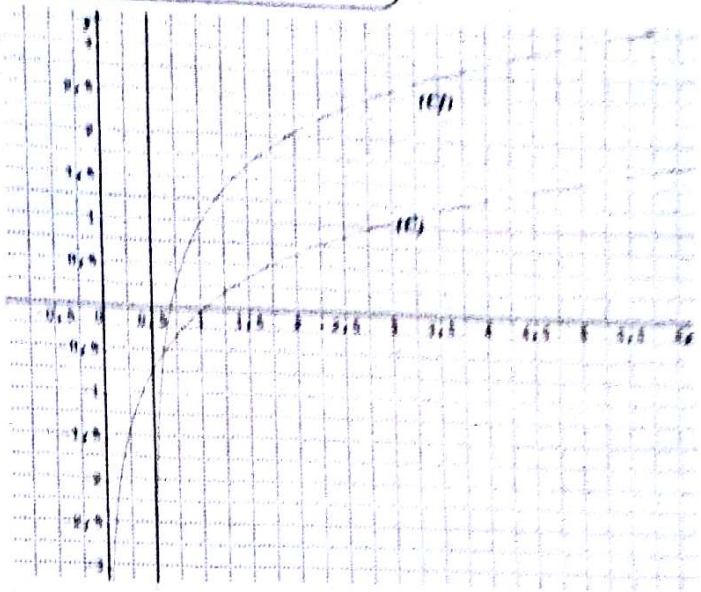
$$f(x)=1+\ln(2x-1)=1+\ln 2\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=1+\ln 2+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)=\ln(2e)+\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

و منه: $a=-\frac{1}{2}$ و $b=\ln 2e$

ب) حسب الكتابة $f(x)=\ln(x+a)+b$ فإن (C_f) هو صورة (C) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\left(\frac{1}{2},\ln 2e\right)$

و بالتالي يكون رسم (C) و (C_f) حيث: $\ln 2e\approx 1,7$



II) 1) $\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} 1+\ln(2x-1)-x = -\infty$

و بالتالي يكون رسم (C) و (C_f) حيث : $\ln 2e \approx 1,7$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1+\ln(2x-1)-x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1+x\left(\frac{\ln(2x-1)}{x}-1\right) = -\infty$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x-1)}{x} = 0$

2) الدالة g تقبل الاشتقاق على I و لدينا :

$$g'(x) = \frac{-2x+3}{2x-1}$$

$g'(x)=0$ تعني $x=\frac{3}{2}$ حيث : $g'(x)>0$ لما $x<\frac{3}{2}$

و $g'(x)<0$ لما $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$

و منه جدول تغير الدالة g يكون كما يلي :

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}+\ln 2$	↘	$-\infty$

3) $g(1)=0$ الدالة g رتيبة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

و بالتالي صورة المجال $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$ بالدالة g هي المجال

$\left]-\infty,-\frac{1}{2}+\ln 2\right[$.

و بما أن $-\frac{1}{2}+\ln 2>0$ ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة

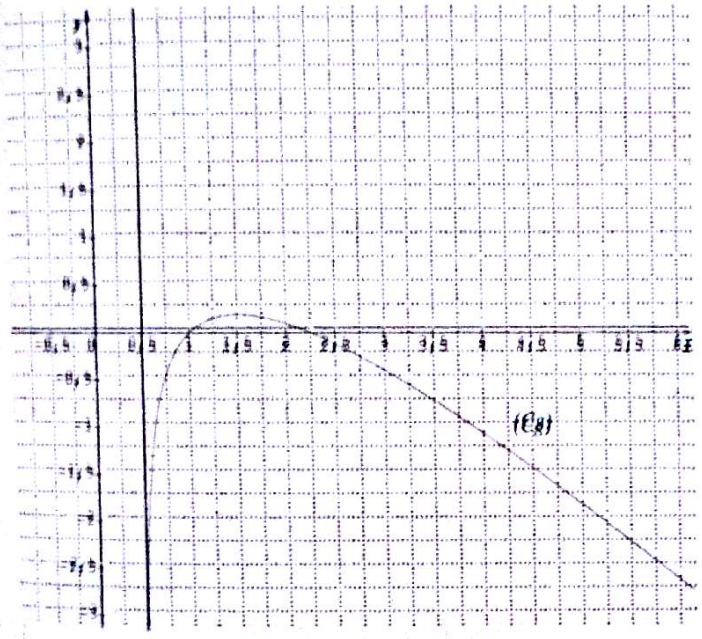
يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

بحيث $g(\alpha)=0$ ، الدالة g رتيبة تماما على المجال $]2,3[$

ولدينا $g(2)g(3)<0$ و بما أن α وحيد فهذا يعني :

أن $2<\alpha<3$

ب) رسم (C_g) :



4) حسب البيان فإن $g(x)\geq 0$ لما $x\in[1,\alpha]$

و $g(x)\leq 0$ لما $x\in\left]\frac{1}{2},1\right]\cup[\alpha,+\infty[$

تتحدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (d) بدراسة إشارة الفرق $f(x)-x$ أي $g(x)$ و كما هو موضح سابقا فإن في المجال $[1,\alpha]$ يكون (C_f) تحت (d) و في المجال $\left]\frac{1}{2},1\right]\cup[\alpha,+\infty[$ يكون (C_f) فوق (d) .

5) الدالة f متزايدة تماما على $[1,\alpha]$ و بالتالي من أجل $1\le x\le\alpha$ نجد $f(1)\le f(x)\le f(\alpha)$ و لكن :

$f(1)=1$ و $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=\alpha$

لأن : $g(\alpha)=0$ و منه $1\le f(x)\le\alpha$

III) 1) لدينا $u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

و بالتالي : $u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$ تعني

$1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+2\ln 3-3\ln 2$

أي $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{9}{8}$ أي $n=8$

2) $S_n=u_1+u_2+....+u_n=1+\ln\left(1+\frac{1}{2\times1}\right)$

$+1+\ln\left(1+\frac{1}{2\times2}\right)+....+1+\ln\left(1+\frac{1}{2\times n}\right)$

$=n+\ln\left(\frac{3}{2\times1}\right)+\ln\left(\frac{5}{2\times2}\right)+...+\ln\left(\frac{2n+1}{2\times n}\right)$

$=n+\ln\frac{3\times5\times7\times...\times(2n+1)}{2^2\times1\times2\times3\times...\times n}$

$S_n=n+\ln\frac{3\times5\times7\times...\times(2n+1)\times2\times4\times6\times...\times2n}{2^n\times(1\times2\times3\times...\times n)^2\times2^n}$

$=n+\ln\frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$

التمرين 17 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R^* كما يلي : $f(x)=x-\frac{1}{e^x-1}$ نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ وفسر هندسيا النتيجة .

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y=x$ و $y=x+1$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4) أثبت أن النقطة $\omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5) أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2<\alpha<1$ و $-1,4<\beta<-1,3$.

ب) هل توجد مماسات لـ: (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟

ج) ارسم (Δ) و (Δ') و (C_f) .

حل التمرين 17 :

1) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=+\infty$

هذا يعني أن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f).

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على مجالي تعريفها و لدينا :

$f'(x)=1+\frac{e^x(e^x)}{(e^x-1)^2}$ و عليه $f'(x)>0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على مجالي تعريفها و يكون جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	

3) أ) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x-1}=0$

يعني أن (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ و لدينا أيضا:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x-1)=\lim_{x\to-\infty}\left(-1-\frac{1}{e^x-1}\right)=0$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ مما يعني أن (Δ') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$.

ب) وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$ أي $\dfrac{-1}{e^x-1}$.

الجدول الموالي يوضح إشارة $-\dfrac{1}{e^x-1}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\dfrac{1}{e^x-1}$	$+$	‖	$-$

إذن في المجال $]-\infty,0[$ يكون (C_f) فوق (Δ) و في المجال $]0,+\infty[$ يكون (C_f) تحت (Δ) .

وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ') ندرس الفرق $f(x)-x-1$ أي دراسة إشارة $\dfrac{-e^x}{e^x-1}$ و عليه :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\dfrac{e^x}{e^x-1}$	$+$	‖	$-$

إذن في المجال $]-\infty,0[$ و في المجال يكون (C_f) فوق (Δ') و في المجال $]0,+\infty[$ يكون (C_f) تحت (Δ') .

4) حتى تكون النقطة $\omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر (C_f) يجب تحقق ما يلي : مجموعة التعريف تكون متناظرة بالنسبة إلى العدد 0 ، و هو محقق ، و من أجل كل x من R^* :

$$f(-x)+f(x)=2\times\frac{1}{2}=1$$

لدينا :

$$f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^x-1}$$

$$f(-x)+f(x)=-\frac{e^x}{1-e^x}-\frac{1}{e^x-1}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{e^x-1}=1$$

مما يعني أن النقطة $\omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر (C_f).

5) أ) الدالة f رتيبة تماما على المجال $[\ln 2,1]$ و لدينا :

$$f(1)f(\ln 2)<0 \text{ لأن } f(1)\approx 0{,}42$$

و $f(\ln 2)\approx -0{,}31$ و حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد من المجال $[\ln 2,1]$ بحيث : $f(\alpha)=0$ و بنفس الطريقة نثبت وجود العدد الحقيقي β من المجال $[-1{,}4,-1{,}3]$ بحيث : $f(\beta)=0$

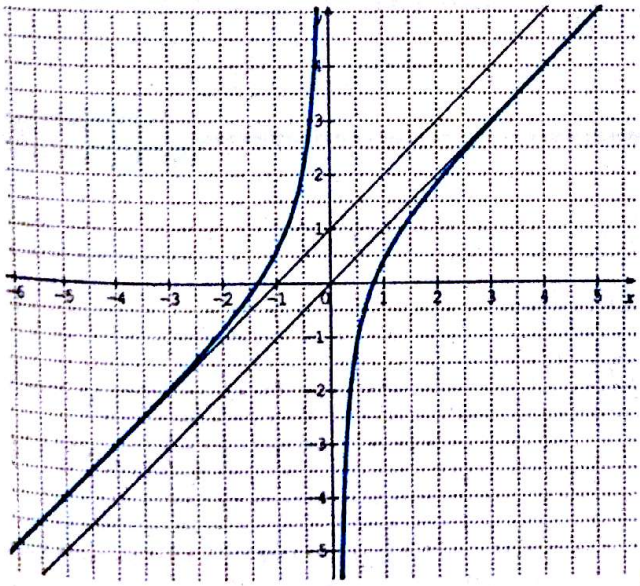
ب) مماسات (C_f) التي توازي المستقيم (Δ) :

تحقق $f'(x)=1$ أي $1+\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=1$

أي $\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=0$ و هي معادلة ليست لها حلول في R^*

مما يعني أنه لا توجد مماسات توازي (Δ).

ج) الرسم :



التمرين 18 :

الجزء الأول :

h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ و استنتج اتجاه تغير الدالة h

ثم أنجز جدول تغيراتها .

3) أحسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x.

الجزء الثاني :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) أ/ أحسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ ثم فسر هذه النتيجة .

ب/ باستخدام النتيجة $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ،

برهن أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

جـ/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د/ أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين ان المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4 .

4) أرسم (C_f) .

حل التمرين 18 :

الجزء الأول :

h دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$$

1) $\lim\limits_{x\to-1} h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$

2) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال

$]-1;+\infty[: h'(x)=2x+2+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2(x+1)^2+1}{x+1}$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x)\succ 0$.

ومنه الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة h :

قيم x	-1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$+$	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3) $h(0)=0$

ومنه :

قيم x	-1		0		$+\infty$
إشارة $h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الجزء الثاني :

لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

1) أ/ $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=+\infty$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته : $x=-1$

ب/ إثبات أن : $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

بوضع : $\ln x = X$ فإن : $x=e^X$

لما : $x\to+\infty$ فإن : $X\to+\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^X}{X}}0$

جـ/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

د/

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=0$$

ومنه يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) معادلته :

$y=x-1$.

هـ) ندرس إشارة : $f(x)-(x-1)$:

$$f(x)-(x-1)=-\frac{\ln(x+1)}{x-1}$$

قيم x	-1		0		$+\infty$
إشارة : $\ln(x-1)$	‖	$-$	0	$+$	
إشارة : $x-1$	‖	$+$		$+$	
إشارة : $f(x)-(x-1)$	‖	$+$	0	$-$	

ـ إذا $x\in]-1;0[$ فإن (C_f) يقع فوق المقارب المائل .

ـ إذا $x\in]0;+\infty[$ فإن (C_f) يقع تحت المقارب المائل .

ـ إذا $x=0$ فإن (C_f) يقطع المقارب المائل .

2) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=1-\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

جدول تغيرات f :

قيم x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

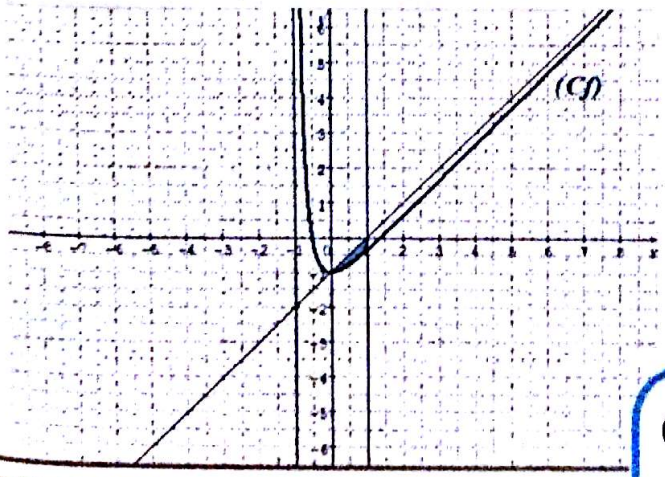
3) نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة f مستمرة و متزايدة على $[3,3;3,4]$

و $f(3,3)=1,96$ و $f(3,4)=2,06$

أي : $f(3,3)\prec f(2)\prec f(3,4)$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4) إنشاء (C_f) :



التمرين 19 :

❶ h دالة معرفة على R كما يلي: $h(x)=e^x-2x$

أ/ أحسب نهايات الدالة h عند $-\infty$ و $+\infty$.

ب/ أدرس تغيرات الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها .

جـ/ استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$e^x-2x\geq 2(1-\ln 2)$$

❷ g دالة معرفة على R كما يلي: $g(x)=x.e^x-2e^x+2$

أ/ علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ فأثبت أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}x.e^x=0$

(يمكن وضع : $t=-x$) .

ثم استنتج نهاية الدالة g عند $-\infty$.

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$g(x)=e^x.\left(x-2+2e^{-x}\right)$ ثم أحسب نهاية الدالة g عند $+\infty$.

جـ/ أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

د/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,5<\alpha<1,7$.

هـ/ أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من R .

❸ f الدالة المعرفة على R كما يلي : $f(x)=\dfrac{-e^x+4x-2}{e^x-2x}$

وليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، وحدة الطول هي $2cm$.

أ/ أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ وفسر النتائج بيانيا .

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$f'(x)=\dfrac{-2.g(x)}{(e^x-2x)^2}$ ثم أدرس تغيرات الدالة f

وشكل جدول تغيراتها.

جـ/ • عين إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-2$ ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ) .

• عين إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم (Δ') الذي معادلته $y=-1$ ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ') .

د/ بين أن: $f(\alpha)=\dfrac{-2\alpha+3}{\alpha-1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

هـ/ أنشئ (C) .

و/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m بيانيا عدد و إشارة حلول المعادلة :

$$(m+1)e^x-2(m+2).x+2=0$$

حل التمرين 19 :

❶ h دالة معرفة على R كما يلي: $h(x)=e^x-2x$

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)$

$=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$

ب/ من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $h'(x)=e^x-2$

ومنه: h متزايدة على المجال $]\ln 2;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty;\ln 2[$

جدول التغيرات:

قيم x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
إشارة $h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$2-2\ln 2$	↗	$+\infty$

جـ/ نلاحظ من تغيرات الدالة h أن للدالة قيمة حدية صغرى وتساوي $2-2\ln 2$ لما $x=\ln 2$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$h(x)\geq 2(1-\ln 2)$ أي $e^x-2x\geq 2(1-\ln 2)$

❷ g دالة معرفة على R كما يلي: $g(x)=x.e^x-2e^x+2$

أ/ إثبات أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^x=0$

نضع $t=-x$ ومنه $x=-t$

لما $x\to-\infty$ فإن $t\to+\infty$

ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^x=\lim\limits_{t\to+\infty}-t.e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}-\dfrac{t}{e^t}=0$

(لأن $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$)

ولدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x.e^x-2e^x+2\right)=2$

ب/ التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$g(x)=x.e^x-2e^x+2=e^x.\left(x-2+2e^{-x}\right)$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

جـ/ من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x)=e^x(x-1)$

ومنه: g متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty;1]$

جدول التغيرات:

قيم x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	2	↘	$2-e$	↗	$+\infty$

د/ نلاحظ من جدول التغيرات أن الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[1.5;1.7]$

و $g(1.5)=-0.2$ و $g(1.7)=0.3$ أي $g(1.5)\times g(1.7)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,5<\alpha<1,7$

هـ/ $g(0)=0$

قيم x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

❸ f الدالة المعرفة على R كما يلي: $f(x)=\dfrac{-e^x+4x-2}{e^x-2x}$

أ/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ ومنه (C) يقبل مستقيمين مقاربين معادلاتاهما $y=-2$ و $y=-1$

ب/ من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x)=\dfrac{-2.g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$

قيم x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

جدول التغيرات:

قيم x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
إشارة $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↘	-3	↗	$f(\alpha)$	↘	-1

جـ/ $\dfrac{-e^x+4x-2}{e^x-2x}=-2$ ومنه $e^x-2=0$

ومنه $x=\ln 2$

ومنه إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-2$ هي: $(\ln 2;-2)$

$\frac{-e^x+4x-2}{e^x-2x}=-1$ ومنه $2x-2=0$ ومنه $x=1$

ومنه إحداثيات نقطة تقاطع (C) والمستقيم (Δ') الذي معادلته $y=-1$ هي: $(1;-1)$

دراسة وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ): $f(x)-y=\frac{e^x-2}{e^x-2x}$

قيم x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
إشارة e^x-2	$-$	0	$+$
إشارة e^x-2x	$+$		$+$
إشارة $f(x)-y$	$-$	0	$+$
وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ)	تحت	يقطع	فوق

دراسة وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ'): $f(x)-y=\frac{2x-2}{e^x-2x}$

قيم x	$-\infty$	1	$+\infty$
إشارة $2x-2$	$-$	0	$+$
إشارة e^x-2x	$+$		$+$
إشارة $f(x)-y$	$-$	0	$+$
وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ')	تحت	يقطع	فوق

د/ $f(\alpha)=\frac{-e^\alpha+4\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha}$.....(1)

و $g(\alpha)=\alpha.e^\alpha-2e^\alpha+2=0$ ومنه $e^\alpha=\frac{-2}{\alpha-2}$

نعوض $e^\alpha=\frac{-2}{\alpha-2}$ في العلاقة (1) نجد:

$f(\alpha)=\frac{-2\alpha+3}{\alpha-1}$

حصر $f(\alpha)$: (باستعمال خواص الحصر نجد:

$(-0.8<f(\alpha)<0$

لدينا: $1,5<\alpha<1,7$ ومنه: $-3>-2\alpha>-3.4$

ومنه: $0>-2\alpha+3>-0.4$

ومنه: $-0.4<-2\alpha+3<0$

لدينا: $1,5<\alpha<1,7$ ومنه: $0,5<\alpha-1<0,7$

ومنه: $\frac{1}{0.7}<\frac{1}{\alpha-1}<\frac{1}{0.5}$ ومنه: $\frac{1}{0.7}<\frac{1}{\alpha-1}<\frac{1}{0.5}$

لدينا: $-0.4<-2\alpha+3<0$

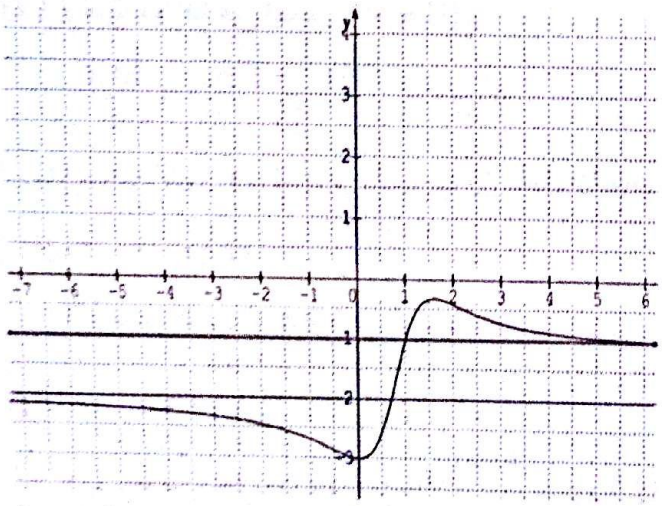
ومنه $0<-(-2\alpha+3)<0.4$

ولدينا: $\frac{1}{0.7}<\frac{1}{\alpha-1}<\frac{1}{0.5}$

ومنه: $\frac{0}{0.7}<\frac{-(-2\alpha+3)}{\alpha-1}<\frac{0.4}{0.5}$

ومنه: $-0.8<f(\alpha)<0$

هـ/ إنشاء (C):



و/ المناقشة البيانية: $(m+1)e^x-2(m+2).x+2=0$:

لدينا: $(m+1)e^x-2(m+2).x+2=0$

أي: $m.e^x+e^x-2m.x-4x+2=0$

ومنه: $m.(e^x-2x)=-e^x+4x-2$

ومنه: $m=\frac{-e^x+4x-2}{e^x-2x}$

ومنه $m = f(x)$ و حلول المعادلة $f(x) = m$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C) والمستقيم الذي معادلته $y = m$

- $m \in]-\infty;-3[$ المعادلة لا تقبل حلولا.
- $m = -3$ المعادلة تقبل حلا معدوما
- $m \in]-3;-1[$ المعادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة.
- $m \in [-1;0]$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.
- $m \in]0;f(\alpha)[$ المعادلة تقبل حلان موجبان تماما.
- $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلا موجبا تماما.
- $m \in]f(\alpha);+\infty[$ المعادلة لا تقبل حلولا.

التمرين 20:

I) h دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$h(x) = 3 - 3x^2 - 2\ln x$$

1- عين نهايتي h عند 0 و عند $+\infty$.

2- أدرس اتجاه تغير الدالة h

3- أحسب $h(1)$ ثم استنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) f دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{-3x^2 - 1 + x}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ فسر النتيجة هندسيا.

ب) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2- أ) بين انه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ $f'(x) = \frac{h(x)}{2x^2}$: ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

ب) أنجز جدول تغيرات الدالة f.

3- أ) بين أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب لـ (C_f).

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T)

4- ارسم (T) و (C_f).

حل التمرين 20 :

I) نعتبر: $h(x) = 3 - 3x^2 - 2\ln x$ و $]0;+\infty[$

1- $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

2- اتجاه تغير الدالة h : الدالة h قابلة الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و لدينا :

$$h'(x) = -6x - \frac{2}{x} = \frac{-2(3x^2+1)}{x}$$

بما أن $h'(x) < 0$ فالدالة h متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\!\|$	$-$	
$h(x)$	$\|\!\|$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

3- $h(1) = 0$ إشارة $h(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	$\|\!\|$	$+$	0	$-$	

II) نعتبر: $f(x) = \frac{-3x^2 - 1 + x}{2x} + \frac{\ln x}{x}$

حيث $D_f =]0;+\infty[$

1- أ) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2- أ) الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و لدينا :

$$f'(x) = \frac{(-6x+1)(2x) - 2(-3x^2+x-1)}{4x^2} + \frac{\frac{1}{x}(x) - \ln x}{x^2}$$

أي $f'(x)=\frac{-6x^2+2}{4x^2}+\frac{4-4\ln x}{4x^2}$ أي

$$f'(x)=\frac{-6x^2+6-4\ln x}{4x^2}$$

$$=\frac{-3x^2+3-2\ln x}{2x^2}=\frac{h(x)}{2x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $h(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

ب) جدول تغيرات الدالة f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

3- أ) $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

معناه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}))=0$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}))=\lim_{x\to+\infty}(\frac{-1}{2x}+\frac{\ln x}{x})=0$$

ومنه (T) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

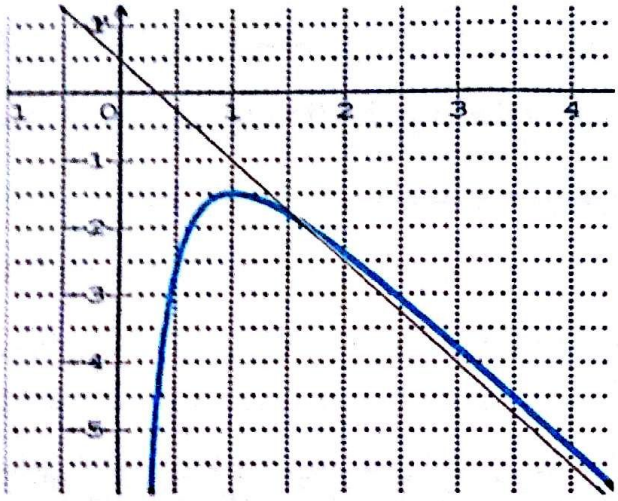
ب) الوضعية : لدينا $f(x)-y=-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$

$\frac{-1+2\ln x}{2x}=0$ تكافئ $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ ومنه (C_f) يقطع (T) في النقطة $(\sqrt{e};f(\sqrt{e}))$ حيث :

$$f(\sqrt{e})=\frac{1-3\sqrt{e}}{2}$$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f(x)-y=-\frac{1}{2x}+\frac{\ln x}{x}$	$-$	0	$+$
الوضعية	(D) يقع تحت	(D)	(C_f) يقع فوق

4- رسم (T) و (C_f)



الهندسة الفضائية

■ الجداء السلمي في الفضاء:

الجداء السلمي لشعاعين : $(\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0})$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء ، توجد ثلاث نقاط من الفضاء $A;B;C$ حيث : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ أي

يوجد مستو (P) يشمل النقط $A;B;C$ ومنه الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في الفضاء هو نفسه الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في المستوى (P) ولدينا الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هوا العدد الحقيقي:

$$\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 \text{ و } \vec{u}.\vec{v} = \|u\|.\|v\|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$$

■ إذا كان : $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$

■ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$ بحيث : $(\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0})$

فإن : $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \vec{0}$ نقول أن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

خواص : ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أشعة و k عدد حقيقي .

■ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

■ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2.\vec{u}.\vec{v}$

■ $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

■ $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2.\vec{u}.\vec{v}$

■ $\vec{u}.\left(k.\vec{v}\right) = k.\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$

■ $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

العبارة التحليلية للجداء السلمي :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

و $\vec{u}(x,y,z)$ و $\vec{v}(x',y',z')$ فإن :

$$\vec{u}.\vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$$

طويلة شعاع :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

و $\vec{u}(x,y,z)$ فإن: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

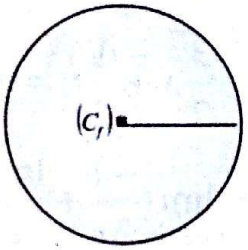
المسافة بين نقطتين :

$A(x,y,z)$ و $B(x',y',z')$ فإن:

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

معادلة سطح كرة :

لتكن (C) كرة مركزها $\omega(x_0,y_0,z_0)$ و نصف قطرها r حيث $(r>0)$.



ومن أجل كل نقطة $M(x,y,z)$ من (C)

فإن : $\omega M = r$

ومنه: $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = r$

أي معادلة (C) هي :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2$$

● **طبيعة المجموعة** (C) **للنقط** $M(x,y,z)$ **حيث:**

$$x^2+y^2+z^2+a.x+b.y+c.z+d = 0$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2+d=0$$

ومنه: $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d$

ومنه: $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

إذا كان: $a^2+b^2+c^2-4d>0$ فإن:

(C) معادلة سطح كرة مركزها $\omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$

ونصف قطرها $r=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}}$

إذا كان: $a^2+b^2+c^2-4d=0$

فإن: (C) هي نقطة $\omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2}\right)$

إذا كان: $a^2+b^2+c^2-4d<0$ فإن (C) هي مجموعة خالية.

تمرين تطبيقي

ما طبيعة مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق المعادلة:

$x^2+y^2+z^2+4.x-2.y+6.z+1=0$

الحل

لدينا: $x^2+y^2+z^2+4.x-2.y+6.z+1=0$

ومنه: $\left(x+\frac{4}{2}\right)^2+\left(y-\frac{2}{2}\right)^2+\left(z+\frac{6}{2}\right)^2-(2)^2-(1)^2-(3)^2+1=0$

ومنه: $(x+2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=13$

عبارة عن جميع نقاط سطح كرة مركزها $\omega(-2,1,-3)$

ونصف قطرها $r=\sqrt{13}$

■ المستقيمات و المستويات في الفضاء :

✓ المستقيم في الفضاء :

1) التمثيل الوسيطي لمستقيم يشمل نقطتين :

مثال : (Δ) مستقيم يشمل النقطتين $A(2,-2,3)$ و $B(-1,2,-1)$

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطتين A و B

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (Δ) فإن: $\overrightarrow{AM}=\lambda.\overrightarrow{AB}$ حيث $(\lambda\in R)$

حيث: $\overrightarrow{AM}(x-2;y+2;z-3)$ و $\overrightarrow{AB}(-3;4;-4)$

ومنه: $\begin{cases}x-2=-3.\lambda\\y+2=4.\lambda\\z-3=-4.\lambda\end{cases}$ أي: $\begin{cases}x=-3.\lambda+2\\y=4.\lambda-2\\z=-4.\lambda+3\end{cases}$

2) التمثيل الوسيطي لمستقيم يشمل نقطة ويوازي شعاع غير معدوم :

مثال : (Δ) مستقيم يشمل النقطة $A(5,-2,1)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}(1,3,4)$

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ويوازي الشعاع $\vec{u}$

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (Δ) فإن: $\overrightarrow{AM}=\lambda.\vec{u}$ حيث $(\lambda\in R)$:

ومنه : $\begin{cases} x-5=\lambda \\ y+2=3.\lambda \\ z-1=4.\lambda \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x=\lambda+5 \\ y=3.\lambda-2 \\ z=4.\lambda+1 \end{cases}$

ملاحظة : كل شعاع يوازي مستقيم هو شعاع توجيه له .

✓ المستوى في الفضاء :

1) التمثيل الوسيطي لمستو يشمل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة :

مثال : (P) مستو يشمل النقط $A(0,1,-1)$ و $B(2,1,1)$ و $C(5,0,3)$

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا لمستو يشمل ثلاث نقط A,B,C ليست على إستقامية.

نتحقق أن النقط A,B,C تشكل مستو أي أنها ليست على استقامة واحدة .

نثبت أنه لا يوجد عدد حقيقي λ حيث : $\overrightarrow{AB}=\lambda.\overrightarrow{AC}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}(2;0;2)$ و $\overrightarrow{AC}(5;-1;4)$

أي : $\begin{cases} 2=5.\lambda \\ 0=-\lambda \\ 2=4.\lambda \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} \lambda=\frac{2}{5} \\ \lambda=0 \\ \lambda=\frac{1}{2} \end{cases}$

مستحيل ، ومنه النقط A,B,C تشكل مستو أي أنها ليست على استقامة واحدة .

ومنه $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ أساس للمستوي (P) .

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (P) فإن :

$\overrightarrow{AM}=\alpha.\overrightarrow{AB}+\beta.\overrightarrow{AC}$ (حيث: $\alpha\in R$ و $\beta\in R$)

ومنه : $\begin{cases} x-5=\lambda \\ y+2=3.\lambda \\ z-1=4.\lambda \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=2\alpha+5\beta \\ y-1=0.\alpha-\beta \\ z+1=2\alpha+4\beta \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=2\alpha+5\beta \\ y=-\beta+1 \\ z=2\alpha+4\beta-1 \end{cases}$

2) التمثيل الوسيطي لمستو يشمل نقطة وشعاعان يشكلان أساسا له :

مثال : (P) مستو يشمل النقط $A(2,1,-3)$ و $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ أساسا له حيث : $\vec{u}(1;0;2)$ و $\vec{v}(-1;2;3)$

الهدف من هذا المثال تعيين تمثيلا وسيطيا لمستو يشمل النقطة A و $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ أساسا له

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (P) فإن: $\overrightarrow{AM}=\alpha.\vec{u}+\beta.\vec{v}$

(حيث : $\alpha\in R$ و $\beta\in R$)

ومنه : $\begin{cases} x-2=\alpha-\beta \\ y-1=0.\alpha+2.\beta \\ z+3=2\alpha+3\beta \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x=\alpha-\beta+2 \\ y=2.\beta+1 \\ z=2\alpha+3\beta-3 \end{cases}$

3) المعادلة الديكارتية لمستو :

• المعادلة الديكارتية لمستو يشمل نقطة ويعامد شعاع غير معدوم :

مثال : (P) مستو يشمل النقط $A(3,2,-10)$ ويعامد الشعاع $\vec{u}(1;-5;7)$.

الهدف من هذا المثال تعيين معادلة ديكارتية لمستو يشمل النقطة A ويعامد الشعاع $\vec{u}$.

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (P) فإن : $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

ولدينا: $\overrightarrow{AM}(x-3;y-2;z+10)$

ومنه : $1.(x-3)-5.(y-2)+7.(z+10)=0$

ومنه : $x-5y+7z+77=0$

• المعادلة الديكارتية لمستو يشمل ثلاث نقط ليست على إستقامية:

مثال : (P) يشمل النقط $A(1;1;3)$ ، $B(2;-4;0)$ ، $C(0;1;2)$.

نتحقق أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة :

مع $\overrightarrow{AB}(1;-5;-3)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;-1)$ ولدينا:

$\frac{0}{-5} \neq \frac{-1}{1}$ معناه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا ومنه النقط A, B, C ليست على استقامة واحدة ومنه النقط A, B, C تشكل مستو وحيد (P) أو (ABC).

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P): (نبحث عن شعاعا ناظميا للمستوي (P) نفرض أن الشعاع $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) فإن: $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$

أي: $\begin{cases} a-5b-3c=0 \\ -a-c=0 \end{cases}$

نفرض: $a=1$ ومنه فإن $c=-1$ ومنه فإن $b=\frac{4}{5}$

ومنه يكون الشعاع $\vec{n}\left(1;-1;\frac{4}{5}\right)$ شعاعا ناظميا للمستوى (P) ونلاحظ أيضا أن الشعاع: $\vec{n'}=5.\vec{n}$ شعاعا ناظميا للمستوى (P) لأن $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مرتبطان خطيا.

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (P) فإن: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n'}=0$

حيث: $\overrightarrow{AM}(x-1;y-1;z-3)$ و $\vec{n'}(5;-5;4)$

ومنه: $(x-1).(5)+(y-1).(-5)+(z-3).(4)=0$

أي: $5x-5y+4z-12=0$ معادلة (P) الديكارتية.

ملاحظات:

- الشعاع العمودي لمستو يسمى شعاع ناظمي له.
- كل مستو له معادلة ديكارتية من الشكل $a.x+b.y+c.z+d=0$ و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع ناظم له.
- المستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ معادلته من الشكل: $z=0$
- المستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$ معادلته من الشكل: $x=0$
- المستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$ معادلته من الشكل: $y=0$

ب) الانتقال من المعادلة الديكارتية لمستو إلى التمثيل الوسيطي له والعكس:

- الانتقال من المعادلة الديكارتية لمستو إلى التمثيل الوسيطي له:

(P) مستو معادلته الديكارتية من الشكل:

$$a.x+b.y+c.z+d=0$$

نفرض ثلاث نقط A, B, C من (P) ليست على استقامة واحدة فيكون $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ أساس للمستوي (P).

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (P) فإن:

$\overrightarrow{AM}=\alpha.\overrightarrow{AB}+\beta.\overrightarrow{AC}$ (حيث: $\alpha\in R$ و $\beta\in R$)

مثال: (P) مستو معادلته الديكارتية: $x+y-z+1=0$

الهدف هو إعطاء تمثيلا وسيطيا للمستوي (P).

لدينا: النقط A, B, C من (P) حيث:

$A(0;0;1)$ ، $B(0;-1;0)$ ، $C(-1;0;0)$

نتحقق أن النقط A,B,C تشكل مستو أي أنها ليست على استقامة واحدة.

لدينا: $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1;0;-1)$ لدينا:

$\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$ ومنه النقط A,B,C ليست على استقامة واحدة.

ومنه $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ أساس للمستوي (P).

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من (P) فإن:

$\overrightarrow{AM}=\alpha.\overrightarrow{AB}+\beta.\overrightarrow{AC}$ (حيث: $\alpha\in R$ و $\beta\in R$)

ومنه: $\begin{cases} x=0.\alpha-1.\beta \\ y=-1.\alpha+0.\beta \\ z-1=-1.\alpha-1.\beta \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} x=-\beta \\ y=-\alpha \\ z=-\alpha-\beta+1 \end{cases}$

- الانتقال من التمثيل الوسيطي لمستو إلى المعادلة الديكارتية له:

مثال: (P) مستو تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=2\alpha+\beta-1 \\ y=-\alpha+3\beta+2 \\ z=\alpha-\beta \end{cases}$ حيث: $\alpha\in R$ و $\beta\in R$

لاحظ أن : $\vec{u}(2;-1;1)$ و $\vec{v}(1;3;-1)$ أساسا له

و $A(-1,2,0)$ نقطة منه .

ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظم لـ (P) فإن : $\vec{n}.\vec{u}=0$

و $\vec{n}.\vec{v}=0$

ومنه : $\begin{cases}2a-b+c=0\\a+3b-c=0\end{cases}$ نفرض : $c=1$

فإن : $\begin{cases}2a-b+1=0.....(1)\\a+3b-1=0.....(2)\end{cases}$ من (1) : $b=2a+1$

نعوض في (2) نحصل على : $a+3(2a+1)-1=0$

ومنه : $a=-\frac{2}{7}$ و $b=-\frac{3}{7}$

فيكون لدينا شعاعا ناظما للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(-1,2,0)$

وهكذا نكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) .

✓ **الأوضاع النسبية لمستقيمات ومستويات في الفضاء:**

1) الوضع النسبي لمستقيمين :

في الفضاء يكون المستقيمان (Δ) و (Δ') إما :

متوازيان (غير متطابقان أو متطابقان) ـ **متقاطعان** ـ **ليسا من نفس المستوي**

مثال : (Δ) و (Δ') مستقيمان تمثيلهما الوسيطي :

$(\lambda\in R)\begin{cases}x=\lambda+1\\y=-\lambda\\z=2\lambda+3\end{cases}$ و $(t\in R)\begin{cases}x=-t+2\\y=3t\\z=-2t+1\end{cases}$

لدينا : $\vec{u}(1;-1;2)$ شعاع توجيه (Δ) و $\vec{v}(-1;3;-2)$ شعاع توجيه (Δ')

ولدينا : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطيا لأن : $\frac{1}{-1}\neq\frac{-1}{3}$

ومنه:(Δ) و (Δ') غير متوازيان .

نعوض قيم x و y و z من $\begin{cases}x=\lambda+1\\y=-\lambda\\z=2\lambda+3\end{cases}$

في $\begin{cases}x=-t+2\\y=3t\\z=-2t+1\end{cases}$

نحصل على : $\begin{cases}\lambda+1=-t+2\\-\lambda=3t\\2\lambda+3=-2t+1\end{cases}$

أي : $\begin{cases}\lambda+t-1=0....(1)\\3t+\lambda=0.....(2)\\2\lambda+2t+2=0.....(3)\end{cases}$

من (2) : $\lambda=-3t$ نعوض في (1) و (3) نجد : $\begin{cases}t=\frac{-1}{2}\\t=\frac{1}{2}\end{cases}$

مستحيل ومنه (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

2) الوضع النسبي لمستويين :

في الفضاء يكون المستويان (P) و (P') إما : **متوازيان** (غير متطابقان أو متطابقان) ـ **متقاطعان في مستقيم** .

مثال: (P) مستو معادلته : $x-y+z-1=0$

و (P') مستو معادلته : $2x-2y+2z-5=0$

لدينا : $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع ناظمي لـ (P)

و $\vec{n'}(2;-2;2)$ شعاع ناظمي لـ (P')

لاحظ أن : $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مرتبطان خطيا لأن : $\vec{n'}=2.\vec{n}$

ومنه : (P) و (P') متوازيان .

مثال: (P) مستو معادلته : $x-y+z-1=0$

و (P') مستو معادلته : $2x-3y+z-5=0$

لدينا : $\vec{n}(1;-1;1)$ شعاع ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}(2;-3;1)$ شعاع ناظمي لـ (P')

لاحظ أن: $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطان خطيا لأن: $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-3}$

ومنه (P) و (P') متقاطعان في مستقيم (Δ).

ولدينا: $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ نضع: $z=\lambda$

ومنه: من (1): $x=y-\lambda+1$

نعوض في (2) نجد: $y=-\lambda+2$ ومنه: $x=-2\lambda+3$

ومنه التمثيل الوسيطي لـ (Δ): $\begin{cases} x=-2\lambda+3 \\ y=-\lambda+2 \\ z=\lambda \end{cases}$

حيث $\lambda \in R$

3) الوضع النسبي لمستقيم و مستوي:

في الفضاء يكون المستوي (P) والمستقيم (Δ)

إما: متوازيان. (Δ) محتوى في (P). (P) و (Δ) متقاطعان في نقطة.

ملاحظات:

- إذا كانت نقطتان من مستقيم (Δ) تنتميان لمستو (P) فإن $(\Delta) \subset (P)$.
- نفرض $\vec{n}$ شعاعا ناظميا للمستوي (P) و $\vec{U}$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ):

إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{U}$ متعامدان فإن (Δ) يوازي (P).

إذا كان $\vec{n}$ و $\vec{U}$ متوازيان فإن (Δ) يعامد (P).

المسافة بين نقطة ومستوي:

(P) مستو معادلته الديكارتية من الشكل $a.x+b.y+c.z+d=0$ و $A(x_A, y_A, z_A)$ فإن:

$$d((P), A)=\frac{|a.x_A+b.y_B+c.z_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

تمارين

في كل التمارين الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

التمرين 01:

1) (D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب:

$\begin{cases} x=4-2t \\ y=2+4t \\ z=t \end{cases}$ و $\begin{cases} x=-2k \\ y=1+4k \\ z=k \end{cases}$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

بين أن (D) و (T) متوازيان.

2) (D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب:

$\begin{cases} x=-3+t \\ y=t \\ z=1+3t \end{cases}$ و $\begin{cases} x=-1+k \\ y=2-2k \\ z=5+3k \end{cases}$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

بين أن (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

3) (D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب:

$\begin{cases} x=-3+2t \\ y=2-t \\ z=1+t \end{cases}$ و $\begin{cases} x=k \\ y=1-k \\ z=-1+4k \end{cases}$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

بين أن (D) و (T) متقاطعان.

حل التمرين 01:

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (D)

و $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (T)

لدينا: $\frac{1}{1}=1$ و $\frac{-2}{-2}=\frac{1}{1}=1$ إذن: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان.

ومنه المستقيمان (D) و (T) متوازيان.

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (T)

لدينا: $\frac{-2}{1}\neq\frac{1}{1}$ إذن: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متوازيان.

ومنه: (D) و (T) ليسا متوازيان.

معناه (D) و (T) إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

لدينا: $\begin{cases}x=-3+t\\y=t\\z=1+3t\end{cases}$ و $\begin{cases}x=-1+k\\y=2-2k\\z=5+3k\end{cases}$

نبحث عن نقطة تقاطع المستقيمان إن وجدت:

نضع: $\begin{cases}-3+t=-1+k\\t=2-2k\\1+3t=5+3k\end{cases}$

نعوض t من المعادلة 2 في كل من المعادلات 1 و 3

نحصل على:

$\begin{cases}-3+2-2k=-1+k\\1+3(2-2k)=5+3k\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}0=3k\\2=9k\end{cases}$

ومنه $\begin{cases}0=k\\\frac{2}{9}=k\end{cases}$ وهذا تناقض.

نستنتج أن: (D) و (T) لا يتقاطعان ومنه (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (T)

لدينا: $\frac{-1}{-1}\neq\frac{2}{1}$ إذن: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متوازيان.

ومنه: (D) و (T) ليسا متوازيان.

معناه (D) و (T) إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

لدينا: $\begin{cases}x=-3+2t\\y=2-t\\z=1+t\end{cases}$ و $\begin{cases}x=k\\y=1-k\\z=-1+4k\end{cases}$

نضع: $\begin{cases}-3+2t=k\\2-t=1-k\\1+t=-1+4k\end{cases}$ من المعادلة 2 لدينا: $t=1+k$

ثم نعوض t في كل من المعادلات 1 و 3 نحصل على:

$t=2$: فتكون $\begin{cases}1=k\\1=k\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}-3+2(1+k)=k\\1+1+k=-1+4k\end{cases}$

من أجل $k=1$ نحصل على $\begin{cases}x=1\\y=1-1=0\\z=-1+4=3\end{cases}$

أو من أجل $t=2$ نحصل على: $\begin{cases}x=-3+2(2)=1\\y=2-2=0\\z=1+2=3\end{cases}$

نستنتج أن: (D) و (T) يتقاطعان في النقطة $A(1;0;3)$

التمرين 02:

في كل حالة من الحالات التالية عين تقاطع المستوي (P) والمستقيم (D)

1) $(D):\begin{cases}x=t\\y=-1+3t\\z=2+t\end{cases}$ و $(P):-2x+y-z+3=0$

2) $(D):\begin{cases}x=1+3t\\y=-2-2t\\z=2\end{cases}$ و $(P):x+3y-z+1=0$

3) $(D):\begin{cases}x=5+t\\y=1+t\\z=4+t\end{cases}$ و $(P):x+y-2z+2=0$

حل التمرين 02 :

نعوض x، y، z في معادلة المستوي (P) لنحصل على قيمة الوسيط t ثم نبحث عن إحداثيات نقطة التقاطع إذا وجدت.

أما إذا كانت المعادلة محققة من أجل كل عدد حقيقي t فإن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P) :

1) $\begin{cases} -2x+y-z+3=0 \\ x=t \\ y=-1+3t \\ z=2+t \end{cases}$

ومنه: $-2(t)+(-1+3t)-(2+t)+3=0$

أي: $-2t-1+3t-2-t+3=0$

أي: $0=0$ دائما محققة

نستنتج أن: (D) محتوى في المستوي (P)

ومنه $(D)\cap(P)=(D)$

2) $\begin{cases} x+3y-z+1=0 \\ x=1+3t \\ y=-2-2t \\ z=2 \end{cases}$

ومنه : $1+3t+3(-2-2t)-2+1=0$

أي $1+3t-6-6t-1=0$

أي $-3t=6$

أي $t=-2$

بالتعويض في معادلات (D): $\begin{cases} x=1+3(-2)=-5 \\ y=-2-2(-2)=2 \\ z=2 \end{cases}$

نستنتج أن: $(D)\cap(P)=\{A(-5;2;2)\}$

3) $\begin{cases} x+y-2z+2=0 \\ x=5+t \\ y=1+t \\ z=4+t \end{cases}$

ومنه $5+t+1+t-2(4+t)+2=0$

أي: $8-2t-8-2t+6=0$ أي: $6=0$ مستحيل

ومنه نستنتج أن : $(D)\cap(P)=\phi$

التمرين 03 :

نعتبر المستقيمات الثلاثة (D3); (D2) ;(D1) حيث :

$$(D3)\quad \begin{cases} x-y-2z=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$$

$$(D2)\quad \begin{cases} x=5-4t' \\ y=-2t' \\ z=-1+2t' \end{cases} \quad ;t'\in R$$

$$(D1)\quad \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+t \\ z=1-t \end{cases} \quad ;t\in R$$

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D_3) .

2) بين أن المستقيمين (D_1) و (D2) متطابقان .

3) بين أن المستقيمين (D_1) و (D_3) ليس من نفس المستوي.

4) (Δ) مستقيم يمر من النقطة A (5 , -1 , 4) و شعاع توجيهه $\vec{u}\ (3,1,1)$. بين أن المستقيمين (D_1) و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثياتها.

حل التمرين 03 :

1) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D_3) :

نكتب x و y بدلالة z (z وسيط) .

لدينا : $\begin{cases} x-y-2z=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$ و منه : $\begin{cases} x-y=2z \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

و عليه : $\begin{cases} 3x-3y=6z \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

بجمع المعادلتين نجد : $5x=6z$ و منه : $x=\frac{6}{5}z$

و بالتعويض في المعادلة $x-y=2z$ نجد :

$$y=x-2z=\frac{6}{5}z-2z=-\frac{4}{5}z$$

إذن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D_3) هو : $\lambda \in R$;

$$(D_3): \begin{cases} x = \frac{6}{5}\lambda \\ y = -\frac{4}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

2) إثبات أن المستقيمين (D_1) و (D2) متطابقان :

لدينا شعاع توجيه المستقيم (D_1) هو $\vec{n_1}(2,1,-1)$

و شعاع توجيه المستقيم (D2) هو $\vec{n_2}(-4,-2,2)$.

نلاحظ أن : $\vec{n_2} = -2\vec{n_1}$ و عليه فإن المستقيمين (D_1) و (D2) متوازيان.

من جهة أخرى النقطة A (1 , -2 , 1) تنتمي إلى (D_1) من أجل $t = 0$ و تنتمي إلى (D2) من أجل $t' = 1$

وبالتالي المستقيمين (D_1) و (D2) متوازيان و لهما نقطة مشتركة و بالتالي فإن المستقيمين (D_1) و (D2) متطابقان.

3) إثبات أن المستقيمين (D_1) و (D_3) ليس من نفس المستوي :

لدينا شعاع توجيه المستقيم (D_1) هو $\vec{n_1}(2,1,-1)$

و شعاع توجيه المستقيم (D_3) هو $\vec{n_3}\left(\frac{6}{5},-\frac{4}{5},1\right)$.

نلاحظ أن : $\frac{1}{-\frac{4}{5}} \neq \frac{2}{\frac{6}{5}}$ و عليه فإن المستقيمين (D_1) و (D_3) غير متوازيان أي أنهما إما متقاطعان أو ليس من نفس المستوي .

دراسة تقاطع المستقيمين (D_1) و (D_3) :

$$\begin{cases} \frac{6}{5}\lambda - 2t = 1 .....(1) \\ -\frac{4}{5}\lambda - t = -2 .....(2) \\ \lambda + t = 1 .....(3) \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} \frac{6}{5}\lambda = 1 + 2t \\ -\frac{4}{5}\lambda = -2 + t ; t \in R \\ \lambda = 1 - t \end{cases}$$

من (2) و (3) نجد : $-\frac{4}{5}\lambda + \lambda = -1$ ومنه : $\frac{1}{5}\lambda = -1$

و عليه فإن : $\lambda = -5$ و منه : $t = 6$.

بالتعويض في المعادلة (1) نجد :

$$\frac{6}{5}(-5) - 2\times 6 = -6 - 12 = -18 \neq 1$$

بما أن الجملة ليست لها حل و بالتالي فإن المستقيمين (D_1) و (D_3) غير متقاطعان يعني أنهما ليس من نفس المستوي

4) إثبات أن المستقيمين (D_1) و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة يطلب تعيينها :

التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) :

بما أن للمستقيم (Δ) يمر من النقطة A (5 , -1 , 4)

و شعاع توجيهه $\vec{u}(3,1,1)$ و لتكن M (x , y , z) نقطة من (Δ) معناه $\overrightarrow{AM} = \alpha.\vec{u}$

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-5; y+1; z-4)$

$$\text{و عليه : } \begin{cases} x - 5 = 3\alpha \\ y + 1 = \alpha \\ z - 4 = \alpha \end{cases} ; \alpha \in R$$

$$\text{أي : } \begin{cases} x = 3\alpha + 5 \\ y = \alpha - 1 \\ z = \alpha + 4 \end{cases} ; \alpha \in R$$

إثبات أن المستقيمين (D_1) و (Δ) يتقاطعان :

لدينا شعاع توجيه المستقيم (D_1) هو $\vec{n_1}(2,1,-1)$

و شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو $\vec{u}(3,1,1)$.

نلاحظ أن : $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{1}$ و عليه فإن المستقيمين (D_1) و (Δ) غير متوازيان و بالتالي هما إما متقاطعان أو ليس من نفس المستوي .

دراسة تقاطع المستقيمين (D_1) و (Δ) :

$$\begin{cases} 5 + 3\alpha = 1 + 2t \\ -1 + \alpha = -2 + t ; t \in R \\ 4 + \alpha = 1 - t \end{cases}$$

$$\text{و منه : } \begin{cases} 3\alpha - 2t = -4 .....(1) \\ \alpha - t = -1 .....(2) \\ \alpha + t = -3 .....(3) \end{cases}$$

من (2) و (3) نجد : $2\alpha = -4$ و منه : $\alpha = -2$

و عليه فإن : $-3 = t - 2 + 2$ و منه : $t = -1$.

بالتعويض في المعادلة (1) نجد : $-6 + 2 = -4$ أي أن الجملة تقبل حل وحيد هو $\alpha = -2$ و $t = -1$.

و بالتالي فإن المستقيمين (D_1) و (Δ) يتقاطعان في نقطة واحدة هي :

من أجل $\alpha = -2$:
$$\begin{cases} x = 3(-2) + 5 = -1 \\ y = -2 - 1 = -3 \\ z = -2 + 4 = 2 \end{cases}$$

إذن : $(D_1) \cap (\Delta) = \{(-1,-3,2)\}$.

التمرين 04 :

نعتبر النقط $A(1,0,-1)$ ، $B(2,2,3)$ ، $C(3,1,-2)$

1) تحقق أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة .

2) أثبت أن المثلث ABC قائم.

3) أحسب مساحة المثلث ABC .

4) عين إحداثيات النقطة D مركز ثقل المثلث ABC .

حل التمرين 04 :

1) التحقق أن النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة :

$\vec{AB}(1,2,4)$ و $\vec{AC}(2,1,-1)$

نلاحظ أن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطيا لأن: $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$

ومنه النقط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة .

2) أثبات أن المثلث ABC قائم:

لدينا: $\vec{AB}(1,2,4)$ و $\vec{AC}(2,1,-1)$

و $\vec{AB}.\vec{AC} = 1\times 2 + 2\times 1 + 4\times(-1) = 0$

ومنه المثلث ABC قائم في A .

3) حساب مساحة المثلث ABC : $S = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\right\|\left\|\vec{AC}\right\|$

ولدينا: $AB = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (4)^2} = \sqrt{21}$

و $AC = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

ومنه: (وم) $S = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\right\|\left\|\vec{AC}\right\| = \frac{\sqrt{21}.\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$

4) تعيين إحداثيات النقطة D مركز ثقل المثلث ABC :

D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$

وعليه فإن: $D\left(\frac{1+2+3}{3}, \frac{0+2+1}{3}, \frac{-1+3-2}{3}\right)$

ومنه $D(2,1,0)$.

التمرين 05 :

نعتبر النقط $A(2;1;-1)$ ، $B(-1;2;4)$ ، $C(0;-2;3)$ ، $D(1;1;-2)$

والمستوي (P) الذي معادلته : $x - 2y + z + 1 = 0$.

أجب بصح أو خطأ معللا إجابتك على كل سؤال من الأسئلة الآتية :

1) النقط A ; B ; C تعين مستويا وحيدا .

2) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P) .

3) المعادلة الديكارتية للمستوي (ABD) هي :
$$x + 8y - z - 11 = 0$$

4) التمثيل الوسيطي للمستقيم (AC) هو: $(k \in R)$
$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases}$$

5) سطح الكرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها $\frac{\sqrt{6}}{3}$ مماسه للمستوي (P) .

حل التمرين 05 :

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;1;5)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2;-3;4)$

و $\frac{-3}{-2} \neq \frac{1}{-3}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا .

ومنه النقط $A;B;C$ ليست على استقامة واحدة وعليه النقط $A;B;C$ تشكل مستو وحيد وعليه فإن الإجابة (صحيحة) .

2) نعوض إحداثيات A و C في معادلة (P) نجد :

$2-2(1)+(-1)+1=0$ ومنه $A\in(P)$

$0=0$

$0-2(-2)+3+1=0$

$8\neq 0$ ومنه $C\notin(P)$

بما أن $A\in(P)$ و $C\notin(P)$ فإن المستقيم (AC) غير محتوى في (P) وعليه فإن الإجابة (خاطئة) .

3) نتحقق أن النقط (ABD) تشكل مستو وحيد :

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-3;1;5)$ و $\overrightarrow{AD}(-1;0;-1)$

و $\frac{5}{-1}\neq\frac{-3}{-1}$ ومنه النقط $D;B;A$ تعين مستو وحيد .

نعوض إحداثيات $D;B;A$ في المعادلة الديكارتية :

$x+8y-z-11=0$

نجد $-1-(-1)+8(1)+2=0$ ، $0=11-11=0$ وعليه إحداثيات A تحقق المعادلة :

$-1+8(2)-4-11=0$ أي $0=0$.

وعليه إحداثيات B تحقق المعادلة

$1+8(1)-(-2)-11=0$ أي $0=0$.

وعليه إحداثيات D تحقق المعادلة

وعليه فإن الإجابة (صحيحة)

4) نعوض إحداثيات A في التمثيل الوسيطي نجد :

$$\begin{cases}2=2k & ; \quad k=1\\ 1=2+3k & ; \quad k=-\frac{1}{3}\\ -1=3-4k & ; \quad k=1\end{cases}$$

ومنه إحداثيات A لاتحقق التمثيل الوسيطي وعليه فإن الإجابة (خاطئة).

5) $d((P);D)=\frac{1-2(1)+(-2)+1}{1^2+(-2)^2+(1)^2}$

$=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

أي: $d((P);D)$ يساوي نصف قطر الكرة وعليه الإجابة (صحيحة) .

التمرين 06:

الفضاء منسوب إلى معلم نتعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(\lambda;2;3)$ ، $B(2;0;-1)$ ، $C(1;4;0)$ ، $D(0;0;1)$

1) أحسب بدلالة λ الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$.

2) عين قيمة العدد الحقيقي λ كي يكون المثلث ABC قائم في C .

3) في ما يأتي نأخذ $\lambda=-4$.

أ) بين أن النقط A,B,C,D لا تنتمي إلى نفس المستوي .

ب) عين إحداثيات النقطة G مرجح الجملة :

$\{(C;-2);(B;1);(A;2)\}$

ج) عين المجموعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق مايلي : $\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{MD}=0$.

د) عين معادلة ديكارتية للمجموعة (E) .

حل التمرين 06 :

1) $\overrightarrow{AB}(2-\lambda;-2;-4)$ ، $\overrightarrow{AC}(1-\lambda;2;-3)$ ، $\overrightarrow{BC}(-1;4;1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\lambda^2-3\lambda+10$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda$

و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda+4$

2) يكون المثلث ABC في C إذا تحقق : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

ومنه $\lambda+4=0$ ومنه $\lambda=-4$.

3) أ/ $A(4;2;3)$ ، $B(2;0;-1)$ ، $C(1;4;0)$ ، $D(0;0;1)$

$\overrightarrow{AB}(6;-2;-4)$ ، $\overrightarrow{AC}(5;2;-3)$ ، $\overrightarrow{AD}(4;-2;-2)$.

تكون النقاط D, C, B, A من نفس المستوي إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ من نفس المستوي أي إذا وجد عددين حقيقيين.

α, β يحققان: $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$

ومنه: * $\begin{cases} 6\alpha + 5\beta = 4 & (1) \\ -2\alpha + 2\beta = -2 & (2) \\ -4\alpha - 3\beta = -2 & (3) \end{cases}$

الجملة المكونة من المعادلتين (2) و(3) تقبل كحل $\alpha = \frac{5}{2}$ و $\beta = -\frac{2}{7}$ وهما لا يحققان (1) إذن الجملة * ليست لها حل وبالتالي لا يوجد α, β يحققان العلاقة $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ومنه النقاط $A; B; C; D$ لا تنتمي إلى نفس المستوي.

ب/ نعلم أن: $x_G = \frac{2x_A + x_B - 2x_C}{2+1-2} = -8$

$y_G = \frac{2y_A + y_B - 2y_C}{2+1-2} = -4$,

$z_G = \frac{2z_A + z_B - 2z_C}{2+1-2} = 5$

ومنه إحداثيات النقطة $G(-8;-4;5)$

جـ/ بما أن النقطة G مرجح الجملة $\{(C;-2);(B;1);(A;2)\}$ فإنها تحقق العلاقة: $2\vec{GA} + \vec{GB} - 2\vec{GC} = \vec{0}$

$$\left(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{MD} = 0$$

$$\left(2\left(\overrightarrow{MG} + GA\right) + \left(\overrightarrow{MG} + GB\right) - 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)\right)\cdot\overrightarrow{MD} = 0$$

$$\left(2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{GC}\right)\cdot\overrightarrow{MD} = 0$$

ومنه: $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$

أي مجموعة النقط M من الفضاء هي جميع نقاط سطح الكرة التي قطرها $[GD]$.

د/ تعيين معادلة ديكارتية للمجموعة (E):

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (E): $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MD} = 0$

لدينا: $\overrightarrow{MG}(x+8;y+4;z-5)$ و $\overrightarrow{MD}(x;y;z-1)$

أي: $(x+8)(x)+(y+4)(y)+(z-5)(z-1)=0$

ومنه: $x^2+y^2+z^2+8x+4y-6z+5=0$.

ومنه: $(x+4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=24$

التمرين 07:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1) أكتب معادلة السطح الكروي (S) الذي مركزه $\omega(1;2;-1)$ ويشمل النقطة $A(2;0;3)$.

2) أكتب معادلة المستوي (P) الذي يمس الكرة (S) في A.

3) أثبت أن المستوي (π) الذي معادلته :

$x+2y+2z+15=0$

يمس السطح الكروي (S') ذو المعدلة

$x^2+y^2+z^2-25=0$ ثم عين إحداثيات نقطة التماس.

حل التمرين 07:

1) الكرة التي مركزها ω وتشمل النقطة A يكون نصف قطرها ωA

$$\omega A = \sqrt{(x_A - x_\omega)^2 + (y_A - y_\omega)^2 + (z_A - z_\omega)}$$
$$= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

نعلم أن معادلة الكرة (S) التي مركزها ω ونصف قطرها R هي: $(x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2 = R^2$

إذن معادلة الكرة (S) هي:

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=21$

ومنه: $x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-15=0$.

2) المستوي (P) يمس الكرة (S) في النقطة A يعني

$\overrightarrow{\omega A} \perp (P)$

إذن $\vec{\omega H}(1;-2;4)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) وتكون معادلة المستوي (P) هي من الشكل :

$x-2y+4z+k=0$ وبما أن المستوي (P) يشمل $A(2;0;3)$ فإن $2-2\times0+4\times3+k=0$ ومنه $k+14=0$ ومنه: $k=-14$ وتكون معادلة المستوي (P) هي: $x-2y+4z-14=0$

3) لدينا: $x^2+y^2+z^2-25=0$

ومنه $x^2+y^2+z^2=25=5^2$ وهي تمثل معادلة الكرة (S') التي مركزها $O(0;0;0)$ ونصف قطرها 5

المسافة بين النقطة O والمستوي (π) هي :

$$d(O;(P))=\frac{|0\times1+2\times0+2\times0+15|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{15}{3}=5$$

بما أن المسافة بين مركز الكرة (S') والمستوي (π) تساوي نصف قطرها 5 فإن (π) يمس الكرة (S') في النقطة H نقطة تقاطع (S') والمستوي (π) وهي المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (π) أي نقطة تقاطع المستقيم (OH) و (π) بما أن المستقيم (OH) عمودي على (π) فيكون $\vec{n}(1;2;2)$ شعاع ناظمي للمستوي (π) هو شعاع التوجيه له ويكون التمثيل الوسيطي للمستقيم (OH) الذي يمر بالنقطة O وشعاع التوجيه $\vec{n}(1;2;2)$ هو :

$$(OH)\cap(\pi)=\{H\}\ ,\ \lambda\in R\begin{cases}x=\lambda\\y=2\lambda\\z=2\lambda\end{cases}$$

يعني:

$$\begin{cases}x=\lambda\\y=2\lambda\\z=2\lambda\\x+2y+2z+15=0\end{cases}$$

ومنه

$$(*)\begin{cases}x=\lambda\\y=2\lambda\\z=2\lambda\\\lambda+2\lambda+2\lambda+15=0\end{cases}$$

من الجملة (*) نستنتج $\lambda=-\frac{5}{3}$ وبتعويض λ في المعادلات التمثيل الوسيطي لـ (OH) نجد :

$x=-\frac{5}{3}$ ، $y=-\frac{10}{3}$ ، $z=-\frac{10}{3}$ ومنه: $H\left(-\frac{5}{3};-\frac{10}{3};-\frac{10}{3}\right)$.

التمرين 08:

في الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . نعتبر النقاط $A(-1;2;-1)$ ، $B(1;0;0)$ ، $\omega(2;1;0)$

1) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .

2) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(AB\omega)$.

3) نعتبر في الفضاء (E) الكرة (S) المعرفة بالمعادلة $x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$

أ- عين نصف قطر الكرة (S) وحدد مركزها .

ب- عين تقاطع الكرة (S) والمستوي $(AB\omega)$.

ج- بين أن المستقيم (AB) يقطع الكرة (S) في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما .

حل التمرين 08 :

1) لدينا $\vec{AB}(2;-2;1)$. f نقطة من المستقيم (AB) معناه يوجد عدد حقيقي λ بحيث : $\vec{AM}=\lambda\cdot\vec{AB}$

$$(\lambda\in R)\begin{cases}x=2\lambda-1\\y=-2+2\lambda\\z=\lambda-1\end{cases}$$ ومنه: وهو التمثيل الوسيطي لـ (AB)

2) النقاط $\omega;B;A$ ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{B\omega}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي فهي تشكل مستوي $(AB\omega)$

الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي $(AB\omega)$ هو الشعاع الذي يعامد الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{B\omega}$ أي $\vec{n}(a;b;c)\perp \overrightarrow{AB}(2;-2;1)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{B\omega}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ومنه $\overrightarrow{B\omega}(1;1;0)\perp\vec{n}(a;b;c)$

بأخذ $a=1$ فإن $b=-1$ $c=-4$ $\begin{cases}2a-2b+c=0\\a+b=0\end{cases}$

ومنه $\vec{n}(1;-1;-4)$ وتكون معادلة المستوي $(AB\omega)$ من الشكل : $x-y-4z+k=0$ وبما أن المستوي يشمل $B(1;0;0)$ فإن : $1-0-4\times0+k=0$ ومنه $k=-1$.

إذن معادلة المستوي $(AB\omega)$ هي: $x-y-4z-1=0$.

3) أ- لدينا معادلة $x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$

ومنه $(x-2)^2-4+(y-1)^2-1+z^2-1=0$

ومنه $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=6$ وهي تمثل معادلة كرة مركزها النقطة $\omega(2;1;0)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

ب) بما أن ω مركز الكرة ينتمي إلى المستوي $(AB\omega)$ فإن الكرة (S) والمستوي $(AB\omega)$ يتقاطعان حسب الدائرة الكبيرة في الكرة أي الدائرة التي مركزها ω ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

ج) $(S)\cap(AB)$ يعني :

$$(*)\begin{cases}x=2\lambda-1 & (1)\\ y=-2\lambda+2 & (2)\\ z=\lambda-1 & (3)\\ x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0 & (4)\end{cases}$$

بتعويض $x=2\lambda-1$ و $y=-2\lambda+2$ و $z=\lambda-1$ في المعادلة (4) وبعد تبسيطها نجد :

$9\lambda^2-18\lambda+5=0$ ومنه: $\lambda_1=\frac{5}{3}$ و $\lambda_2=\frac{1}{3}$ إذن المستقيم (AB) يقطع الكرة (S) في النقطتين:

$E\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$ و $F\left(-\frac{1}{2};\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$

(إحداثيات النقطتين E و F يتم حسابها بتعويض λ بالقيمتين λ_1 و λ_2 في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)).

التمرين 09:

الفضاء المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

ويعطى المستقيم D حيث : $t\in R$ $\begin{cases}x=2-t\\y=2-3t\\z=1+t\end{cases}$

ولتكن النقطة $A(3;-2;1)$.

1) أوجد معادلة المستوي P العمودي على D والذي يشمل النقطة A .

2) أحسب إحداثيات النقطة H المسقط العمودي لـ A على D.

3) أحسب المسافة بين A و D .

حل التمرين 09 :

1) لدينا $\vec{n}(-1;3;1)$ شعاع توجيه لـ D إذن يكون $M(x,y,z)$ نقاط من P إذا وفقط : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$

ومنه:معادلة P هي :

$-(x-3)-3(y+2)+(z-1)=0$

أي $x+3y-z+4=0$

2) النقطة H هي تقاطع المستقيم D مع المستوي P لنبحث عن قيم t التي تجعل النقطة M من المستقيم D تنتمي للمستوي P أي تحق الشرط (المعادلة)

$2-t+3(2-3t)-(1+t)+4=0$ وحلها الوحيد هو $t=1$ ومنه إحداثيات النقطة H هي $H(1;-1;2)$

3) المسافة بين A و D هي الطول AH وحيث أن :

$\overrightarrow{AH}(-2;1;1)$

إذن $AH^2=(-2)^2+1^2+1^2$ أي $AH=\sqrt{6}$

التمرين 10 :

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقاط: $A(-1;0;1)$ ، $B(1;1;0)$

$C(0;-1;-4)$ ، $D(-1;1;2)$

1- أ/ بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان .

ب/ استنتج طبيعة المثلث ABC .

2- أ/ عين الشعاع $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

ب/ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

ج/ تحقق بأن النقطة D لاتنتمي إلى المستوي (ABC) واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

د/ أحسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) .

3- أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

4- أ/ تحقق أن معادلة المستوي (BCD) هي:

$2x-5y+2z+3=0$

ب/ أحسب بعد النقطة A عن المستوي (BCD).

ج/ استنتج مساحة المثلث (BCD).

حل التمرين 10 :

1) أ/ $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$ و $\overrightarrow{BC}(-1;-2;-4)$ ولدينا:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=(2)\times(-1)+(1)\times(-2)+(-1)\times(-4)$

$=0$

ومنه الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

ب/ طبيعة المثلث ABC : $\overrightarrow{AB}(2;1;-1)$

و $\overrightarrow{BC}(-1;-2;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-1;-5)$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

و $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{21}$

و $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(-5)^2}=3\sqrt{3}$

و بما أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان ومنه فإن المثلث ABC قائم في النقطة B .

2) أ/ تعيين الشعاع $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

نفرض $\vec{u}(a;b;c)$ حيث $a;b;c$ أعداد حقيقية ثابتة ولدينا:

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ معناه: $2a+b-c=0$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ معناه: $-a-2b-4c=0$

لدينا: $\begin{cases}2a+b-c=0\\-a-2b-4c=0\end{cases}$ ونفرض $c=1$

ومنه: $\begin{cases}2a+b-1=0\\-a-2b-4=0.....(\times 2)\end{cases}$ نجد

$\begin{cases}2a+b-1=0.....(1)\\-2a-4b-8=0....(2)\end{cases}$ بجمع المعادلتين(1) و(2)

طرف لطرف نجد: $-3b-9=0$ ومنه $b=-3$

ثم نجد $a=2$ ومنه: $\vec{u}(2;-3;1)$.

ب/ استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

معادلة المستوي (ABC) تكون على الشكل :

$a.x+b.y+c.z+d=0$

ومنه: $2.x-3.y+.z+d=0$

ثم بتعويض إحداثيات النقطة $A(-1;0;1)$ في المعادلة $2.x-3.y+z+d=0$ نجد $2.(-1)-3(0)+(1)+d=0$

وعليه فإن: $d=1$ ومنه المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2.x-3.y+.z+1=0$

ج/ التحقق بأن النقطة D لاتنتمي إلى المستوي (ABC) واستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$:

نعوض إحداثيات النقطة $D(-1;1;2)$ في المعادلة $2.x-3.y+.z+1=0$ نحصل على:

$2.(-1)-3.(1)+(2)+1=0$ ومنه نجد: $-2=0$

(وهذا مستحيل) ومنه النقطة D لاتنتمي إلى المستوي

وعليه نستنتج أن الرباعي $ABCD$ رباعي وجوه.

د/ حساب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC):

$$d((ABC),D)=\frac{|2.x_D-3.y_D+.z_D+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(1)^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{14}}{14}=\frac{\sqrt{14}}{7}$$

3) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{BA\times BC}{2}\right)\times d((ABC);D)$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{21}}{2}\right)\frac{\sqrt{14}}{7}=1$$

4) أ/ التحقق أن معادلة المستوي (BCD) هي:

$$2x-5y+2z+3=0$$

نعوض إحداثيات $D;B;C$ في المعادلة الديكارتية:

$2x-5y+2z+3=0$

نجد $2(-1)-5(1)+2(2)+3=0$ أي $0=0$

وعليه إحداثيات D تحقق المعادلة $2(1)-5(1)+2(0)+3=0$

أي $0=0$ وعليه إحداثيات B تحقق المعادلة:

$2(0)-5(-1)+2(-4)+3=0$ أي $0=0$.

وعليه إحداثيات C تحقق المعادلة.

ب/ حساب بعد النقطة A عن المستوي (BCD):

ج/ استنتج مساحة المثلث (BCD).

$$d((BCD),A)=\frac{|2.x_A-5.y_A+2.z_A+3|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+(2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{33}}=\frac{\sqrt{33}}{11}$$

التمرين 11:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط: $A(2;0;0)$، و $B(0;1;0)$، و $C(0;0;2)$.

1) بين أن النقط $C;B;A$ ليست في استقامية.

2) جد معادلة للمستوي (ABC).

3) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC).

4) (P) المستوي الذي معادلته: $2x+2y+z-2=0$.

أ/ بين أن: (P) و (ABC) متقاطعان.

ب/ بين أن: (P) يشمل B و C، ماذا تستنتج؟

5) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

حل التمرين 11:

1) إثبات أن النقط A، B، C ليست على استقامة واحدة:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;0;2)$

$\frac{-2}{-2}\neq\frac{0}{1}$ و منه الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه النقط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

2) معادلة المستوي (ABC): ليكن $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعا ناظميا لـ (ABC) فإنه يحقق: $\vec{AB}.\vec{n}=0$ و $\vec{AC}.\vec{n}=0$

ومنه $\begin{cases}-2a+b=0\\-2a+2c=0\end{cases}$ نفرض $a=1$ ومنه: $b=2$

ومنه $c=1$ وعليه $\vec{n}(1;2;1)$ شعاع ناظمي لـ (ABC).

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من (ABC)

فإن: $\vec{AM}(x-2;y;z)$; $\vec{AM}.\vec{n}=0$

ومنه $(x-2)(1)+(y)(2)+z(1)=0$

وعليه فإن: $x+2y+z-2=0$.

3) إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC):

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (BC) فإن: $\vec{BM}=\lambda\vec{BC}$

حيث $(\lambda\in;R)$ مع $\vec{BM}(x;y-1;z)$ و $\vec{BC}(0;-1;2)$

ومنه: $\begin{cases} x=0 \\ y-1=-\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda+1 \\ z=2\lambda \end{cases}$

4) أ/ إثبات أن (P) و (ABC) متقاطعان:

لدينا: $\vec{n}(1;0;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

و $\vec{n'}(2;0;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P).

بما أن: $\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$ ومنه $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطان خطيا معناه (P) و (ABC) متقاطعان.

ب/ إثبات أن (P) يشمل B و C:

نعوض إحداثيات B في معادلة (P) نجد:

$2(0)+2(1)+0-2=0$ أي $0=0$ ومنه $B\in(P)$

نستنتج أن: $(P)\subset(BC)$ و بما أن $(ABC)\subset(BC)$

فإن المستويان (P) و (ABC) متقاطعان في المستقيم (BC)

5) تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$$

لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1);(B;1);(C;1)\}$ فيما تحقق: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

لدينا: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

$$\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right\|$$

$$=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}\right\|$$

أي: $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left|-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ ومنه $3MG=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right\|$

ومنه المجموعة (E) هي عبارة عن سطح كرة مركزها: النقطة G ونصف قطرها r، حيث: $r=\frac{\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right\|}{3}$

ولدينا: $G\left(\frac{2+0+0}{2};\frac{0+1+0}{2};\frac{0+0+2}{2}\right)$

ومنه $G\left(1;\frac{1}{2};1\right)$

$\overrightarrow{BA}(2;-1;0)$ ، $\overrightarrow{CA}(2;0;-2)$

ومنه: $\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)(4;-1;-2)$

أي: $\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right\|=\sqrt{4^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{21}$

ومنه: $r=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

التمرين 12:

(بكلوريا علمي 2009)

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(1;0;2)$ ، $B(0;2;1)$ ، $C(2;1;3)$

(P) مستو معادلته من الشكل: $x-z+1=0$

1) أ/ بين أن المستوي (P) هو المستوي (ABC).

ب/ ما طبيعة المثلث ABC.

2) أ/ تحقق أن النقطة $D(2;3;4)$ لا تنتمي إلى (ABC).

ب/ ما طبيعة $ABCD$.

3) أ/ أحسب المسافة بين D و المستوي (ABC).

ب/ أحسب حجم $ABCD$.

حل التمرين 12:

1) أ/ $\overrightarrow{AB}(-1;2;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ غير مرتبطان خطيا. لأنه: نفرض أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا معناه يوجد عدد حقيقي غير معدوم λ حيث:

$$\lambda\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{cases} -1=\lambda\times 1 ; \lambda=-1 \\ 2=\lambda\times 1 ; \lambda=2 \\ -1=\lambda\times 1 \end{cases}$$

وهذا غير ممكن $-1\neq 2$

ومنه النقط A و B و C ليست على استقامة واحدة فإنه يوجد مستو وحيد في الفضاء يشمل النقط A و B و C وبما أن

$A\in(P)$ لأن: $1-2+1=0$

$B\in(P)$ لأن: $0-1+1=0$

$C\in(P)$ لأن: $2-3+1=0$ فإن: المستوي (P) هو المستوي (ABC) .

ب/ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-1\times 1+2\times 1+(-1)\times 1=0$

ومنه المثلث ABC قائم في A .

2) $D(2;3;4)$ نعوض إحداثيات D في معادلة (ABC)

نجد: $2-4+1=0$

$-1=0$ مستحيل ومنه النقطة D لا تنتمي إلى (ABC) .

ب/ بما أن D لا تنتمي إلى (ABC) فإن الرباعي $ABCD$ رباعي وجوه .

3) $d(D;(P))=\dfrac{|2-4+1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ب/ $h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $S=\dfrac{AB\times AC}{2}$

$AB=\sqrt{(0-1)^2+(2-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{6}$

$AC=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(3-2)^2}=\sqrt{3}$

ومنه: $V=\dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$ (وحدة مكعبة)

التمرين 13 :

(بكلوريا علمي 2009)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط $A(2;3;-1)$ ، $B(1;-2;4)$ ، $C(3;0;-2)$ ، $D(1;-1;-2)$. وليكن (P) المستوي المعرف بمعادلته الديكارتية : $2x-y+2z+1=0$

المطلوب : أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية :

1) النقط A ، B ، C في إستقامية .

2) (ABD) مستو معادلته الديكارتية هي :

$25x-6y-z-33=0$

3) المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π) .

4) المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H(1;1;-1)$.

حل التمرين 13 :

1) إذا كانت النقط A ، B ، C على إستقامية واحدة فإن : $\vec{AC}$ و $\vec{AB}$ مرتبطان خطيا معناه يوجد عدد حقيقي λ حيث : $\vec{AC}=\lambda\ \vec{AB}$.

لدينا : $\vec{AB}(-1;-5;5)$ و $\vec{AC}(1;-3;-1)$.

$$\begin{cases} \lambda=-1 \\ \lambda=\dfrac{5}{3} \\ \lambda=-5 \end{cases}$$ ومنه : أي $$\begin{cases} -1=\lambda \\ -5=-3\lambda \\ 5=-\lambda \end{cases}$$

ومنه : $\vec{AC}$ لا يوازي $\vec{AB}$ ومنه : (الجواب خاطئ) .

2) إحداثيات النقط A ، B ، D تحقق المعادلة :

$25x-6y-z-33=0$

من أجل النقطة A: $25(2)-6(3)-(-1)-33=0$

أي : $0=0$.

من أجل النقطة B: $25(1)-6(-2)-(4)-33=0$

أي : $0=0$.

من أجل النقطة D: $25(1)-6(-1)-(-2)-33=0$

أي : $0=0$.

ولدينا : $\vec{AD}$ لا يوازي $\vec{AB}$.

أي النقط A ، B ، D ليست على استقامة واحدة .

ونعلم أن كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة في الفضاء تشكل مستو وحيد .

ومنه (ABD) مستو معادلته الديكارتية هي :

$25x-6y-z-33=0$ ومنه : (الجواب صحيح)

3) لدينا : $\vec{n}(2;-1;2)$ و $\overrightarrow{CD}(-2;-1;0)$ شعاعا ناظميا للمستوي (P) إذا كان المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π) فإن : $\overrightarrow{CD}$ يوازي $\vec{n}$.

معناه يوجد عدد حقيقي λ حيث : $\vec{n}=\lambda\ \overrightarrow{CD}$.

أي : $\begin{cases}-2=2\lambda \longrightarrow \lambda=-1\\ -1=-\lambda \longrightarrow \lambda=1\\ 0=2\lambda \longrightarrow \lambda=0\end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{CD}$ لا يوازي $\vec{n}$.

أي : $\overrightarrow{CD}$ ليس شعاعا ناظميا للمستوي (P) .

ومنه : (الجواب خاطئ) .

4) لدينا :

$$BH=\sqrt{(1-1)^2+(1-(-2))^2+(-1-(4))^2}$$
$$=\sqrt{34}$$

و
$$d(B;(P))=\frac{|-2(1)-(-2)+2(4)+1|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2}}$$
$$=\frac{9}{\sqrt{9}}=\sqrt{9}$$

ومنه $BH\neq d(B;(P))$ ومنه : (الجواب خاطئ) .

التمرين 14 :

(بكلوريا علمي 2010)

نعتبر الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، النقط $A(1,1,0)$ و $B(2,1,1)$ و $C(-1,2,-1)$

1) أ) بين أن النقط A و B و C ليست في استقامة .

ب) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي :

$x+y-z-2=0$

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب : $(P): x+2y-3z+1=0$

و $(Q): x+y-z-2=0$ و المستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0,4,3)$ و $\vec{u}(-1,5,3)$ شعاع توجيه له .

أ) أكتب تمثيلا وسطيا للمستقيم (D) .

ب) تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D).

3) عين تقاطع المستويات الثلاث (ABC) و (P) و (Q).

حل التمرين 14 :

1) أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(1,0,1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2,1,-1)$ و بما أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ فمعنى ذلك أن النقط A,B,C ليست إستقامية .

ب) يمكنك التأكد بكل سهولة من أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $x+y-z-2=0$ و ذلك بتعويض إحداثيات كل نقطة النقط A,B,C تحقق المعادلة.

2) أ) يعطى التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $F(0,4,3)$ و شعاع له $\vec{u}(-1,5,3)$ كما يلي :

$\begin{cases}x=-\lambda\\ y=5\lambda+4\\ z=3\lambda+3\end{cases}$ مع λ عدد حقيقي ثابت .

ب) تقاطع المستويين (P) و (Q) هو مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق : $\begin{cases}x+2y-3z+1=0\\ 2x+y-z-1=0\end{cases}$

بوضع $z=t$ نحصل على $\begin{cases}x+2y=3t-1\\ 2x+y=t+1\\ z=t\end{cases}$

أي: $\begin{cases} x=-\frac{1}{3}t+1 \\ y=\frac{5}{3}t-1 \\ z=t \end{cases}$ وبوضع $t=3\lambda+3$

نجد: $\begin{cases} x=-\lambda \\ y=5\lambda+4 \\ z=3\lambda+3 \end{cases}$ وهو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)

طريقة أخرى: بما أن (D) مستقيم التقاطع بين المستويين (P) و (Q) فيعني أن إحداثيات نقط (D) تحقق معادلتي المستويين.

إحداثيات نقط المستقيم (D) هي $(-\lambda\,,5\lambda+4\,,3\lambda+3)$

تحقق معادلة (P) لاحظ أن:

$-\lambda+2(5\lambda+4)-3(3\lambda+3)+1=0$ ونفس الأمر مع معادلة المستوي (Q).

3) تعيين تقاطع (ABC) و (P) و (Q):

نعلم أن $(P)\cap(Q)=(D)$ نعوض $x;y;z$ من التمثيل الوسيطي لـ (D) في معادلة (ABC) نجد:

$-\lambda+(5\lambda+4)-(3\lambda+3)-2=0$

$\lambda=1$

ومنه: $\begin{cases} x=-1 \\ y=9 \\ z=6 \end{cases}$ وعليه $(P)\cap(Q)\cap(ABC)=\{(-1;9;6)\}$.

التمرين 15:

(بكلوريا علمي 2010)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر المستوي (P) الذي معادلته $x-2y+z+3=0$

1) نذكر أن محور الفواصل $(O,\vec{i})$ يعرف بالجملة $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

عين إحداثيات A نقطة تقاطع حامل المحور $(O,\vec{i})$ مع المستوي (P).

2) B و C النقطتان من الفضاء حيث: $B(1,0,-1)$ و $C(-1,-4,2)$.

أ) تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P).

ب) أحسب الطول AB.

ج) أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P).

3) أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة C و العمودي على المستوي (P).

ب) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ج) أحسب مساحة المثلث ABC.

حل التمرين 15:

1) إحداثيات A بتعويض y بـ 0 و z بـ 0 في معادلة (P) نحصل على $x=-3$ و بالتالي إحداثيات A هي $(-3,0,0)$

2) أ) إحداثيات B تحقق معادلة (P).

ب) $AB=3\sqrt{2}$

ج) لتكن d المسافة المطلوبة، عندئذ

$$d=\frac{|x_C-2y_C+z_C+3|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}$$

3) أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ): بما أن (Δ) عمودي على (P) فهذا يعني أن شعاع توجيه (Δ) هو ناظمي لـ (P) و مركبات الشعاع الناظمي للمستوي هي $(1,-2,1)$

وبالتالي التمثيل الوسيطي للمستقيم الذي يشمل $C(-1,-4,2)$

و شعاع توجيه له $\vec{u}(1,-2,1)$ هي $\begin{cases} x=\lambda-1 \\ y=-2\lambda-4 \\ z=\lambda+2 \end{cases}$

مع λ عدد حقيقي كيفي.

ب) حتى تكون A نقطة من (Δ) يجب البحث عن عدد حقيقي وحيد λ يحقق $\begin{cases}-3=\lambda-1\\0=-2\lambda-4\\0=\lambda+2\end{cases}$ واضح أن $\lambda=-2$ يحقق الجملة و منه A نقطة من (Δ).

ج) مساحة المثلث ABC هي $\frac{1}{2}d\times AB$ حيث: $d=2\sqrt{6}$ و $AB=3\sqrt{2}$ ومنه مساحة ABC هي $6\sqrt{3}$.

التمرين 16:

(بكلوريا علمي 2011)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$، المستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له، و ليكن (Q) المستوي ذا المعادلة $x+2y-7=0$.

1) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P).

2) أ) تحقق أن النقطة $B(-1;4;-1)$ مشتركة بين المستويين (P) و (Q).

ب) بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3) لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ) أحسب المسافة بين النقطة C و المستوي (P) ثم المسافة بين النقطة C و المستوي (Q).

ب) أثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

ج) استنتج المسافة بين النقطة C و المستقيم (Δ).

حل التمرين 16:

1) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P):

المستوي (P) يشمل النقطة $A(1,-2,1)$ و $\vec{n}(-2,1,5)$ شعاع ناظمي له نفرض $M(x,y,z)\in(P)$

و عليه: $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\vec{0}$. ولدينا: $\overrightarrow{AM}(x-1,y+2,z-1)$

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ يعني أن: $-2(x-1)+1(y+2)+5(z-1)=0$

أي: $-2x+2+y+2+5z-5=0$

أي: $-2x+y+5z-1=0$ و عليه معادلة المستوي (P) هي: $-2x+y+5z-1=0$

2) أ) التحقق أن النقطة B مشتركة بين المستويين (P) و (Q):

$B\in(P)$ لأن:

$-2(-1)+4+5(-1)-1=2+4-5-1=0$

$B\in(Q)$ لأن: $(-1)+2(4)-7=-8+8=0$

و عليه النقطة B نقطة مشتركة بين المستويين (P) و (Q)

ب) إثبات أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ):

لدينا $\vec{n}(-2,1,5)$ شعاع توجيه (P) و $\vec{n'}(1,2,0)$ شعاع توجيه المستوي (Q) و بما أن $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا فإن (P) و (Q) غير متوازيين فهما إما متقاطعان وفق مستقيم (Δ).

لدينا: $\begin{cases}-2x+y+5z-1=0\\x+2y-7=0\end{cases}$ بوضع $Z=t$

نجد: $\begin{cases}-2x+y=1-5t\\x+2y=7\end{cases}$

و عليه: $(\Delta):\begin{cases}x=2t+1\\y=-t+3\\z=t\end{cases}$ مع $t\in R$

3) لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ) حساب المسافة بين C و المستوي (P) ثم المسافة بين C

و المستوي (Q):

$$d(C,(P))=\frac{|-2\times5+(-2)+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(5)^2}}$$

$$=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{18\sqrt{30}}{30}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$$

$$d(C,(Q))=\frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+0^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب إثبات أن المستويين (P) و (Q) متعامدان :

لدينا : $\vec{n}.\vec{n'}=(-2\times1)+(2\times1)+(0\times5)=0$

فإن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

ج) استنتاج المسافة بين C و (Δ) :

بما أن المستويين (P) و (Q) متعامدان و متقاطعان وفق المستقيم (Δ) و بتطبيق نظرية فيثاغورث :

$$D(C,(\Delta))=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{9\times30}{25}+\frac{180}{25}}$$

$$=\sqrt{\frac{450}{25}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

التمرين 17 :

(بكلوريا علمي 2011)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط $A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ و $C(3;-3;6)$

1) أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له.

ب) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

ج) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د) استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

2) نعتبر النقطة $M(2+t;1-4t;7-t)$ حيث t عدد حقيقي، ولتكن الدالة h المعرفة على R بـ :

$h(t)=AM$.

أ) أكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t: $h'(t)=\frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$.

ج) استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن.

- قارن بين القيمة الصغرى للدالة h، و المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

حل التمرين 17 :

1) أ) كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) : المستقيم (Δ) يشمل النقطة B و $\vec{u}(1,-4,-1)$ شعاع توجيه له.

$M(x,y,z)$ نقطة من (Δ) و $\overrightarrow{BM}=\lambda\vec{i}$

أي : $(x-2,y-1,z-7)=\lambda(1,-4,-1)$ و منه: $\lambda\in R$

$\begin{cases}x=\lambda+2\\y=-4\lambda+1\\z=-\lambda+7\end{cases}$; هو التمثيل الوسيطي لـ (Δ).

ب) التحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Δ) :

لدينا : $\begin{cases}\lambda+2=3\\-4\lambda+1=-3\\-\lambda+7=6\end{cases}$ و عليه : $\begin{cases}\lambda=1\\\lambda=1\\\lambda=1\end{cases}$

و بالتالي من أجل $\lambda=1$، النقطة C تنتمي إلى (Δ).

ج) إثبات أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(2,0,2)$ و $\overrightarrow{BC}(1,-4,-1)$ و عليه :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=2(1)+0(-4)+2(-1)=2-2=0$

و بالتالي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د) استنتاج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) :

بما أن B من (Δ) و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان فإن :

$$d(A,(\Delta))=AB=\sqrt{(2)^2+0^2+(2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

2) أ) كتابة $h(t)$ بدلالة t :

$$h(t)=AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2+(z_M-z_A)^2}$$

$$h(t)=\sqrt{(2+t)^2+(1-4t-1)^2+(7-t-5)^2}$$

$$h(t)=\sqrt{4+4t+t^2+16t^2+4+t^2-4t}$$

$$h(t)=\sqrt{8+18t^2}$$

ب) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي t :

$$h'(t)=\frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$$

الدالة $h(t)$ قابلة للإشتقاق على R ودالتها المشتقة هي :

$$h'(t)=\frac{\left(8+18t^2\right)'}{2\sqrt{18t^2+8}}=\frac{36t}{2\sqrt{18t^2+8}}=\frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$$

ج) قيمة العدد الحقيقي t التي يكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن هي عندما يكون $h'(t)=0$

أي : $18t=0$ و عليه $t=0$.

القيمة الحدية الصغرى للدالة h هي :

$$h(0)=\sqrt{8+18(0)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

و عليه : $h(0)=d(A,(\Delta))$.

التمرين 18 :

(بكلوريا علمي 2013)

الفضاء منسوب إلى معلم نتعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط:

$A(-1;1;3)$ ، $B(1;0;-1)$ ، $C(2;-1;1)$ ، $D(2;0;-1)$

والمستوي (P) ذا المعادلة $2y+z+1=0$

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases}x=-1\\y=2+\beta\\z=1-2\beta\end{cases}$

حيث β وسيط حقيقي.

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ، ثم تحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P) .

2) بين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ/ أحسب المسافة بين النقطة A و المستوي (P).

ب/ بين أن D نقطة من (P) ، وأن المثلث BCD قائم.

4) بين أن $ABCD$ رباعي وجوه ، ثم أحسب حجمه.

حل التمرين 18 :

1) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) :

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من (BC) فإنها تحقق:

$\overrightarrow{BM}=\lambda.\overrightarrow{BC}$ حيث: $\overrightarrow{BM}(x-1;y;z+1)$ و $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$

ومنه: $\begin{cases}x=\lambda+1\\y=-\lambda\\z=2\lambda-1\end{cases}$ حيث λ وسيط حقيقي.

التحقق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P) :

نعوض كل من $\begin{cases}x=\lambda+1\\y=-\lambda\\z=2\lambda-1\end{cases}$ في معادلة $2y+z+1=0$:

نحصل على: $2(-\lambda)+(2\lambda-1)+1=0$ أي $0=0$

ومنه فإن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

2) إثبات أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي:

لدينا: $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ شعاع توجيه للمستقيم (BC)

و $\overrightarrow{U}(0;1;-2)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و $\frac{0}{1}\neq\frac{1}{-1}$

وعليه فإن الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{U}$ غير مرتبطان خطيا وعليه يكون المستقيمان (Δ) و (BC) إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي.

ولدينا: $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$ و $\begin{cases} x=\lambda+1 \\ y=-\lambda \\ z=2\lambda-1 \end{cases}$

نضع: $\begin{cases} -1=\lambda+1 \ldots\ldots(1) \\ 2+\beta=-\lambda \ldots\ldots(2) \\ 1-2\beta=2\lambda-1 \ldots\ldots(3) \end{cases}$ من (1) فإن: $\lambda=-2$

نعوض قيمة $\lambda=-2$ في المعادلتين (2) و(3) نجد: $\beta=0$ و $\beta=3$ و $3\neq 0$ ومنه (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي.

3) أ/ حساب المسافة بين النقطة A و المستوي

$$(P): d((P);A)=\frac{|2(1)+(3)+1|}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب/ إثبات أن D نقطة من (P) ، وأن المثلث BCD قائم.

نعوض إحداثيات D في معادلة (P) نجد: $2(0)+1+1=0$

ومنه $0=0$ وعليه فإن D نقطة من (P).

ولدينا: $BC=\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{6}$

و $BD=\sqrt{(1)^2+(0)^2+(0)^2}=1$

$$CD=\sqrt{(0)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

نلاحظ أن: $BC^2=BD^2+CD^2$

ومنه حسب فيثاغورث فإن: المثلث BCD قائم في D.

4) إثبات أن $ABCD$ رباعي وجوه ، ثم حساب حجمه.:

بما أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P) و D نقطة من (P) و BCD مثلث و $A\notin(P)$ فإن $ABCD$ رباعي وجوه.

حجمه V : (و.ح)

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{CD\times BD}{2}\right)\times d((P);A)$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{5}\times 1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{5}}{5}=1$$

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

1) **تعريف:** نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل: $z = x + i.y$ حيث $x; y$ عددان حقيقيان و $i^2 = -1$ و يرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بالرمز C ونكتب:

$$C = z / z = x + iy \; ; x, y \in R \; ; \; i^2 = -1$$

- يسمى x الجزء الحقيقي للعدد المركب z ويرمز له بالرمز Re(z) .

- يسمى y الجزء التخيلي للعدد المركب z ويرمز له بالرمز Im(z) .

ونكتب عندئذ وبصفة عامة:

الشكل الجبري لعدد مركب: $z = x + i.y$

حيث : $(x; y) \in R^2$

* إذا كان: $Re(z) = 0$ نقول إن z تخيلي صرف.

* إذا كان: $Im(z) = 0$ نقول إن z حقيقي صرف.

2) **مرافق عدد مركب :**

مرافق العدد المركب: $z = x + i.y$

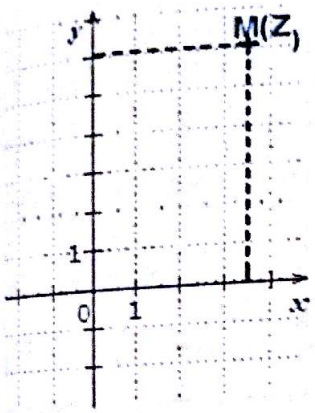
حيث $x; y$ عددان حقيقيان هو : $\overline{Z} = x - iy$

خواص مرافق عدد مركب:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \times \bar{z} = (Re(z))^2 + (Im(z))^2$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ مع $z \neq 0$
- $z + \bar{z} = 2\,Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ مع $z' \neq 0$

3) **التمثيل النقطي لعدد مركب :** في م م م م $(o; \vec{i}; \vec{j})$ النقطة $M(x; y)$ صورة العدد المركب $z = x + i.y$ هو لاحقة النقطة $M(x; y)$

- يمكن كذلك أن نرفق بكل عدد مركب z الشعاع $\vec{U}$ حيث $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$، ويسمى $\vec{U}$ كذلك صورة z و z لاحقة $\vec{U}$.



ملاحظة: إذا كان الشعاعان $\vec{U}$ و $\vec{V}$ صورتا العددين المركبين z و z′ على الترتيب يكون الشعاع $\vec{U} + \vec{V}$ هو صورة العدد المركب z+z′ ، ويكون الشعاع $\vec{U} - \vec{V}$ هو صورة العدد المركب z-z′ .

4) **طويلة وعمدة عدد مركب :** M نقطة معرفة بإحداثييها الديكارتية (x, y) أو بإحداثييها القطبية (r , θ) لدينا:

$$OM = r$$

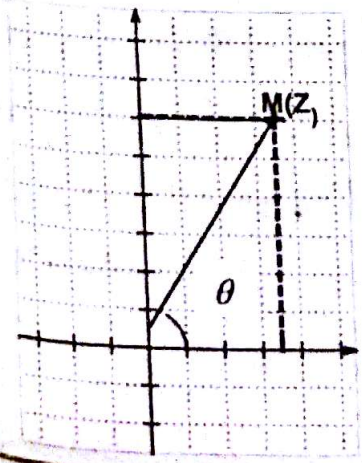
والموجهة $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}) = \theta$ و $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$

ومنه ينتج: $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\sin\theta = \frac{y}{r}$

● **طويلة العدد المركب Z :**

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

● **عمدة العدد المركب Z :**



$$\arg(Z) = \theta + 2k\pi$$

و

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$

خواص الطويلة والعمدة

العمدة	الطويلة	العدد المركب
θ	r	z
θ'	r'	z'
$n\theta$	r^n	z^n
$\theta+\theta'$	rr'	zz'
$\theta-\theta'$	$\frac{r}{r'}$	$\frac{z}{z'}$

ملاحظات: A، B نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب:

1) $AB=|z_B-z_A|$

2) $\arg(z_B-z_A)=(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB})$

3) $\arg(z_B)-\arg(z_A)=(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

5) الشكل المثلثي لعدد مركب :

تعريف: z عدد مركب غير معدوم.

العدد z يكتب على الشكل $Z=r.(\cos\theta+i.\sin\theta)$ حيث $r=|z|$ و $\theta=\arg(z)$ يسمى هذا الشكل بالشكل المثلثي للعدد المركب z .

6) الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم:

1) تعريف: العدد المركب الذي طويلته 1 و θ عمدة له يكتب $e^{i\theta}$ حيث: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ تسمى هذه الكتابة بترميز أولر. وإذا كان $z=r\cos\theta+r\sin\theta$ مع $r>0$ فإن: $z=re^{i\theta}$ تسمى هذه الكتابة الشكل الأسي للعدد المركب z

2. خواص:

θ و θ' عددان حقيقيان:

$e^{i(\theta+\theta')}=e^{i\theta}\times e^{i\theta'}$،

$\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ ، $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$

3. دستور موافر: z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا: $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$

7) المعادلات من الدرجة الثانية:

1. مبرهنة:

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2+bz+c=0$ حيث a,b,c أعداد حقيقية مع $a\neq0$ ، $\Delta=b^2-4ac$ مميزها.

- إذا كان $\Delta=0$: فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z=-\frac{b}{2a}$

- إذا كان $\Delta>0$: فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين

$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

- إذا كان $\Delta<0$: فإن المعادلة تقبل حلين مترافقين وذلك بوضع $i^2=-1$ في عبارة Δ

2. الجذران التربيعيان لعدد مركب:

تعريف:

z_0 عدد مركب معطى . الجذرين التربيعيين للعدد z_0 هما حلا المعادلة $z^2=z_0$ في المجموعة C

الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

لتكن النقطة M لاحقتها Z و M' لاحقتها Z' و T تحويل نقطي في المستوى يرفق بكل نقطة M النقطة M' بحيث : $Z'=aZ+b$ حيث $(a\in C$ و $b\in C)$

عناصره المميزة	طبيعة التحويل T	قيم a
شعاعه $\vec{u}$ لاحقته $z_0=b$	انسحاب	$a=1$
نسبته $k=a$ ومركزه النقطة الصامدة Ω لاحقتها $z_0=\frac{b}{1-a}$	تحاكي	$a\in R^*-\{1\}$
مركزه النقطة الصامدة Ω لاحقتها $z_0=\frac{b}{1-a}$ وزاويته : $\theta=\arg(a)$	دوران	$a\notin R$ و $\lvert a\rvert=1$
مركزه النقطة الصامدة Ω لاحقتها $z_0=\frac{b}{1-a}$ وزاويته : $\theta=\arg(a)$ ونسبته : $k=\lvert a\rvert$	تشابه مباشر	$a\notin R$ و $\lvert a\rvert=1$

تمارين

التمرين 01:

نعتبر العدد المركب $Z=\dfrac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$

1) أكتب العدد المركب Z على الشكل الجبري .

2) أكتب العدد المركب Z على الشكل المثلثي .

3) أكتب على الشكل المثلثي الأعداد التالية : $\dfrac{1}{Z}$ ، Z^{2009} و $\overline{Z}$.

حل التمرين 01:

1) كتابة العدد المركب Z على الشكل الجبري :

$$Z=\frac{4(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{4(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4}=(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$$

2) كتابة العدد المركب Z على الشكل المثلثي :

لدينا $Z=(1+i)(1+i\sqrt{3})$

و ليكن $z_1=(1+i)$ و $z_2=(1+i\sqrt{3})$

لدينا $|z_1|=\sqrt{2}$ ، $Arg(z_1)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in Z$

ومنه $z_1=\left[\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right]$

و $|z_2|=2$ و $Arg(z_2)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in Z$

ومنه $z_2=\left[2,\dfrac{\pi}{3}\right]$

و $Z=z_1\times z_2$ و منه $|Z|=2\sqrt{2}$

و $Arg(Z)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

أي $Arg(Z)=\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi$ و بالتالي $Z=\left[2\sqrt{2},\dfrac{7\pi}{12}\right]$

و منه $Z=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$

3) كتابة على الشكل المثلثي : $\dfrac{1}{Z}$ ، Z^{2009} و $\overline{Z}$.

- لدينا $\dfrac{1}{Z}=\left[\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\left(\dfrac{-7\pi}{12}\right)\right]$

و منه $\dfrac{1}{Z}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)$

- $Z^{2009}=\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{2009},\dfrac{7\times 2009\pi}{12}\right]$

ولدينا : $7\times 2009=14063=1171\times 12+11$

أي $14063=1172\times 12-1$

و منه : $\dfrac{14063\pi}{12}=1172\pi-\dfrac{\pi}{12}$

و منه : $Z^{2009}=\left[\left(2\sqrt{2}\right)^{2009},\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$

ومنه: $Z^{2009}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2009}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right)$

- $\overline{Z}=\left[2\sqrt{2},\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]$

و منه $\overline{Z}=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)$

التمرين 02:

عين الطويلة و عمدة للعدد المركب Z في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $Z=4\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

ب) $Z=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

ج) $Z=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$.

د) $Z=-2\left(\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}\right)$.

حل التمرين 02 :

تعيين طويلة و عمدة العدد المركب Z :

أ) $Z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$

ومنه: $|Z|=4$ و $Arg(Z)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in Z$

ب) $Z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=3\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=3\left(\cos(\pi+\frac{\pi}{3})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{3})\right)$

ومنه $|Z|=3$ و $Arg(Z)=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in Z$

ج) $Z=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})\right)$

ومنه $Z=\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})\right)$

ومنه $|Z|=\sqrt{2}$ و $Arg(Z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in Z$

د) $Z=-2\left(\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(-\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\left(\sin(-\frac{\pi}{6})+i\cos(-\frac{\pi}{6})\right)$

أي $Z=2\left(\cos(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{6}))+i\sin(\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{6}))\right)$

ومنه: $Z=2\left(\cos(\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{2\pi}{3})\right)$

و منه $|Z|=2$ و $Arg(Z)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ مع $k\in Z$

التمرين 03:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$z^2-8\sqrt{3}.z+64=0$

2) نعتبر النقطتين A و B لاحقتاها على الترتيب :

$z_A=4\sqrt{3}-4i$ و $z_B=4\sqrt{3}+4i$

أ/ أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي .

ب/ ما طبيعة المثلث OAB .

3) لتكن C النقطة ذات اللاحقة $z_C=-\sqrt{3}+i$

و لتكن النقطة D حيث : $z_D=e^{-i.\frac{\pi}{3}}.z_C$

- عين لاحقة D

4) نسمي G مرجح الجملة $\{(B,1),(D,1),(O,-1)\}$

أ/ برر وجود G ثم بين أن لاحقتها : $Z_G=4\sqrt{3}+6i$

ب/ أحسب المسافات BG ، DG ، OG .

ج/ حدد حسب قيم العدد الحقيقي λ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق العلاقة الأتية :

$BM^2+DM^2-OM^2=\lambda$

حل التمرين 03 :

1) حل المعادلة : $Z^2 - 8\sqrt{3}Z + 64 = 0$

نحسب المميز المختصر Δ' :

$$\Delta' = \left(-4\sqrt{3}\right)^2 - (1)(64) = -16 = (4i)^2$$

وعليه فالمعادلة تقبل حلان متمايزان :

$$Z' = \frac{4\sqrt{3} - 4i}{1} = 4\sqrt{3} - 4i$$

و $$Z'' = \frac{4\sqrt{3} + 4i}{1} = 4\sqrt{3} + 4i$$

2) أ/ كتابة كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي :

$z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ و $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$

تعين طويلة وعمدة z_A :

$$|z_A| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{64} = 8$$

و $$Arg(z_A) = \theta : \begin{cases} \cos\theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

وعليه فإن : $Arg(z_A) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث: $(k \in Z)$

ومنه الشكل المثلثي لـ z_A : $z_A = 8 \cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

تعين طويلة وعمدة z_B :

بما أن z_A و z_B مترافقان فإن : $|z_B| = |z_A| = 8$ ؛

$$Arg(z_B) = -Arg(z_A) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ومنه فالشكل المثلثي لـ z_B : $z_B = 8 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

3) تعيين لاحقة z_D : $z_D = e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)} \cdot z_C$

لدينا: $e^{-i\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ومنه:

$$z_D = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\sqrt{3} + i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2i$$

أ/ G موجودة لأن : $1 + 1 + (-1) = 1 \neq 0$ وتحقق

العلاقة $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GO} = \vec{0}$ تعيين لاحقة G :

$$z_G = \frac{z_B + z_D - z_O}{1 + 1 + (-1)} = 4\sqrt{3} + 4i + 2i - O = 4\sqrt{3} + 6i$$

ب/ حساب المسافات $OG; DG; BG$:

$$BG = |z_G - z_B| = |4\sqrt{3} + 6i - 4\sqrt{3} - 4i| = |2i| = 2$$

$$DG = |z_G - z_D| = |4\sqrt{3} + 6i - 2i| = |4\sqrt{3} + 4i|$$

$$= \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + (4)^2} = 8$$

$$OG = |z_G| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

جـ) تحديد حسب قيم λ مجموعة النقط M التي تحقق :

$$BM^2 + DM^2 - OM^2 = \lambda$$

لدينا: $BM^2 + DM^2 - OM^2 = \lambda$

$$\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 - \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 = \lambda$$

$$BG^2 + GM^2 + 2 \cdot \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GM} + DG^2 + GM^2 + = \lambda$$

$$2\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{GM} - OG^2 - 2\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{GM} - GM^2$$

$$BG^2 + DG^2 + -OG^2 + 2\overrightarrow{GM}\left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{OG}\right) + GM^2 = \lambda$$

نعلم أن : $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{OG} = \vec{0}$

ومنه: $GM^2 = \lambda - BG^2 - DG^2 + OG^2$

$$= \lambda - 4 - 8 + 84 = \lambda + 72$$

- إذا كان $\lambda = -72$ ، فإن : $GM^2 = 0$

وعليه فإن مجموعة النقط M هي النقطة G .

- إذا كان $\lambda + 72 > 0$ أي $\lambda > -72$.

فإن مجموعة النقط M هي جميع نقاط الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $r = \sqrt{\lambda + 72}$.

- إذا كان $\lambda + 72 < 0$ أي $\lambda < -72$. فإن مجموعة النقط M هي مجموعة خالية .

التمرين 04

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-2z+4=0$.
ثم اكتب حلي هذه المعادلة على الشكل الأسي.

2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A, B, C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=-z_A$.

أ) علم النقط A, B, C.

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$.

جـ) عين طويلة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$ و عمدة له ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

3- T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث:

$$z'=(1-i\sqrt{3})z+3-i\sqrt{3}$$

أ) عين طبيعة التحويل T و عناصره المميزة.

ب) عين صورة النقطة A بالتحويل T.

جـ) استنتج طبيعة التحويل ToT و عناصره المميزة.

حل التمرين 04:

1) حل في C: $z^2-2z+4=0$, $\Delta=-12=12i^2$

و منه $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=1-i\sqrt{3}$

كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي: $|z_1|=|1+i\sqrt{3}|=2$

و $\arg(z_1)=\arg(1+i\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ldots k\in Z$

ومنه $z_1=2e^{\frac{i\pi}{3}}$ و $z_2=2e^{-\frac{i\pi}{3}}$

2) لدينا: $z_A=1+i\sqrt{3}, z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=-z_A$.

أ) تعليم النقط A, B, C نعلم أن $A\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$ و $B\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$

ب) الشكل الجبري لـ $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$:

$$\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}=\frac{-2i\sqrt{3}}{2}=-i\sqrt{3}$$

جـ) طويلة $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$ و عمدته: $\left|\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right|=|-i\sqrt{3}|=\sqrt{3}$

$$Arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right)=-\frac{\pi}{2}$$ و

طبيعة المثلث ABC: بما أن $k\in z$ ...

$$Arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

فان المثلث ABC قائم في B.

3) أ) طبيعة التحويل T: لدينا العبارة المركبة للتحويل T:

$$z'=(1-i\sqrt{3})z+3-i\sqrt{3}$$

بما أن $|1-i\sqrt{3}|=2\neq 1$ فان T تشابه نسبته 2 وزاويته $\arg(1-i\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$ ومركزه $z_\Omega=\frac{3-i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}=-1-i\sqrt{3}=z_C$

ب) صورة النقطة A بالتحويل T :

$$z_B'=(1-i\sqrt{3})z_A+3-i\sqrt{3}$$

أي $z_B'=(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})+3-i\sqrt{3}$

ومنه $z_B'=7-i\sqrt{3}$

جـ) طبيعة ToT : بما أن T تشابه فان ToT تشابه نسبته هي $|a|\times|a|=4$ و زاويته هي $\arg(ToT)=-\frac{2\pi}{3}$

التمرين 05:

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z-4)(z^2-8\sqrt{3}z+64)=0$.

2- نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A, B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=4\sqrt{3}-4i$ | $z_B=4\sqrt{3}+4i$ و $z_C=4$

أ) اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب) أحسب الأطوال OA، OB، AB ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

جـ) D النقطة التي لاحقتها $z_D=-\sqrt{3}+i$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

* عين z_E لاحقة النقطة E.

د) نسمي G مرجح الجملة المثقلة $\{(O;-1);(B;1);(E;1)\}$

* علل وجود النقطة G و بين أن هذه النقطة لاحقتها هي :

$$z_G=4\sqrt{3}+6i$$

هـ) بين أن النقط G، E، D على استقامة واحدة.

3- عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث :

$$\left\|\vec{ME}+\vec{MB}-\vec{MO}\right\|=\left\|\vec{MA}-\vec{MB}\right\|$$

حل التمرين 05 :

1) حل في C : $(z-4)(z^2-8\sqrt{3}z+64)=0$

$(z-4)(z^2-8\sqrt{3}z+64)=0$

تكافئ $z=4$ أو $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

$\Delta=-64=64i^2$ و منه $z_1=4\sqrt{3}-4i$,

$s=\{4\sqrt{3}+4i;4\sqrt{3}-4i;4\}$ إذن $z_2=4\sqrt{3}+4i$

2) النقط A , B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=4\sqrt{3}-4i$,

$z_B=4\sqrt{3}+4i$ و $z_C=4$

أ) كتابة z_A و z_B على الشكل الآسي :

$$|z_B|=\left|4\sqrt{3}+4i\right|=2$$

$\arg(z_B)=\arg(4\sqrt{3}+4i)=\frac{\pi}{6}+2k\pi....k\in Z$ و

و منه $z_A=8e^{-\frac{i\pi}{6}}$ و $z_B=8e^{\frac{i\pi}{6}}$

ب) الأطوال OA , OB , AB : $OA=|z_A|=8, OB=|z_B|=8$

$AB=|z_B-z_A|=|8i|=8$ ومنه المثلث OAB متقايس الأضلاع

جـ) لتكن : $z_D=-\sqrt{3}+i$ صورة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

معناه $z_E=e^{-\frac{i\pi}{3}}z_D$

$$z_E=(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})(-\sqrt{3}+i)$$

أي $z_E=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\sqrt{3}+i)=2i$

د) G مرجح الجملة $\{(O;-1);(B;1);(E;1)\}$:

بما أن $-1+1+1=1\neq 0$ فان G موجودة

لاحقة G هي : $z_G=4\sqrt{3}+6i$ ؟

$$z_G=\frac{-z_O+z_B+z_A}{1}=z_B+z_A=4\sqrt{3}+6i$$

هـ) النقط G , E , D على استقامة واحدة معناه

$\vec{DE}=\alpha\vec{DG}$ أو $\alpha=\frac{z_E-z_D}{z_G-z_D}$ حيث $\alpha\in R$

ومنه النقط G , E , D $\frac{z_E-z_D}{z_G-z_D}=\frac{\sqrt{3}+i}{5\sqrt{3}+5i}=\frac{1}{5}$

على استقامة واحدة.

3) عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث :

$$\left\|\vec{ME}+\vec{MB}-\vec{MO}\right\|=\left\|\vec{MA}-\vec{MB}\right\|$$

$$\left\|\vec{ME}+\vec{MB}-\vec{MO}\right\|=\left\|\vec{MG}\right\|$$

$\vec{MA}-\vec{MB}=\vec{MA}+\vec{BM}=\vec{BA}$ و

$$\left\|\vec{ME}+\vec{MB}-\vec{MO}\right\|=\left\|\vec{MA}-\vec{MB}\right\|$$

$$\left\|\vec{MG}\right\|=\left\|\vec{BA}\right\|$$ تكافئ

تكافئ $MG=BA$ ومنه مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها $BA=8$

التمرين 06:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z حيث : $P(z)=2z^3-z+1$

1) أ) بين أن العدد -1 حل للمعادلة $P(z)=0$.

ب) عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث :

$$P(z)=(z+1)(az^2+bz+c)$$

ج) حل في المجموعة C المعادلة : $P(z)=0$ ثم اكتب هذه الحلول على الشكل الآسي.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

النقط A، B، C صور الأعداد المركبة $z_A=-1$، $z_B=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ) عين اللاحقة z_D للنقطة D مرجح الجملة $\{(A;1);(B;1);(C.-1)\}$.

ب) لتكن E صورة B بالتحاكي الذي مركزه C ونسبته 2 و F صورة C بالدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{3\pi}{2}$.

* عين z_E و z_F لاحقتي النقطتين E و F على الترتيب.

حل التمرين 06 :

نعتبر: $P(z)=2z^3-z+1$

1) أ) العدد (-1) حل للمعادلة $P(z)=0$ معناه $P(-1)=0$

ب) $2z^3-z+1=az^3+(b+a)z^2+(c+b)z+c$

بالمطابقة نجد : $\begin{cases}a=2\\b+a=0;b=-2\\c+b=-1\\c=1\end{cases}$

ومنه $P(z)=(z+1)(2z^2-2z+1)$

ج) $P(z)=0$ تكافئ $z+1=0$ أي $(z_0=-1)$

أو $2z^2-2z+1=0$

* $2z^2-2z+1=0$ $\Delta=-4=4i^2$

ومنه $z_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

z_0,z_1,z_2 على الشكل الآسي :

$$z_0=e^{i\pi},\ z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}},\ z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

2) A، B، C صور الأعداد المركبة :

$z_A=-1$، $z_B=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ و $z_C=\overline{z_B}$ حيث $z_C=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$

أ) z_D مرجح الجملة $\{(A;1);(B;1);(C.-1)\}$ معناه :

$$z_D=\frac{z_A+z_B-z_C}{1+1-1}=-1+i$$

ب) * E صورة B بالتحاكي الذي مركزه C ونسبته 2

معناه $z_E=2z_B+(1-2)z_C$

أي $z_E=2(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

* F صورة C بالدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{3\pi}{2}$

معناه : $z_F=e^{\frac{3\pi}{2}i}z_C+(1-e^{\frac{3\pi}{2}i})z_B$

$$=-i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)+(1+i)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

التمرين 07:

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة C، المعادلة $z^2-6z+34=0$.

2/ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C التي لواحقها على الترتيب:

$$a=3+5i\ ,\ b=3-5i\ ,\ c=7+3i$$

ليكن z لاحقة النقطة M من المستوي و z' لاحقة النقطة M' صورة M بالانسحاب T الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $-4-2i$.

أ) بين أن : $z'=z+4-2i$ ثم تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالانسحاب T.

ب) بين أن : $\frac{b-c}{a-c}=2i$.

ج) استنتج أن طبيعة المثلث ABC،

حل التمرين 07 :

1/ حلا المعادلة $z^2-6z+34=0$:

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4.(1)(34)=-100=(10.i)^2$

و عليه المعادلة تقبل حلين متمايزين : $Z_1=\frac{6-10.i}{2}$

و $Z_2=\frac{6+10i}{2}$ أي $z_1=3-5i$ و $z_2=3+5i$.

2/ أ) من تعريف الانسحاب : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ و بالانتقال إلى تساوي اللاحقتين نجد :

$z'-z=4-2i$ و منه : $z'=z+4-2i$

ب) $\frac{b-c}{a-c}=\frac{(3-5i)-(7+3i)}{(3+5i)-(7+3i)}$

$=\frac{-4-8i}{-4+2i}\times\frac{-4-2i}{-4-2i}=\frac{40i}{20}=2i$

النقطة C هي صورة النقطة A بالانسحاب T معناه :

$z_C=z_A+4-2i$ وهذا محقق

ج) استنتاج طبيعة المثلث **ABC**: من المساواة $\frac{b-c}{a-c}=2i$

نستنتج أن : $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC})=\arg(2i)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

من المساواة $\frac{b-c}{a-c}=2i$ نستنتج أن : $\left|\frac{b-c}{a-c}\right|=|2i|$

أي : $\frac{BC}{AC}=2$ إذن: المثلث ABC قائم في النقطة C

و BC = 2 AC

التمرين 08:

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$

(الوحدة $2cm$)

1) حل في C المعادلة : $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$

(اكتب الحلول على الشكل الجبري ثم الأسي)

2) A, B نقطتان لاحقتاهما : $z_A=1+i$ ، $z_B=2i$

من أجل كل عدد مركب z نعتبر العدد المركب z' حيث:

$z'=\frac{z-2i}{z-1-i}$

أ) لتكن (F) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث $|z'|=1$

* عين و أنشئ (F).

ب) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث يكون z' تخيليا صرفا ، برهن أن : النقطة B تنتمي إلى (E) ثم عين (E).

3) ليكن R الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عين لاحقة B' صورة B بالدوران R .

ب) عين لاحقة I' صورة I بالدوران R حيث: $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

ج) عين صورتي (E)، (F) بالدوران R .

حل التمرين 08 :

1) $(z-2i)(z^2-2z+2)=0$

معناه : $z=2i$ أو $z^2-z+2=0$

$\Delta=-4$ و جذراه التربيعيان هما $2i\,,-2i$

المعادلة : $z^2-2z+2=0$ تقبل حلين هما : $z_1=1+i$ ،

$z_2=1-i$ و عليه حلول المعادلة :

$(z-2i)(z^2-2z+2)=0$ هي : $2i\,,1+i\,,1-i$

ولدينا: $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

2) أ) $z'=\frac{z-2i}{z-1-i}$ حيث : $z\neq 1+i$.

(F) مجموعة النقط M التي تحقق $|z'|=1$ هي محور القطعة $[AB]$.

ب) (E) هي مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها z' تخيليا صرفا .

* إثبات أن B تنتمي إلى (E) ثم تعيين (E) :

$z_{B'}=\frac{2i-2i}{2i-1-i}=0$ و العدد O هو تخيلي صرف

وعليه فإن B تنتمي إلى (E).

* يكون z' تخيليا صرفا إذا كان $z' = 0$

أو $\arg z' = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z$

وعليه:

$$\begin{cases} z = 2i \\ \text{و} \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in Z \end{cases}$$

والمجموعة (E) هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة A.

3) أ) $z' - \left(\frac{3}{2} + i\frac{5}{2}\right) = i\left(z - \frac{3}{2} - i\frac{5}{2}\right)$ هي عبارة الدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

$$z_{B'} = i\left(2i - \frac{3}{2} - i\frac{5}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{5}{2})$$

ب) $z_{B'} = 2 + i$ هي صورة B بالدوران R و بالمثل:

$$Z_{I'} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$$

ج) تعيين صورتي (E) و (F) بالدوران R:

* النقطة I هي منتصف القطعة $[AB]$ أي أن I هي مركز الدائرة (E).

و بما أن الدوران يساوي قياس فإن صورة (E) هي الدائرة (E') التي مركزها I' و لهما نفس نصف القطر $\frac{1}{2}AB$.

* صورة F بالدوران R هي محور القطعة $[A'B']$ حيث:

$$A' = R(A) \quad , \quad B' = R(B)$$

التمرين 09:

1) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z حيث:

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$$

أ) بين انه اذاكان z_0 حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فان $\overline{z_0}$ حلا لها ايضا ($\overline{z_0}$ مرافق z_0)

ب) احسب $P(-1)$. ثم بين انه من اجل كل z من C : $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$ حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ج) حل في C المعادلة $P(z) = 0$

2) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس (O,I,J) نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها:

$z_A = -1, z_B = 2 + i\sqrt{3} z_C = 2 - i\sqrt{3}$ على الترتيب

أ) احسب $|z_C - z_A|$، $|z_B - z_A|$ و $|z_B - z_C|$

استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) عين z_G لاحقة G مرجح الجملة $\{(A,-1),(B,2),(C,2)\}$

ج) احسب طويلة وعمدة للعدد المركب $L = \frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ ثم اكتب L على الشكل الاسي.

د) بين ان L^{2008} عددا حقيقيا موجبا.

هـ) استنتج طبيعة المثلث GAC.

حل التمرين 09:

1) أ/ إثبات انه اذاكان z_0 حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فان $\overline{z_0}$ حلا لها ايضا:

لدينا: $P(z_0) = z_0^3 - 3z_0^2 + 3z_0 + 7 = 0$

ومنه: $\overline{P(z_0)} = \overline{\left(z_0^3 - 3z_0^2 + 3z_0 + 7\right)} = 0$

ومنه: $\overline{P(z_0)} = \overline{z}_0^3 - 3\overline{z}_0^2 + 3\overline{z}_0 + 7 = 0$

وبما أن: $P(\overline{z}_0) = \overline{z}_0^3 - 3\overline{z}_0^2 + 3\overline{z}_0 + 7$

فإن $P(\overline{z}_0) = 0$

ب/ حساب $P(-1)$:

$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = 0$$

تعيين a و b حيث: $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$

لدينا:

$$\begin{aligned} P(z) &= (z+1)(z^2 + az + b) \\ &= z^3 + az^2 + bz + z^2 + az + b \\ &= z^3 + (a+1)z^2 + (b+a)z + b \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a+1=-3 \\ b+a=3 \\ b=7 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=-4 \\ b=7 \end{cases}$

وعليه فإن: $P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$

ج) حل المعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$

معناه : $z=-1$ أو $z^2-4z+7=0$

$\Delta=-12=\left(2\sqrt{3}.i\right)^2$ و جذراه التربيعيان هما $2\sqrt{3}i$ و $-2\sqrt{3}i$

المعادلة : $z^2-4z+7=0$ تقبل حلين هما :

$z_1=\frac{4+2\sqrt{3}.i}{2}=2+\sqrt{3}.i$ ، $z_1=\frac{4-2\sqrt{3}.i}{2}=2-\sqrt{3}.i$

و عليه حلول المعادلة $P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$ هي:

-1 ، $2-\sqrt{3}.i$ ، $2+\sqrt{3}.i$.

2) أ/ حساب $|z_C-z_A|$ ، $|z_B-z_A|$ و $|z_B-z_C|$

استنتاج طبيعة المثلث ABC:

$z_A=-1$, $z_B=2+i\sqrt{3}$ $z_C=2-i\sqrt{3}$

$|z_C-z_A|=|3-i\sqrt{3}|=\sqrt{3^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{3}$

ومنه: $AC=2\sqrt{3}$

$|z_B-z_A|=|3+i\sqrt{3}|$

$=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2\sqrt{3}$

ومنه: $AB=2\sqrt{3}$

$|z_B-z_C|=|2+i\sqrt{3}-2+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$

ومنه: $CB=2\sqrt{3}$

نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

ب) تعيين z_G لاحقة G مرجح الجملة $\{(A,-1),(B,2),(C,2)\}$:

$z_G=\frac{-z_A+2z_B+2z_C}{-1+2+2}=3$

ج) حساب طويلة وعمدة للعدد المركب $L=\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$:

$\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}=\frac{-1-\left(2-i\sqrt{3}\right)}{3-\left(2-i\sqrt{3}\right)}$

$=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\times\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

$=\frac{4i\sqrt{3}}{4}=i\sqrt{3}$

$\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}\right)=\arg\left(i\sqrt{3}\right)$

$=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ \ (k\in Z)$

$\left|\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}\right|=\sqrt{3}$

كتابة L على الشكل الاسي: $L=3.e^{\frac{\pi}{2}.i}$

د) إثبات ان L^{2008} عددا حقيقيا موجبا :

$L^{2008}=\sqrt{3}^{2008}.e^{\frac{2008\pi}{2}.i}$

$=\sqrt{3}^{2008}\left(\cos\frac{2008\pi}{2}+i\sin\frac{2008\pi}{2}\right)$

$=\sqrt{3}^{2008}\left(\cos 1004\pi+i\sin 1004\pi\right)$

$=\sqrt{3}^{2008}(\cos 0+i\sin 0)=\sqrt{3}^{2008}=3^{1004}$

هـ) استنتاج طبيعة المثلث GAC:

بما أن: $\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}=\sqrt{3}$ معناه :

$|z_A-z_C|=\sqrt{3}\,|z_G-z_C|$ ومنه $CA=\sqrt{3}CG$

$\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in Z)$ و

$\left(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{2}$

ومنه: نستنتج أن المثلث GAC قائم في النقطة C .

التمرين 10 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2008)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :

$Z^2-(1+2i)Z-1+i=0$. نرمز للحلين بالرمز Z_1 و Z_2 حيث :

$|Z_1|<|Z_2|$ بين أن : $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

لتكن A , B و C نقط من المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $1, Z_1, Z_2$ ليكن العدد المركب Z حيث :

$Z=\frac{Z_2-1}{Z_1-1}$.

ليكن العدد المركب Z حيث : $Z=\frac{Z_2-1}{Z_1-1}$.

ا) انطلاقا من التعريف : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

و من الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

حيث θ ; θ_1 ; θ_2 أعداد حقيقية.

ب) أكتب Z على الشكل الأسي .

جـ) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A يطلب تعيين زاويته و نسبته.

حل التمرين 10 :

1) -حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :

$$Z^2-(1+2i)Z-1+i=0$$

$\Delta=(1+2i)^2-4(1)(-1+i)=1+4i-4+4-4i=1$

و منه المعادلة تقبل حلين متمايزين هما :

$$Z'=\frac{1+2i-1}{2}=i \quad Z''=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$$

و بما أن: $|Z_1|<|Z_2|$ و لدينا $|i|<|1+i|$ فإن: $Z_1=i$ و $Z_2=1+i$.

إثبات أن $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي :

$$\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008}=\left(\frac{i(1-i)}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008}$$

لدينا : $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{2008}$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}\left[\left(\cos 2008\times\frac{\pi}{4}+i\sin 2008\times\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2008}=\frac{1}{2^{1004}}\in R$$

و عليه فإن $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2- المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A , B و C نقط من المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $1, Z_1, Z_2$ يعني أن $A(1,0); B(0,1); C(1,1)$ و $Z=\frac{Z_2-1}{Z_1-1}$

أ) برهان أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$:

لدينا: $e^{-i\theta}\times e^{i\theta}=e^{i(\theta-\theta)}=e^0=\cos 0+i\sin 0=1$

و عليه فإن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$.

من جهة أخرى : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times\frac{1}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times e^{-i\theta_2}$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1-i\theta_2}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

ب) كتابة Z على الشكل الأسي :

$$Z=\frac{Z_2-1}{Z_1-1}=\frac{1+i-1}{i-1}=\frac{i}{-1+i}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

$$Z=\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

جـ) كتابة Z على الشكل المثلثي :

لدينا $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

ومنه $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

استنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A يطلب تعيين زاويته و نسبته :

لدينا : $Z=\frac{Z_2-1}{Z_1-1}$ و بالتالي : $z_2-1=z(z_1-1)$

إذن: $z_2-1=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right](z_1-1)$

أي أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{4}$ و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

التمرين 11 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2008)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول Z :

$Z^2+iZ-2-6i=0$.

2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

النقطتين A , B اللتين لاحقتاهما على الترتيب Z_A, Z_B على الترتيب حيث : $Z_A=2+i$ $Z_B=-2-2i$

عين Z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3) لتكن C النقطة ذات اللاحقة Z_C حيث: $Z_C=\frac{4-i}{1+i}$.

أكتب Z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4)أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(Z_0)$ و نسبته K $(K>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(Z)$ النقطة $M'(Z')$ هي : $Z'-Z_0=Ke^{\theta}(Z-Z_0)$

ب- تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل Z المعرف بـ : $Z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(Z+\frac{1}{2}i\right)$

حل التمرين 11 :

1/ حل المعادلة : $\Delta=(i)^2-4\times(-2-6i)$

$=-1+8+24i$

$=7+24i$

حساب جذر تربيعي لـ Δ :

نبحث عن عددين حقيقيين x و y حيث :

$(x+iy)^2=7+24i$.

المعادلة $(x+iy)^2=7+24i$ تكافئ :

$x^2-y^2+2ixy=7+24i$

بالإضافة إلى ذلك نستنتج من هذه المعادلة أن :

$\left|(x+iy)^2\right|=|7+24i|$

أي $x^2+y^2=\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{625}=25$.

نستنتج أن : $\begin{cases}x^2+y^2=25\\x^2-y^2=7\\2xy=24\end{cases}$

أي أن : $\begin{cases}x^2=\frac{25+7}{2}=16\\y^2=\frac{25-7}{2}=9\\2xy=24\end{cases}$

و منه : $x=4$ و $y=3$.

جذر تربيعي لـ Δ : $4+3i$ و $-4-3i$

$z_2=\frac{-i+4+3i}{2}=2+i$ و

$z_1=\frac{-i-4-3i}{2}=-2-2i$.

2/ المركز ω للدائرة (Γ) منتصف القطعة $[AB]$:

$$z_\omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-2-2i+2+i}{2} = -\frac{1}{2}i$$

3/ كتابة z_c على شكله الجبري :

$$z_c = \frac{4-i}{1+i} = \frac{(4-i)(1-i)}{2} = \frac{4-i-4i-1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$$

إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) : يكفي أن نثبت أن $\omega C = \frac{AB}{2}$.

$$\frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|-2-2i-i|}{2}$$

$$= \frac{|-4-3i|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

$$\omega C = |z_c - z_\omega| = \left|\frac{3}{2} - \frac{5}{2}i + \frac{1}{2}i\right| = \left|\frac{3}{2} - 2i\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

نستنتج أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

4/ أ/ تكون النقطة M' صورة لنقطة M تختلف عن M_0 بالتشابه المباشر S الذي مركزه M_0 إذا تحقق ما يلي :

$$\begin{cases} M_0M' = k \times M_0M \\ \left(\vec{M_0M}, \vec{M_0M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

تكافئ :

$$\begin{cases} |z' - z_0| = k \times |z - z_0| \\ \arg\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

يعني أن :

$$\begin{cases} \frac{|z'-z_0|}{|z-z_0|} = k \\ \arg\left(\frac{z'-z_0}{z-z_0}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

نستنتج أن العددين المركبين $\frac{z'-z_0}{z-z_0}$ و $k(\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta))$ متساويين.

ومنه : $\frac{z'-z_0}{z-z_0} = k \times e^{i\vartheta}$

أي $z'-z_0 = k \times e^{i\theta}(z-z_0)$.

نلاحظ أن لاحقة M_0 كذلك تحقق هذه العلاقة.

ب/ التحويل S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة التي لاحقتها $-\frac{1}{2}i$ أي ω ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

التمرين 12 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2009)

$P(Z)$ كثير حدود حيث :

$P(Z)=(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$ و Z عدد مركب

1) حل في المجموعة C المعادلة $P(Z)=0$.

2) نضع : $Z_1 = 1+i$ ، $Z_2 = 1-\sqrt{3}\,i$.

أ/ أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي .

ب/ أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي .

جـ/ استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) أ/ n عدد طبيعي ، عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا .

ب/ أحسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$

حل التمرين 12 :

$P(Z)$ كثير حدود حيث :

$$P(Z)=(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$$

و Z عدد مركب .

1) حل في المجموعة C المعادلة $P(Z)=0$:

$$(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)=0$$

ومنه : $Z-1-i=0$ معناه : $Z=1+i$

أو : $Z^2-2Z+4=0$

$$\Delta'=(-1)^2-(1)(4)=-3=(\sqrt{3}\,i)^2$$

وعليه فإن: $Z'=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{1}=1-\sqrt{3}\,.i$

و $Z''=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1}=1+\sqrt{3}\,.i$

ومنه حلول المعادلة : $S=\{1+i\,;1+i\sqrt{3}\,;1-i\sqrt{3}\}$

2) أ/ كتابة Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي: $Z_1=1+i$

ومنه $(|Z_1|=\sqrt{2}$ و $\arg(Z_1)=\dfrac{\pi}{4})$ ومنه :

$$Z_1=\sqrt{2}.e^{i.\frac{\pi}{4}}$$

ومنه $Z_2=1-\sqrt{3}\,i$ ومنه $(|Z_2|=2$ و $\arg(Z_2)=\dfrac{-\pi}{3})$

ومنه : $Z_2=2.e^{-i.\frac{\pi}{3}}$

ب/ الشكل الجبري :

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+\frac{1+\sqrt{3}}{4}i$$

الشكل الأسي : $(|Z_1|=\sqrt{2}$ و $\arg(Z_1)=\dfrac{\pi}{4})$

و $(|Z_2|=2$ و $\arg(Z_2)=\dfrac{-\pi}{3})$

ومنه : $\arg\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{-\pi}{3}=\dfrac{7\pi}{12}$ و $\left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

وعليه : $\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.e^{i.\frac{7\pi}{12}}$

جـ/ لدينا من جهة : $\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}i$

ومن جهة ثانية: $\dfrac{Z_1}{Z_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)+i.\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]$

بالمطابقة نجد :

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\\[2ex]\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\[2ex]\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$$

3) أ/ $\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)^n=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\left[\cos\left(\dfrac{7\pi.n}{12}\right)+i.\sin\left(\dfrac{7\pi.n}{12}\right)\right]$

$\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا معناه : $\sin\left(\dfrac{7\pi.n}{12}\right)=0$

أي : $\dfrac{7\pi.n}{12}=k.\pi$ حيث $(k\in N)$

ومنه : $\dfrac{7n}{12}=k$ معناه : $7n$ من مضاعفات العدد 12

أي : n من مضاعفات العدد 12 لأن (7 و12 أوليان فيما بينهما).

ومنه : $n=12\lambda$ حيث $(\lambda\in N)$

ب/ $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}=\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{12\times 20}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}=\frac{1}{2^{228}}$

التمرين 13 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2009)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :

$Z^2-2Z+4=0$

2) نسمي Z_1 ، Z_2 حلي هذه المعادلة .

أ/ اكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي .

ب/ A ، B ، C هي النقط من المستوى التي لواحقها على الترتيب : $Z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $Z_B=1+i\sqrt{3}$ ،

$Z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$

(i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2=-1$)

أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

جـ/ جد الطويلة وعمدة العدد المركب Z حيث :

$$Z=\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}$$

د/ أحسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k .

حل التمرين 13 :

1) $Z^2-2Z+4=0$

ولدينا : $\Delta'=(-1)^2-(1)(4)=-3=\left(\sqrt{3}.i\right)^2$

ومنه : $Z_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{1}=1-i\sqrt{3}$

و $Z_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{1}=1+i\sqrt{3}$

2) أ/ $Z_1=1-i\sqrt{3}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

ومنه : $Z_1=\sqrt{2}.e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$Z_2=1+i\sqrt{3}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

ومنه : $Z_2=\sqrt{2}.e^{\frac{\pi}{3}i}$

ب/ $Z_A=1-i\sqrt{3}, Z_B=1+i\sqrt{3}, Z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$

ومنه : $A\left(1;-\sqrt{3}\right)$ و $B\left(1;\sqrt{3}\right)$ و $C\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$AB=\sqrt{(1-1)^2+\left(\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)\right)^2}=2\sqrt{3}$

$AC=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\sqrt{3}\right)\right)^2}=3$

$BC=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\sqrt{3}\right)\right)^2}=\sqrt{3}$

لدينا : $AB^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2=12$ و $AC^2+BC^2=12$

ومنه : $AB^2=AC^2+BC^2$ حسب نظرية فيتاغورث فإن المثلث ABC قائم في C.

جـ/ $|Z|=\left|\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}\right|=\frac{|Z_C-Z_B|}{|Z_A-Z_B|}$

$|Z_C-Z_B|=\left|\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$

$|Z_A - Z_B| = |-2i\sqrt{3}| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

ومنه: $|Z| = \left|\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}\right| = \frac{|Z_C - Z_B|}{|Z_A - Z_B|} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

• $\arg(Z) = \arg(Z_C - Z_B) - \arg(Z_A - Z_B)$

$\arg(Z_C - Z_B) = \arg\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

و $\arg(Z_A - Z_B) = \arg(-2i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

ومنه: $\arg(Z) = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

حيث: (k عدد صحيح).

د/ $Z^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3\left[\cos 3.\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 3.\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{8}[\cos\pi + i\sin\pi] = -\frac{1}{8}$

$Z^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6\left[\cos 6.\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 6.\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{1}{64}[\cos 2\pi + i\sin 2\pi] = \frac{1}{64}$

$Z^{3k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k}\left[\cos 3k.\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin 3k.\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{3k}[\cos k\pi + i\sin k\pi]$

إذا كان: k فردي فإن: $Z^{3k} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}$

و إذا كان: k زوجي فإن: $Z^{3k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3k}$

التمرين 14:

(بكالوريا علوم تجريبية 2010)

نعتبر م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب $z_A = 1+i$ و $z_B = 3i$.

1. أكتب على الشكل الأسي: z_A و z_B.

2. ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3. لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-2),(C,2)\}$.

أ) عين z_D لاحقة النقطة D.

ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4. لتكن النقطة M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B - z}{z_D - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B - z}{z_D - z}$، عين عندئذ المجموعة (Δ).

حل التمرين 14:

1. لدينا $|z_A| = \sqrt{2}$ و $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4}$

و بالتالي: $z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $|z_B| = 3$ و $\arg(z_B) = \frac{\pi}{2}$

بالتالي: $z_B = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

2. أ) نسبة التشابه المباشر هو $2=|2i|$ و زاويته هي $\arg(2i)$ أي $\frac{\pi}{2}$ و مركزه هو النقط ω التي لاحقتها z_0 تحقق : $z_0=2iz_0+6+3i$ و منه $\omega=B$

ب) صورة النقطة A بالتشابه تحقق :

$$z_C=2iz_A+6+3i=4+5i$$

ج) بما أن C صورة A بالتشابه الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$ فهذا يعني أن المثلث ABC مثلث قائم في B .

3. أ) بما أن D مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-2),(C,2)\}$ فإن : $2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ أي $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

أي $z_D-z_A=z_C-z_B$ أي : $z_D=5+7i$.

ب) في الرباعي $ABCD$ لدينا $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و بالتالي فالرباعي متوازي أضلاع و بما أن ABC قائم في B فإن الرباعي $ABCD$ مستطيل.

4. أ) لدينا $\frac{z_B-z_E}{z_D-z_E}=\frac{3i-6-3i}{5+3i-6-3i}$ و هو عدد حقيقي موجب إذن $E\in(\Delta)$.

ب) عمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_E}{z_D-z}$ هو قيس الزاوية $(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MB})$.

لدينا بعد وضع $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in R^2$ نجد أن :

$\frac{z_B-z}{z_D-z}\in R_+^*$ تعني $y=3$ مع $x\neq 5$ مع $x^2-5x>0$

أي $x\in]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$ أي مجموعة النقط (Δ) هي تقاطع المستقيم ذي المعادلة $y=3$ باستثناء النقطة $S(5,3)$ مع المجموعة $]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$ أي هي اتحاد نصفي المستقيمين $y=3$ مع $x\in]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$.

التمرين 15 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2010)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2-6z+18=0$ ، ثم اكتب الحلين على الشكل الأسي.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A,B,C,D لاحقاتها على الترتيب $z_A=3+3i$ ، $z_B=-\bar{z}_A$ ، $z_C=-z_A$ ، $z_D=-z_B$

أ) بين أن النقط A,B,C,D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم .

ب) عين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى النقطة B .

ج) بين أن النقط A,O,C استقامية وكذلك النقط B,O,D .

د) استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

حل التمرين 15 :

1) مميز المعادلة $z^2-6z+18=0$ هو -36 و بالتالي فالعدد $6i$ هو أحد جذري المميز و منه : للمعادلة حلين هما $3-3i$ و $3+3i$

$3-3i=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $3+3i=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) أ) لإثبات النقط A,B,C,D تنتمي إلى دائرة مركزها O نبين أن : $OA=OB=OC=OD$ حيث : $OD=|z_D|$

و $OA=|z_A|$ و $OB=|z_B|$ و $OC=|z_C|$

لدينا: $|z_B|=|\bar{z}_A|=|z_A|$ و $|z_C|=|-z_A|=|z_A|$

و $|z_D|=|-z_B|=|-\bar{z}_A|=|z_A|$

أي أن النقط A,B,C,D $OA=OB=OC=OD$ تنتمي إلى دائرة مركزها O .

ب) زاوية الدوران R الذي يحول A إلى B هي عمدة العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ أي $\frac{3+3i}{-3-3i}$ أي $-i$ و منه زاوية الدوران هي $-\frac{\pi}{2}$.

ج) النقط A,O,C استقامية تعني أن : $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})=k\pi$ حيث $k\in Z$ أي $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)=k\pi$

لدينا $\frac{z_A}{z_C}=\frac{3+3i}{-3-3i}=-1$

و منه $\arg\left(\frac{z_A}{z_C}\right)=-\pi$ مما يعني أن C,O,A استقامية .

و بنفس الطريقة نبين استقامية D,O,B .

د) طبيعة $ABCD$: من النتائج السابقة يتبين لنا قطعتا المستقيم $[AB]$ و $[CA]$ متناصفتان في O و هما أقطار دائرة فهما متقايسين و لدينا $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{\pi}{2}$ فهذا يعني أن $ABCD$ مربع .

التمرين 16 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2011)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ ، النقط C,B,A التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$.

1) أ) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب) عين طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=iz-1-i$

أ) عين طبيعة التحويل T محددا عناصره المميزة.

ب) ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .

3) لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$.

أ) بين أن النقاط D,C,A في استقامية.

ب) عين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى النقطة D .

ج) عين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

حل التمرين 16 :

1) أ) كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$:

$$\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=\frac{-4+i+i}{2+3i+i}=\frac{-4+2i}{2+4i}$$
$$=\frac{-2+i}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}$$
$$=\frac{-2+4i+i+2}{5}=\frac{5i}{5}=i$$

ب) تعيين طويلة وعمدة العدد المركب :

بما أن : $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}=i$ و $|i|=1$ و $\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

فإن: $\left|\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$

- طبيعة المثلث ABC : المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في A .

2) أ) تعيين طبيعة التحويل T مع تحديد عناصره المميزة :

$z'=az+b$ التحويل T من الشكل $z'=iz-1-i$

بما أن $a=i$ فإن : $|a|=1$ و $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$. و بالتالي التحويل T هو الدوران الذي مركزه ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

حيث : $Z_\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{-1-i}{1-i}=\frac{-i(1-i)}{1-i}=-i$

و بالتالي التحويل T هو الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

ب) صورة النقطة B بالتحويل T هو النقطة C لأن :

$$Z'=i(2+3i)-1-i=2i-3-1-i$$
$$=-4+i=Z_C$$

3) أ) إثبات أن النقط D,C,A استقامية :

لدينا : $D(-6,2)$ و عليه : $\overrightarrow{AD}(-6,3)$ ، $\overrightarrow{AC}(-4,2)$

أي : $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ و بالتالي النقط D,C,A استقامية.

ب) تعيين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى النقطة D :

$$k=\frac{Z_D-Z_A}{Z_C-Z_A}=\frac{-6+2i+i}{-4+i+i}$$
$$=\frac{-6+3i}{-4+2i}=\frac{3(-2+i)}{2(-2+i)}=\frac{3}{2}$$

ج) تعيين العناصر المميزة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى D :

لدينا : $Z_D - Z_A = a(Z_B - Z_A)$ و عليه :

$$a = \frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-6+2i+i}{2+3i+i}$$

$$= \frac{-6+3i}{2+4i} = \frac{3i(1+2i)}{2(1+2i)} = \frac{3}{2}i$$

بما أن : $|a| = \frac{3}{2}$ و $\arg\left(\frac{3}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

فإن التشابه S مركزه A و نسبته $\frac{3}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

التمرين 17 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2011)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، النقط A, B, C التي لاحقاتها على الترتيب :

$z_A = 3-2i$ ، $z_B = 3+2i$ ، $z_C = 4i$

1) أ) علّم النقط A, B, C .

ب) ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك.

ج) عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2) عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$

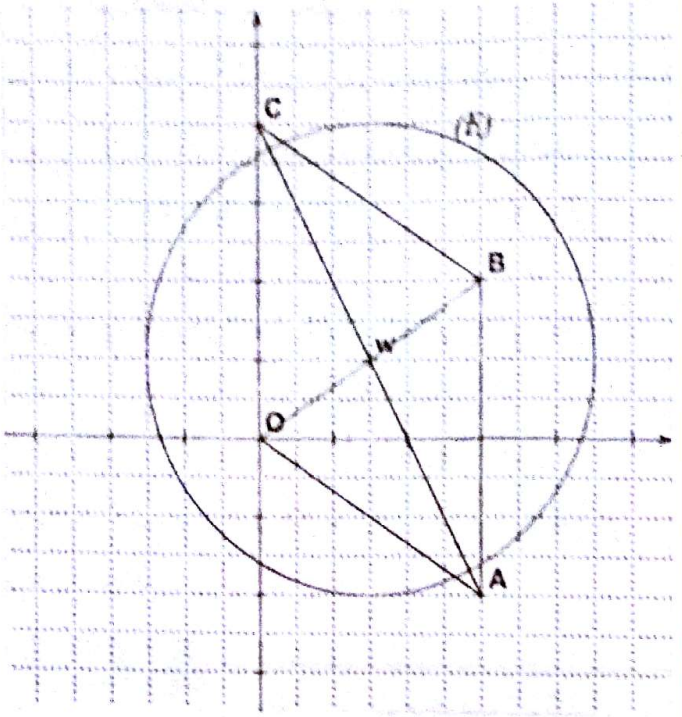
3) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة C، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 6z + 13 = 0$ نسمي z_1, z_0 حلي هذه المعادلة.

ب) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z . عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$|z - z_0| = |z - z_1|$.

حل التمرين 17 :

1) أ) تعليم النقاط :



ب) تعيين طبيعة الرباعي $OABC$:

بما أن : $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_O} = \frac{3+2i-4i}{3-2i} = \frac{3-2i}{3-2i} = 1$

فإن: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ وعليه الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع.

تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$:

$$Z_\Omega = \frac{Z_B + Z_O}{2} = \frac{3+2i}{2} = \frac{3}{2} + i$$

أو

$$Z_\Omega = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{3+2i}{2} = \frac{3}{2} + i$$

2) تعيين و إنشاء المجموعة (E) :

(E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$$

بما أن Ω مركز الرباعي $OABC$ يعني أن :

$$\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} = \vec{O}$$

فإن : $\left\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 12$ يعني أن :

$\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 12$ أي : $M\Omega = 3$

و بالتالي (E) دائرة مركزها Ω و نصف قطرها 3.

3) أ) حل المعادلة ذات المجهول Z :

$Z^2-6Z+13=0$ تعني: $\Delta=(-6)^2-4(13)=-16$

أي : $\Delta=(4i)^2$ و عليه المعادلة تقبل حلين هما :

$Z_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i$ و $Z_0=\frac{6-4i}{2}=3-2i$

ب) تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$|Z-Z_0|=|Z-Z_1|$:

$|Z-Z_0|=|Z-Z_1|$ تعني أن : $AM=BM$

و بالتالي مجموعة النقط M هي محور القطعة $[AB]$ أي محور الفواصل.

التمرين 18 :

(بكالوريا علوم تجريبية 2013)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (1) ذات المجهول z التالية:

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$.....(1)

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة (1) بـ z_1 و z_2 بين أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم تعامد ومتجانس $\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$ النقط A ، B ، C التي لاحقاتها:

$z_A=1+i\sqrt{3}$ $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A ، B ، C.

ب) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

ثم إستنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

ج) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1);(C;2)\}$ ثم أنشئ G.

د) أحسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

حل التمرين 18 :

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (1) ذات المجهول z التالية: $z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$.....(1)

$\Delta'=(2\cos\alpha)^2-(1)(4)=4\cos^2x-4$

$=4(\cos^2x-1)=4(-\sin^2x)=(2i\sin x)^2$

ومنه حلول المعادلة هي:

$z''=2\cos\alpha+2i\sin\alpha$ $z'=2\cos\alpha-2i\sin\alpha$

2) من أجل: $z_1=2\cos\frac{\pi}{3}-2i\sin\frac{\pi}{3}=1-i\sqrt{3}$

$z_2=2\cos\frac{\pi}{3}+2i\sin\frac{\pi}{3}=1+i\sqrt{3}$ $\alpha=\frac{\pi}{3}$

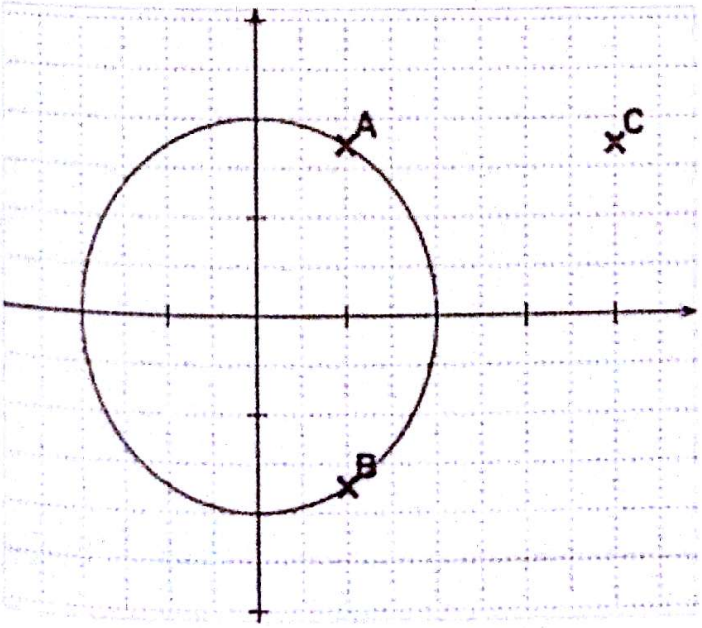
$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right|=1$

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$

$=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{-2\pi}{3}$ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=\cos\left(\frac{-2\pi\times2013}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-2\pi\times2013}{3}\right)$

$=\cos(1342\pi)-i\sin(1342\pi)=1$



ا) أنشئ النقط A ، B ، C:

ب/ كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

استنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ومنه } z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}(z_B - z_A)$$

أي من الشكل: $z_M - z_A = a(z_{M'} - z_A)$ و $S(M) = M'$

وبما أن: $|a| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\arg(a) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$

وعليه S تشابه مباشر مركزه A

ونسبته $|a| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

وزاويته: $\theta = \arg(a) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$

ج) تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة :

$$\{(A;1),(B;-1);(C;2)\}$$

$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{1 - 1 + 2} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

د) أحساب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع:

$ABDG$ متوازي أضلاع معناه: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$

ومنه $z_B - z_A = (z_D - z_G)$ ومنه $z_D = z_G + (z_B - z_A) = 4$

المتتاليات العددية

البرهان بالتراجع:

مبدأ الإستدلال بالتراجع: لتكن $P(n)$ خاصية متعلقة بمتغير طبيعي n و n_0 عدد طبيعي معلوم.

للبرهان على صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$

نتبع الخطوات الآتية:

1) نتأكد من صحة الخاصية $P(n)$ من أجل $n = n_0$.

2) نفرض الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$.

إذا تحققت الخطوتين (1) و (2) فإن الخاصية $P(n)$ تكون صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$.

تمرين تطبيقي: 01

n عدد طبيعي غير معدوم. نعتبر المجموع S_n حيث:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n$$

1) أحسب S_2، S_5.

2) عين عبارة S_{n+1} بدلالة S_n.

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $S_n = \dfrac{n^2+n}{2}$

الحل:

1) $S_2 = 1+2 = 3$ و $S_5 = 1+2+3+4+5 = 15$

2) $S_{n+1} = 1+2+3+\ldots\ldots\ldots+n+(n+1)$

ومنه: $S_{n+1} = S_n + (n+1)$

3) البرهان بالتراجع أنه من أجل $n \in N^*$

فإن $S_n = \dfrac{n^2+n}{2}$:

أ) نتحقق من الخاصية من أجل $n = 1$: لدينا:

$S_1 = 1$ و $\dfrac{1^2+1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ (إذن الخاصية من أجل $n=1$ محققة)

ب) نفرض الخاصية محققة من أجل الرتبة n ونبرهن من أجل الرتبة $n+1$:

أي نفرض أن: $S_n = \dfrac{n^2+n}{2}$

ونبرهن أن: $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+(n+1)}{2}$

أي $S_{n+1} = \dfrac{n^2+3n+2}{2}$

لدينا: $S_{n+1} = S_n + (n+1) = \dfrac{n^2+n}{2} + (n+1)$

$$= \frac{n^2+n+2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$

ومنه من أجل $n \in N^*$ فإن $S_n = \dfrac{n^2+n}{2}$.

تمرين تطبيقي: 02

نعتبر المجموع: $S_n = 1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1)$

1) أحسب S_1, S_2, S_3.

2) عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $S_n = n^2$

الحل:

1) حساب S_1, S_2, S_3 : $S_1 = 1$ ، $S_2 = 1+3 = 4$ ،
$S_3 = 1+3+5 = 9$

2) • التعبير عن S_{n+1} بدلالة S_n :

$$S_{n+1} = 1+3+5+.....+(2n-1)+(2(n+1)-1)$$
$$= S_n + 2n + 1$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

فإن : $S_n = n^2$.....(P_n)

• نتحقق من الخاصية (P_n) من أجل $n = 1$:

لدينا : $S_1 = 1^2$ أي : $1 = 1$ وهذا صحيح .

• نفرض الخاصية (P_n) صحيحة من أجل الرتبة n

أي : $S_n = n^2$ ونبرهن عليها من أجل الرتبة $n+1$

أي نبرهن أن: $S_{n+1} = (n+1)^2$

لدينا: $S_{n+1} = S_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $S_n = n^2$

تمرين تطبيقي 03

n عدد طبيعي ، نضع : $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

1) أحسب S_5 ، S_2 .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$S_n = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1)$$

الحل:

1) حساب S_5 ، S_2 : $S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$ ،
$S_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

2) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$S_n = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1).....(P)$$

أ/ نتحقق من الخاصية (P) من أجل $n = 0$:

من جهة لدينا : $\frac{1}{6} \times 0(2 \times 0^2 + 3 \times 0 + 1) = 0$

ومن جهة ثانية لدينا : $S_0 = 0^2 = 0$ ومنه الخاصية (P) محققة من أجل 0

ب/ نفرض الخاصية (P) محققة من أجل الرتبة n

أي : $S_n = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1).....(P)$

ونبرهن عليها من أجل الرتبة $n+1$ أي نبرهن أن:

$$S_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(2(n+1)^2 + 3(n+1) + 1)$$
$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6)$$
$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{13}{6}n^2 + 3n + 1$$

لدينا :

$$S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = S_n + (n+1)^2$$

ومنه : $S_{n+1} = \frac{1}{6}n(2n^2 + 7n + 6) + (n+1)^2$

$$= \frac{1}{6}n(2n^2 + 7n + 6) + n^2 + 2n + 1$$
$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{13}{6}n^2 + 3n + 1$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$S_n = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1).....(P) .$$

تذكير حول المتتاليات العددية :

1) تعريف: نسمي متتالية عددية، كل دالة لمجموعة الأعداد الطبيعية أو جزء منها في مجموعة الأعداد الحقيقية .

نرمز لمتتالية عددية برموز من الشكل: (u_n) ، (v_n) ، (w_n) ..الخ.

2) اتجاه تغير متتالية عددية:

يعرف اتجاه تغير متتالية (u_n) بدراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .و عليه تكون المتتالية العددية (u_n) :

(u_n) متزايدة تماما إذا كان من أجل كل n فإن: $u_{n+1}-u_n>0$

(u_n) متناقصة تماما إذا كان من أجل كل n فإن: $u_{n+1}-u_n<0$

(u_n) ثابتة إذا كان من أجل كل n فإن : $u_{n+1}-u_n=0$

3) المتتالية المحدودة من الأعلى :

(u_n) محدودة من الأعلى إذا كان من أجل كل n فإنه يوجد عدد حقيقي ثابت A بحيث تكون : $u_n \leq A$.

المتتالية المحدودة من الأسفل :

(u_n) محدودة من الأسفل إذا كان من أجل كل n فإنه يوجد عدد حقيقي ثابت A بحيث تكون : $u_n \geq A$.

4) المتتالية المتقاربة :

تعريف 01: إذا كانت المتتالية معرفة بحدها العام u_n وكانت: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ حيث l عدد حقيقي ثابت فإن المتتالية (u_n) تكون متقاربة .

تعريف 02: إذا كانت (u_n) محدودة من الأعلى و متزايدة أو إذا كانت (u_n) محدودة من الأسفل و متناقصة فإن المتتالية (u_n) تكون متقاربة .

ملاحظة: لإثبات أن متتالية (u_n) محدودة بالعدد A يمكن دراسة إشارة الفرق $u_n - A$ ، أو نبرهن بالتراجع ، و إذا كانت $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$.

5) المتتاليات الحسابية و الهندسية :

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف	$u_{n+1}=u_n+r$ / r ثابت حقيقي.	$u_{n+1}=u_n\times q$ / q ثابت حقيقي
عبارة الحد العام	$u_n=u_0+nr$ إذا كان u_0 هو الحد الأول. $u_n=u_p+(n-p)r$ إذا كان u_p حدا من حدودها	$u_n=u_0\times q^n$ إذا كان u_0 هو الحد الأول. $u_n=u_p\times q^{n-p}$ إذا كان u_p حدا من حدودها.
عبارة المجموع	$S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$	$S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$ $=u_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right), q\neq 1$
خاصية ثلاث حدود متتابعة	$a+c=2b$	$a\times c=b^2$

6) نهاية متتالية هندسية :

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q حدها العام:

1) إذا كان: $q>1$ و $u_0\neq 0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$

وتكون المتتالية (u_n) متباعدة.

2) إذا كان: $q=1$ فإن المتتالية (u_n) تكون ثابتة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$

3) إذا كان: $-1<q<1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ وتكون المتتالية (u_n) متقاربة.

4) إذا كان: $q\leq -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة وليست لها نهاية .

7) المتتاليتان المتجاورتان :

(u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان إذا تحقق ما يلي :

1) (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

نظرية: إذا كانت (u_n) و (v_n) متجاورتان فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ حيث a عدد حقيقي ثابت

8) التمثيل البياني لحدود متتالية المعرفة بالعلاقة التراجع $u_{n+1}=f(u_n)$

1) ننشئ (C_f) التمثيل البياني للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) فإن مجموعة النقط $M(u_n;u_{n+1})$ هي نقاط من (C_f).

2) ننشئ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

3) نعين أول نقطة $M_0(u_0;u_1)$.

4) نسقط $M_0(u_0;u_1)$ على (Δ) وفق (Ox) فنحصل على نقطة A_0 .

5) نسقط A_0 على (C_f) وفق (Oy) فنحصل على النقطة $M_1(u_1;u_2)$.

وهكذا نكرر العملية فنحصل على جميع النقاط :

$M_2(u_2;u_3)$ ، $M_3(u_2;u_3)$ ، ...

تمارين

التمرين 01:

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)$$

2) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$P(n)..... \quad 0^3+1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3) نضع: $t_n=1\times2+2\times3+3\times4+....+n(n+1)$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$t_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

حل التمرين 01 :

1) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)..(P)$$

• نتحقق من الخاصية (P) من أجل $n=0$: من جهة لدينا :

$\frac{1}{6}\times0(2\times0^2+3\times0+1)=0$ ومن جهة ثانية لدينا :

$0^2=0$

ومنه الخاصية (P) محققة من أجل $n=0$.

• نفرض الخاصية (P) محققة من أجل الرتبة n أي :

$$1^2+2^2+3^2+....+n^2=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)..(P)$$

ونبرهن عليها من أجل الرتبة $n+1$ أي نبرهن أن :

$$1^2+2^2+3^2+.....+n^2+(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\left(2(n+1)^2+3(n+1)+1\right)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+7n+6)$$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{13}{6}n^2+3n+1$$

لدينا : $1^2+2^2+3^2+.....+n^2+(n+1)^2$

$$=\left(\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)\right)+(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2+7n+6)+(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2+7n+6)+n^2+2n+1$$

$$=\frac{1}{3}n^3+\frac{13}{6}n^2+3n+1$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$1^2+2^2+3^2+.....+n^2=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1)$$

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$P(n)..... \quad 0^3+1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

• نتحقق من الخاصية $P(n)$ من أجل $n=0$:

$$0^3=\frac{0^2(0+1)^2}{4}$$

أي: $0=0$ ومنه الخاصية $P(n)$ محققة من أجل $n=0$

• نفرض أن من أجل الرتبة n أي :

$$0^3+1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ونبرهن أن:

$$0^3+1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$$

لدينا:

$$0^3+1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$

لأن حسب فرضية التراجع

$$0^3+1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

إذن: $0^3+1^3+\ldots+n^3+(n+1)^3$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)(n+1)^2$$

$$=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)$$

$$=(n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{4}\quad=(n+1)^2\frac{(n+2)^2}{4}$$

$$=\frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$$

إذن: الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة: من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$1^3+1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن: $t_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

- من أجل $n=1$ لدينا $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{3}(2)(3)=2$ و $t_1=2$ إذن: الخاصية محققة من أجل $n=1$
- نفرض أن $t_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ من أجل $n>1$ هل $t_{n+1}=\frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$

لدينا:

$$t_{n+1}=1\times2+2\times3+\ldots+n(n+1)+(n+1)(n+2)$$

$$=t_n+(n+1)(n+2)$$

حسب الفرضية لدينا: $t_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

ومنه: $t_{n+1}=(n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right)$

$$=\frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$$

إذن: الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نستنتج انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$$t_n=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

التمرين 02:

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}=2u_n-3$$

1) أحسب $u_5;u_4;u_3;u_2;u_1$

2) أحسب $3-u_0$ و $3-u_1$ و $3-u_2$ و $3-u_3$ ثم أعط تخمينا حول عبارة $3-u_n$ بدلالة n ثم برهن صحتها بالتراجع.

3) استنتج عبارة u_n بدلالة n

حل التمرين 02:

1) $u_1=2u_0-3=2(2)-3=1$

$u_2=2u_1-3=2(1)-3=-1$

$u_3=2u_2-3=2(-1)-3=-5$

$u_4=2u_3-3=2(-5)-3=-13$

$u_5=2u_4-3=2(-13)-3=-29$

2) لدينا: $3-u_0=3-2=1=2^0$

$3-u_1=3-1=2=2^1$

$3-u_2=3+1=4=2^2$

$3-u_3=3+5=8=2^3$

$3-u_4=3+13=16=2^4$

$3-u_5=3+29=32=2^5$

نستنتج أن: $3-u_n=2^n$ ولنبرهن هذه الخاصية بالتراجع:

لدينا الخاصية محققة من أجل $n=0$ لأن: $3-u_0=2^0$

أي: $1=1$

نفرض أن $3-u_n=2^n$ من أجل الرتبة n ونبرهن على صحة الخاصية من أجل الرتبة $n+1$ أي نبرهن أن:

$$3-u_{n+1}=2^{n+1}$$

لدينا: $3-u_{n+1}=3-(2u_n-3)=6-2u_n$

$$=2(3-u_n)=2\times2^n=2^{n+1}$$

(لأن $u_n = 2^n - 3$ حسب الفرضية)

إذن: الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة: من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = 2^n - 3$

3) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n:

$2^n - 3 = u_n$ إذن $u_n = 3 - 2^n$

التمرين 03:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r ، حدها الرابع يساوى 3 و حدها الخامس يساوي 5 .

1) أوجد الأساس r و حدها الأول u_0 .

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3) هل العدد 37 حدا من حدود المتتالية (u_n) ، إذا كان حدا ما رتبته .

4) أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$

5) أحسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ بدلالة n.

حل التمرين 03 :

1) إيجاد الأساس r و حدها الأول u_0 :

لدينا : حدها الرابع يساوى 3 معناه : $u_3 = 3$ و حدها الخامس يساوي 5 معناه : $u_4 = 5$.

ونعلم أن : $u_4 = u_3 + r$ لأن (u_n) متتالية حسابية .

ومنه : $r = u_4 - u_3 = 5 - 3 = 2$

ولدينا : $u_3 = u_0 + 3.r$ ومنه : $3 = u_0 + 6$

ومنه $u_0 = -3$

2) عبارة الحد العام u_n بدلالة n : $u_n = u_0 + n.r$

ومنه : $u_n = -3 + 2n$

3) نضع : $u_n = 37$ ومنه $-3 + 2n = 37$

ومنه $n = 20$

ومنه: القيمة 37 حدا من حدود المتتالية (u_n) حيث $u_{20} = 37$ ورتبته 21

4) حساب المجموع : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{20}$

$$S = \frac{20-0+1}{2}.(u_0 + u_{20}) = \frac{21}{2}(-3+37) = 357$$

5) حساب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$$S_n = \frac{n-0+1}{2}.(u_0 + u_n)$$

$$= \frac{n+1}{2}(-3 + -3 + 2n)$$

$$= (n+1)(-3+n)$$

التمرين 04:

$(u_n)_{n \in N}$ متتالية هندسية حدودها موجبة بحيث :

$u_1 = 1$ و $u_3 + u_5 = 20$

1) أوجد أساس هذه المتتالية وحدد اتجاه تغيرها .

2) أحسب بدلالة n المجموع : $u_1 + u_2 \ldots\ldots u_n$

لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي :

$$v_n = 3 \cdot u_n^2 + 2 \cdot 3^n$$

3) أحسب بدلالة n المجموع ${u_1}^2 + {u_2}^2 \ldots\ldots + {u_n}^2$

ثم أحسب المجموع S_n حيث $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$

حل التمرين 04 :

1) إيجاد أساس المتتالية (u_n) :

لدينا: $u_3 + u_5 = 20$ ونعلم أن $u_n = u_p.q^{n-p}$

ومنه $u_3 = u_1.q^2$ و $u_5 = u_1.q^4$

ومنه: $u_1.q^2 + u_1.q^4 = 20$ ومنه: $q^2 + q^4 = 20$

أي $q^4 + q^2 - 20 = 0$

نضع: $x = q^2$ حيث $(x > 0)$

فنحصل على : $x^2 + x - 20 = 0$

ومنه: $(x+5)(x-4) = 0$ أي: $x = 4$ او $x = -5$

ومنه: $q^2=4$ ومنه $q=2$ لأن: ((u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة).

وتحديد اتجاه تغير المتتالية (u_n): بما أن (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة و $q=2>1$ فإن (u_n) متزايدة.

2) حساب بدلالة n المجموع: $u_1+u_2.....u_n$:

$$u_1+u_2.....u_n=u_1.\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$$

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $u_1^2+u_2^2...+u_n^2$

$$u_1^2+u_2^2...+u_n^2=u_1^2+(u_1q)^2+(u_1q^2)^2+...+(u_1q^{n-1})^2$$

$$=u_1^2\left(1+(q^2)^1+(q^2)^2+...(q^2)^{n-1}\right)=u_1^2\left[\frac{(q^2)^n-1}{q^2-1}\right]=\frac{4^n-1}{3}$$

حساب المجموع S_n حيث $S_n=v_1+v_2+....+v_n$

و $v_n=3\cdot u_n^2+2\cdot 3^n$

$$S_n=v_1+v_2+...+v_n$$

$$=\left(3\cdot u_1^2+2\cdot 3^1\right)+\left(3\cdot u_2^2+2\cdot 3^2\right)$$

$$+...3\cdot u_n^2+2\cdot 3^n$$

$$=3\left(u_1^2+u_2^2...+u_n^2\right)+2\left(3^1+3^2+...+3^n\right)$$

$$=4^n-1+2\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=4^n+3^{n-1}-2$$

التمرين 05:

(u_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي:

$$u_0=0 \quad و \quad u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}$$

1) أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0\le u_n\le 1$ ثم بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي: $v_n=u_n-1$

أ/• بين أن (v_n) متتالية هندسية.

ب/• عبر عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n.

ج/• عين نهاية u_n و v_n.

3) أحسب بدلالة n المجموعين: Y_n و S_n حيث:

$$Y_n=v_0+v_1+...+v_n \quad و \quad S_n=u_0+u_1+...+u_n$$

حل التمرين 05:

1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$0\le u_n\le 1$

• نتحقق من الخاصية من أجل $n=0$:

$0\le u_0\le 1$ أي $0\le 0\le 1$ وهذا محقق.

• نفرض الخاصية محققة من أجل الرتبة n ونبرهن على صحتها من أجل الرتبة $n+1$:

أي نفرض أن $0\le u_n\le 1$ ونبرهن أن $0\le u_{n+1}\le 1$.

لدينا: $0\le u_n\le 1$ (نضرب المتباينة المضاعفة بالعدد $\frac{2}{3}$)

نحصل على: $0\le \frac{2}{3}u_n\le \frac{2}{3}$ (نضيف للمتباينة المضاعفة العدد $\frac{1}{3}$)

نحصل على: $\frac{1}{3}\le \frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}\le 1$

ومنه: $\frac{1}{3}\le u_{n+1}\le 1$ (نعلم أن $0\le\frac{1}{3}$)

ومنه: $0\le u_{n+1}\le 1$

2) إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}-u_n$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)u_n+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}(u_n-1)$$

وبما أن: $u_n\le 1$ (من السؤال 2) ومنه: $u_n-1\le 0$

ومنه: $\frac{-1}{3}(u_n-1)\ge 0$ أي: $u_{n+1}-u_n\ge 0$

أي : (u_n) متزايدة تماما.

3) بفرض المتتالية متقاربة أي : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

(حيث L عدد حقيقي ثابت)

إيجاد نهاية المتتالية (u_n) : لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

ومنه : $L = \frac{2}{3}L + \frac{1}{3}$

أي : $-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}L - L$ أي : $-\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}L$ أي : $L = 1$

ومنه : $S_n = -3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + n + 1$.

5) • لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = u_n - 1$

• إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب أساسها و حدها الأول:

(v_n) متتالية هندسية إذا تحقق ما يلي: $v_{n+1} = v_n \times q$

(q عدد حقيقي ثابت)

لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1$

$= \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 1) = \frac{2}{3}v_n$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها : $q = \frac{2}{3}$.

وحدها الأول : $v_0 = u_0 - 1 = 0 - 1 = -1$.

• عبارة u_n و v_n بدلالة n :

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن : $v_n = v_0 q^n$

ومنه : $v_n = -1\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ولدينا : $v_n = u_n - 1$ ومنه: $u_n = v_n + 1$

أي : $u_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$

• تعيين نهاية u_n و v_n : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

(لأن $|q| \le 1$) و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right] = 1$

6) • حساب بدلالة n المجموعين : Y_n و S_n

لدينا : $Y_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$= -1\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = -3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$

$= (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \ldots\ldots + (v_n + 1)$

$= v_0 + v_1 + \ldots + v_n + (1+1+1+\ldots+1)$

$= Y_n + n + 1$

التمرين 06:

(u_n) متتالية معرفة على N بـ : $u_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}$

1- أحسب u_1 ، u_2.

2- α عدد حقيقي غير معدوم، من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n + \alpha$

أ) عين قيمة العدد α التي تكون من اجلها المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب) عبر عن u_n بدلالة n.

3- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

4- أ) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث :

$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

ب) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n}$.

حل التمرين 06 :

1) $u_1 = \frac{u_0 - 1}{2} = 0$ و $u_2 = \frac{u_1 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$

2) $\alpha \neq 0$، من اجل كل عدد طبيعي n نضع :

$v_n = u_n + \alpha$

أ) قيمة α التي تكون من اجلها المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$:

(v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ معناه $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$

$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{u_n - 1}{2} + \alpha = \frac{u_n - 1 + 2\alpha}{2}$

$v_{n+1} = \frac{u_n + \alpha + (\alpha - 1)}{2}$ تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ إذا و فقط إذا كان $\alpha - 1 = 0$ أي $\alpha = 1$

ب) u_n بدلالة n: نعلم أن $v_n = v_0 q^n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

و $v_0 = u_0 + 1 = 2$

بما أن $v_n = u_n + 1$ فان $u_n = v_n - 1$

و عليه $u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$

3) اتجاه تغير (u_n) :

$u_{n+1} - u_n = \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right) - \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$

$u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{-1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N

4-أ) المجموع s_n : $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

معناه $s_n = (v_0 - 1) + (v_1 - 1) + ... + (v_n - 1)$

$s_n = v_0 \times \frac{(\frac{1}{2})^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} - 1(n+1)$

أي $s_n = -4 \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1\right] - 1(n+1)$

و عليه $s_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n + 3$

ب) $\lim \frac{s_n}{n} = -1$ لان $-1 < q < 1$ و $\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$

التمرين 07 :

(u_n) متتالية معرفة على N بـ :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$$

1-أ) عين العدد الحقيقي a بحيث تكون (u_n) متتالية ثابتة.

ب) أرسم في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (D) الممثل للدالة f المعرفة على R بـ : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

جـ) نضع : $a = 0$ باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4.

2 - نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N بـ : $v_n = u_n - 2$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة.

3 - أ) أحسب بدلالة n المجموعين s_n و L_n حيث :

$s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $L_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

ب) أحسب الجداء P حيث : $P = v_0 \times v_1 \times .... \times v_9$

حل التمرين 07 :

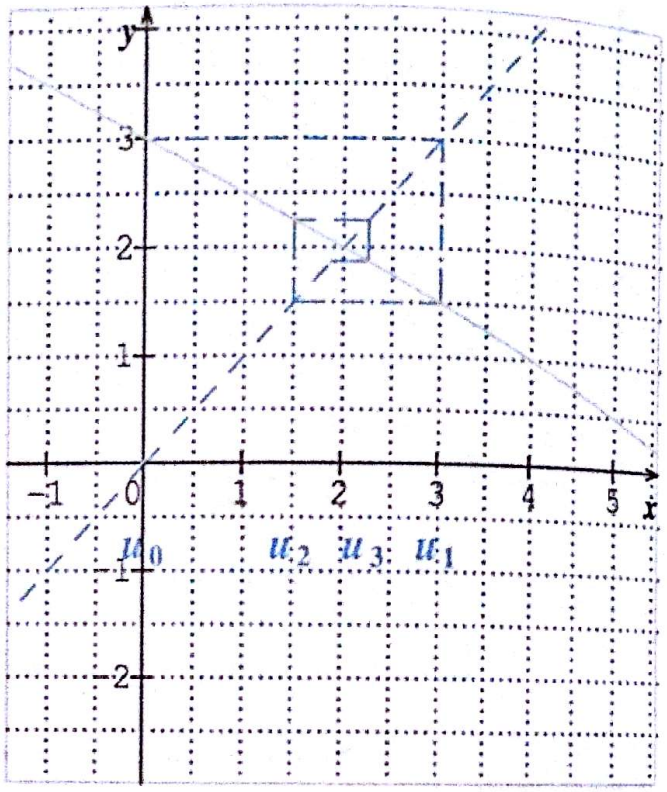
1) أ) (u_n) متتالية ثابتة معناه $u_{n+1} = u_n = ... = u_1 = u_0$

$u_0 = \frac{-1}{2}u_0 + 3$ تكافئ $u_{n+1} = \frac{-1}{2}u_n + 3$

ومنه $u_0 = 2 = a$

ب) رسم $y = x$ و المنحنى (D) الممثل للدالة f المعرفة على R بـ : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

ج) نضع: $u_0=0$ الحدود u_0، u_1، u_2، u_3 و u_4 على حامل محور الفواصل.



2) نعتبر: $v_n=u_n-2$

أ) (v_n) متتالية هندسية معناه $v_{n+1}=qv_n$

$v_{n+1}=u_{n+1}-2=-\frac{1}{2}u_n+1=-\frac{1}{2}(u_n-2)$

ومنه $q=-\frac{1}{2}$ و $v_0=u_0-2=-2$

ب) v_n بدلالة n: بما أن $v_n=v_0\times q^n$

فان $v_n=-2\times(\frac{-1}{2})^n$

u_n بدلالة n: بما أن $v_n=u_n-2$ فان $u_n=v_n+2$

وعليه $u_n=-2\times(\frac{-1}{2})^n+2$

ج) (u_n) متقاربة: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+2$

لان $-1<q<1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$

3) أ) المجموع s_n بدلالة n حيث: $s_n=v_0+v_1+....+v_n$

معناه $s_n=(-2)\times\frac{(\frac{-1}{2})^{n+1}-1}{-\frac{1}{2}-1}$

أي $s_n=\frac{4}{3}\times\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}-1\right]$

المجموع L_n بدلالة n حيث: $L_n=u_0+u_1+....+u_n$

معناه $L_n=(v_0+2)+(v_1+2)+....+(v_n+2)$

$L_n=\frac{4}{3}\times\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}-1\right]+2n+2$ أي $L_n=S_n+2(n+1)$

ومنه $L_n=\frac{4}{3}\times\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}\right]+2n+\frac{2}{3}$

ب) الجداء P حيث: $P=v_0\times v_0q\times....\times v_0q^9$

أي $P=v_0^{10}q^{0+1+2+....+9}$ $(0+1+2+....+9$ مج متتالية حسابية).

$P=(-2)^{10}(-\frac{1}{2})^{45}$

ومنه $P=(-2)^{10}(-)^{-45}=(-2)^{-35}$

التمرين 08:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1;4]$ بالعبارة:

$f(x)=\frac{6x-4}{x+1}$

1- ادرس تغيرات الدالة f و استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I فان $f(x)\in I$.

2- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على N كمايلي:

$$\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}=\frac{6u_n-4}{u_n+1}\end{cases}$$

أ) باستعمال (C_f) منحنى الدالة f والمستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 (دون حسابها) .

* ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n :

$1 \leq u_n \leq 4$

جـ) بين أن (u_n) متزايدة تماما استنتج أنها متقاربة .

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة N بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

جـ) عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث :

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

حل التمرين 08 :

1) الدالة f قابلة الاشتقاق على المجال I و لدينا :

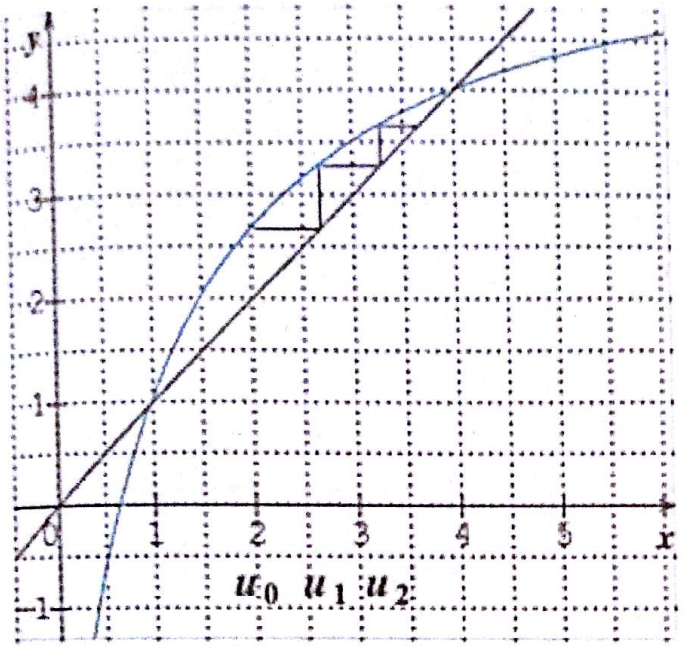
$$f'(x) = \frac{6+4}{(x+1)^2} = \frac{10}{(x+1)^2}$$

بما أن $f'(x) > 0$ فان الدالة f متزايدة تماما على المجال I و لدينا :

x	1	4
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	1 ↗	4

من جدول تغيرات الدالة f ستنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال I فان $f(x) \in I$.

2) لدينا : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{6u_n - 4}{u_n + 1}$



* التخمين : (u_n) متتالية متزايدة تماما .

ب) البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n :

$1 \leq u_n \leq 4$

من اجل $n = 0$ $1 \leq u_0 \leq 4$ أي $1 \leq 2 \leq 4$

جـ) (u_n) متزايدة تماما : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + 5u_n - 4}{u_n + 1}$

أي $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 4)}{u_n + 1}$

بما أن $u_n - 4 \leq 0$ و $u_n - 1 \geq 0$

فإن : $\dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 4)}{u_n + 1} \geq 0$ وبالتالي (u_n) متزايدة تماما.

بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

3) أ) (v_n) متتالية هندسية أساسها q معناه

$v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{\dfrac{6u_4 - 4}{u_n + 1} - 4}{\dfrac{6u_n - 4}{u_n + 1} - 1}$ أي $v_{n+1} = \dfrac{\dfrac{2u_4 - 8}{u_n + 1}}{\dfrac{5u_n - 5}{u_n + 1}} = \dfrac{2}{5} v_n$

$q = \dfrac{2}{5}$ أساسها (v_n) م هـ و منه $v_0 = \dfrac{u_0 - 4}{u_0 - 1} = -2$

و حدها الأول $v_0 = -2$

ب) v_n بدلالة n: $v_n = v_0 q^n = -2\left(\frac{2}{5}\right)^n$

بما أن $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 1}$ فان $u_n = \frac{v_n - 4}{v_n - 1}$

و منه $u_n = \frac{-2\left(\frac{2}{5}\right)^n - 4}{-2\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}$

ج) $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = v_0 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$

أي $S_n = -2 \times \frac{(\frac{2}{5})^n - 1}{\frac{2}{5} - 1} = \frac{10}{3}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n - 1\right]$

التمرين 09:

a ; b ; c أعداد حقيقة غير معدومة

1) بين أن إذا كانت a ; b ; c بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$$

2) أوجد ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276.

حل التمرين 09:

1) لدينا: $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + 2ac - b^2 + c^2$

إذا كانت a ; b ; c بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية هندسية فإن حسب الوسط الهندسي لدينا: $ac = b^2$

ومنه: $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + 2b^2 - b^2 + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2$

2) لتكن a ; b ; c بهذا الترتيب هذه الأعداد المطلوبة إذن:

$$\begin{cases} a+b+c = 78 \\ a^2+b^2+c^2 = 3276 \end{cases}$$

لكن حسب السؤال (1) فإن:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a;b+c)(a-b+c)$$

أي: $3276 = 78(a-b+c)$ أي:

$a-b+c = 3276/78$ أي: $a-b+c = 42$

لدينا إذن الجملة $\begin{cases} a+b+c = 78.....(1) \\ a-b+c = 42.....(2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نحصل على: $2b = 36$ أي: $b = 18$

ليكن k أساس هذه المتتالية الهندسية حيث $k \in IR^*$

لدينا $a = b/k = 18/k$ و $c = b\ k = 18k$

إذن المساواة (1) تصبح: $\frac{18}{k} + 18 + 18k = 78$

نضرب الطرفين في k : أي: $18 + 18k + 18k^2 = 78k$

ومنه: $3k^2 - 10k + 3 = 0$ $\Delta = 100 - 36 = 64$

$$\begin{cases} k_1 = \frac{10-8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ k_2 = \frac{10+8}{6} = \frac{18}{6} = 3 \end{cases}$$

لنحتار مثلا: $k = 3$ إذن: $c = 18 \times 3 = 54$ $a = 18/3 = 6$

تحقيق: $\begin{cases} a+b+c = 6+18+54 = 78 \\ a-b+c = 6-18+54 = 42 \end{cases}$

لاحظ أن من أجل $k = 1/3$ نحصل على:

$a = 54$ و $b = 18$ و $c = 6$

خلاصة: الأعداد المطلوبة هي:

$(a;b;c) = (54;18;6)$ أو $(a;b;c) = (6;18;54)$

التمرين 10:

$(u_n)_{n \in N^*}$ متتالية هندسية متناقصة حيث :

$u_1 \times u_2 \times u_3 = 64$ و $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 84$

1) أحسب الحدود : u_2 ثم u_3 ; u_1 والأساس q للمتتالية .

2) عبر عن u_n بدلالة n وأدرس تقارب المتتالية $(u)_{n \in N^*}$.

3) أحسب بدلالة n المجموع S حيث :

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

4) أحسب بدلالة n المجموع S' حيث :

$$S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}.$$

حل التمرين 10 :

1) حساب الحدود : u_2 ثم u_3 ; u_1 والأساس r للمتتالية (u_n) :

لدينا : (1).....$u_1 \times u_2 \times u_3 = 64$ ولدينا حسب خاصية الوسط الهندسي على الحدود u_3 ; u_2 ; u_1 فإن:

$$u_2^{\,2} = u_1 \times u_3$$

وعليه تصبح العلاقة (1): $u_2^{\,3} = 64$ ومنه: $u_2 = 4$

ولدينا:
$$\begin{cases} u_1.u_2.u_3 = 64 \\ u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2} = 84 \end{cases}$$

ومنه
$$\begin{cases} u_1.4.u_3 = 64 \\ u_1^{\,2} + 16 + u_3^{\,2} = 84 \end{cases}$$

أي:
$$\begin{cases} u_1.u_3 = 16 \\ u_1^{\,2} + u_3^{\,2} = 68 \end{cases}$$

من المعادلة $u_1 \times u_3 = 16$ فإن: $u_1 = \dfrac{16}{u_3}$

نعوض u_1 في المعادلة $u_1^2 + u_3^2 = 68$

نجد: $\dfrac{256}{u_3^{\,2}} + u_3^2 = 68$ ومنه: $\dfrac{256 + u_3^{\,4}}{u_3^{\,2}} = 68$

أي: $u_3^{\,4} - 68u_3^{\,2} + 256 = 0$ نضع: $x = u_3^{\,2}$

تصبح المعادلة: $x^2 - 68x + 256 = 0$

وبعد حساب المميز Δ نجد : $x_1 = 4$ أو $x_2 = 64$

- $x_1 = 4$ لما
فإن: $u_3^{\,2} = 4$
ومنه: $u_3 = 2$
أو $u_3 = -2$

- $x_2 = 64$ لما
فإن: $u_3^{\,2} = 64$
ومنه: $u_3 = 8$
أو $u_3 = -8$

بما أن (u_n) متتالية هندسية متناقصة و $u_2 = 4$

فإن $u_3 = 8$ و $u_1 = \dfrac{16}{u_3} = 2$

حساب الأساس q : $q = \dfrac{u_2}{u_1} = 2$

2) • التعبير عن u_n بدلالة n :

$$u_n = u_1.q^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

• دراسة تقارب المتتالية $(u)_{n \in N^*}$:

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ وعليه فإن المتتالية $(u)_n$ متباعدة.

3) أحسب بدلالة n المجموع S حيث :

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n$$

$$S_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 2 \times \frac{1-(2)^n}{1-2} = -2\left[1-(2)^n\right]$$

4) حساب بدلالة n المجموع S' :

$$S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1.q} + \frac{1}{u_1.q^2} + ... + \frac{1}{u_1 q^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{u_1}\left[\frac{1}{q^0} + \frac{1}{q^1} + \frac{1}{q^2} + ... + \frac{1}{q^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{q}\right)^0 + \left(\frac{1}{q}\right)^1 + \left(\frac{1}{q}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{q} \times \left(\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\frac{1}{q}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

التمرين 11 :

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1) أ/ أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1 .

ب/ أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ/ أحسب S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$

بدلالة n.

ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = 728$.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ/ أحسب v_2 و v_3 .

ب/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$$

بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ/ أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

حل التمرين 11 :

1) أ/ بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن $(u_2)^2 = u_1 \times u_3$.

ومنه : $(u_2)^3 = 216$ أي : $u_2 = 6$.

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

ومنه :
$$\begin{cases} u_1 + 2\times 6 + u_3 = 32 \\ u_1 \times 6 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

ومنه :
$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 20 \ldots\ldots\ldots(1) \\ u_1 \times u_3 = 36 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

من (1) : $u_3 = 20 - u_1$ نعوض u_3 في (2) نجد :

$$u_1(20 - u_1) = 36$$

$$-u_1^{\,2} + 20u_1 - 36 = 0$$

ومنه : $u_1 = 2$ مقبول . أو $u_1 = 18$

مرفوض لأن (u_n) متزايدة تماما .

ومنه : لما $u_1 = 2$ فإن $u_3 = 20 - 2 = 18$

حساب الأساس q : $u_2 = u_1 q$

ومنه : $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$

ب/ $u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$

جـ/ $S_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$

$$= u_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3^n - 1$$

تعيين n حيث : $S_n = 728$ أي $3^n - 1 = 728$

ومنه $3^n = 729$ ومنه : $n = \frac{\ln 729}{\ln 3} = 6$

2) $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ/ حساب v_2 و v_3 : $v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 5$

و $v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{27}{2}$

ب/ لدينا : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3v_n + 2u_n}{6u_n} - \frac{2}{3} = \frac{3v_n + 2u_n - 4u_n}{6u_n}$$

$$= \frac{-2u_n + 3v_n}{6u_n} = \frac{v_n}{2u_n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}w_n$$

ومنه : (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ/ $w_n = w_1 q^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ و $w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

عبارة v_n بدلالة n : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

ومنه : $v_n = \left(w_n + \frac{2}{3}\right)u_n$ ومنه $v_n = w_n u_n + \frac{2}{3}u_n$

ومنه $v_n = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$

التمرين 12 :

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :

$\ln u_3 + 2\ln\sqrt{u_6} = 11$ و $\ln u_3 - \ln u_2 = 1$

1) عين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_0 .

2) أكتب u_n بدلالة n ثم أدرس اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n).

3) أحسب المجموع : $u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$ بدلالة n .

4) (v_n) متتالية عددية معرفة على N بـ:

$v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$

أ/ أثبت أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب/ أحسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع:

$S_n = v_n = v_0 + v_1 + v_2 \ldots\ldots + v_{n-1}$

حل التمرين 12 :

1) تعين أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_0 :

لدينا : $\ln u_3 + 2\ln\sqrt{u_6} = 11$ و $\ln u_3 - \ln u_2 = 1$

ومنه: $\ln u_3 + 2\times\frac{1}{2}\ln u_6 = 11$ و $\ln\left(\frac{u_3}{u_2}\right) = 1$

ومنه: $\ln(u_3 \cdot u_6) = 11$ و $\ln\left(\frac{u_3}{u_2}\right) = 1$

ومنه: $u_3 \times u_6 = e^{11}$ و $\frac{u_3}{u_2} = e$

معناه: $q = e$ أساس المتتالية (u_n)

ولدينا : $u_3 \times u_6 = e^{11}$ أي : $u_0 \cdot q^3 \cdot u_0 \cdot q^6 = e^{11}$

ومنه: $u_0^2 \cdot e^9 = e^{11}$ أي: $u_0^2 = e^2$ ومنه : $u_0 = e$

((u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تمام)

2) عبارة u_n بدلالة n: $u_n = u_0 \cdot q^n = e \cdot e^n = e^{n+1}$

دراسة اتجاه تغيرات (u_n) :

$u_{n+1} - u_n = e^{n+1} - e^n = e^n(e-1) > 0$

ومنه: (u_n) متتالية متزايدة .

ولدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{n+1} = +\infty$

ومنه: (u_n) متتالية متباعدة

3) $S = u_1 + u_2 + \ldots\ldots u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$

$= e^2 \cdot \frac{e^n - 1}{e-1} = \frac{e^2}{e-1}(e^n - 1)$

$v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$

4) أ/ إثبات أن (v_n) متتالية حسابية :

(v_n) متتالية حسابية إذا تحقق مايلي :

$v_{n+1} = v_n + r$ حيث (r عدد حقيقي ثابت)

$v_{n+1} = 3\ln(u_{n+2}) - \ln u_{n+1}$

$= 3\ln(e \cdot u_{n+1}) - \ln(e \cdot u_n)$

$= 2\ln e + 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$

$= 3\ln e + 3\ln u_{n+1} - \ln e - \ln u_n$

$= 2\ln e + 3\ln u_{n+1} - \ln u_n = v_n + 2$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$

ب/ $S_n = v_0 + v_1 \ldots + v_{n-1} = \frac{n-1-0+1}{2}(v_0 + v_{n-1})$

حيث : $v_0 = 3\ln u_1 - \ln u_0 = 3\ln e^2 - \ln e$

$= 6\ln e - \ln e = 5\ln e = 5$

$v_{n-1} = v_0 + (n-1)\cdot r = 5 + (n-1)2$

ومنه : $S_n = \frac{n}{2}(5 + 5 + (n-1)2) = n(5 + (n-1))$

التمرين 13 :

هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان في كل حالة من الحالات التالية:

1) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n}$ و $v_n = 3 - \frac{5}{n}$

2) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n}$$

و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

حل التمرين 13 :

1) لاحظ أن المتتالية (u_n) ليست رتيبة لأن العدد $(-1)^n$ موجب إذا كان n زوجي وسالب إذا كان n فردي وعليه فالمتتاليتان (u_n) و (v_n) لايمكن أن تكونا متجاورتان حسب التعريف.

حذار: في هذا المثال $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$ ولكنهما متتاليتان غير متجاورتان.

2) لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n}$$

و $u_{n+1} = \left[\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots.. + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}\right]$

ومنه:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2(n+1)+(2n+1)-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{2(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0 \end{aligned}$$

(إذن: $u_{n+1} - u_n > 0$ أي المتتالية (u_n) متزايدة تماما)

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + 2n(2n+1) - 2(n+1)(2n+1)}{2n(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{n + 4n^2 + 2n - 4n^2 - 6n - 2}{2(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{-(3n+2)}{2n(n+1)(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

(إذن: $v_{n+1} - v_n < 0$ ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تماما)

ولدينا أيضا $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n + \frac{1}{n}\right) - u_n = 0$

خلاصة: (u_n) متتالية متزايدة تماما و (v_n) متتالية متناقصة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن: حسب التعريف فإن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

التمرين 14 :

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـ $u_0 = -1$ ؛ $v_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$

1) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < v_n$

2) برهن أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $x_n = u_n + av_n$

و $y_n = u_n + bv_n$ حيث a و b عددان حقيقيان متمايزان.

3) أوجد a و b حتى تكون المتتاليتان (x_n) و (y_n) هندسيتان ثم عبر عن x_n و y_n ثم عبر بدلالة n عن x_n و y_n بدلالة n.

4) أوجد النهاية المشتركة للمتتاليتان (u_n) و (v_n).

حل التمرين 14 :

1) البرهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n < v_n$

• من أجل $n = 0$: $u_0 < v_0$ لأن $-1 < 2$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

• نفرض أن $u_n < v_n$ من أجل $n > 1$ ونبرهن أن: $u_{n+1} < v_{n+1}$

لدينا: $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{u_n + 4v_n}{5}$

$= \frac{5u_n + 5v_n - 2u_n - 8v_n}{10}$

$= \frac{3u_n - 3v_n}{10} = \frac{3}{10}(u_n - v_n)$

لكن حسب فرضية التراجع $u_n < v_n$ أي $u_n - v_n < 0$

ومنه: $\frac{3}{10}(u_n - v_n) < 0$ أي $u_{n+1} - v_{n+1} < 0$ أي $u_{n+1} < v_{n+1}$

إذن: الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < v_n$

2) هل (u_n) و (v_n) متجاورتان؟

اتجاه التغير: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{-1}{2}(u_n - v_n)$

$= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n) > 0$

ومنه: $u_{n+1} - u_n > 0$ أي: المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n}{5} - v_n$

$= \frac{u_n + 4v_n - 5v_n}{5} = \frac{1}{5}(u_n - v_n) < 0$

إذن: $v_{n+1} - v_n < 0$ أي: المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

نهاية الفرق $u_n - v_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - v_{n+1}) = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n)$

لكن: $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10}(u_n - v_n)$ حسب السؤال (1)

ومنه: $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3}{10}(u_n - v_n) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 (u_{n-1} - v_{n-1})$

$= \ldots\ldots = \left(\frac{3}{10}\right)^n ((u_0) - v_0)$

ومنه: $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

خلاصة: (u_n) متتالية متزايدة تماما و (v_n) متتالية متناقصة تماما و $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

إذن: المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

إذن: هما متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ

3) من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $x_{n+1} = u_{n+1} + a v_{n+1}$

$x_{n+1} = u_{n+1} + a v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} + a\left(\frac{u_n + 4v_n}{5}\right)$

$= \frac{5u_n + 5v_n + 2au_n + 8av_n}{10}$

$= \frac{(2a+5)u_n + (8a+5)v_n}{10}$

$= \frac{2a+5}{10} \times \left(u_n + \frac{8a+5}{2a+5} v_n\right)$ حيث $2a + 5 \neq 0$

إذن: تكون (x_n) متتالية هندسية إذا وفقط إذا تحقق أن من أجل كل n أي من أجل كل $n \in IN$: $x_{n+1} = \frac{2a+5}{10} x_n$

$u_n + \frac{8a+5}{2a+5} v_n = u_n + a v_n$

إذن: يكفي ويلزم أن يكون: $\frac{8a+5}{2a+5} = a$ مع $2a + 5 \neq 0$

أي: $2a^2 + 5a = 8a + 5$ أي: $2a^2 + 3a - 5 = 0$

وهي معادلة من الدرجة (2) ذات المجهول a.

$\Delta = 9 + 40 = 49$

$a_1 = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$ $\quad a_2 = \frac{3-7}{4} = -1$ أ/ف

لاحظ أن من أجل $a = -1$ فإن $2a + 5 = 3 \neq 0$

إذن: يكفي أن نأخذ $a = -1$ في هذه الحالة: $x_{n+1} = \frac{3}{10} x_n$

أي (x_n) متتالية هندسية أساسها $3/10$

وحدها الأول $x_0 = u_0 - v_0 = -3$ إذن: $x_n = -3\left(\frac{3}{10}\right)^n$

من أجل $a = 5/2$ فإن $2a + 5 = 10 \neq 0$

إذن: من أجل $a = 5/2$ فإن $x_{n+1} = 1 \times x_n$

أي المتتالية (x_n) هندسية أساسها 1 (ثابتة)

نتيجة: تكون المتتالية (y_n) المعرفة بـ: $y_{n+1}=u_n+b\,v_n$

هندسية حيث $b\neq -1$

إذا وفقط إذا كان $b=5/2$

وفي هذه الحالة المتتالية (y_n) ثابتة وكل حدودها تساوي:

$$y_0=u_0+\frac{5}{2}v_0=-1+5=4$$

ومنه: من أجل كل $n\in IN$ فإن $y_n=4$

4) لتكن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell$

لدينا من أجل كل $n\in IN$: $y_n=u_n+\frac{5}{2}v_n$

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n+\frac{5}{2}v_n\right)$

إذن: $4=\ell+\frac{5}{2}\ell$ أي: $4=\frac{7}{2}\ell$ ومنه: $\ell=8/7$ وهو المطلوب

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=8/7$

التمرين 15 :

(بكالوريا 2008 علمي)

1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$$

أ/ بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I $f(x)$ ينتمي إلى I

2) (U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على N كما يأتي :

$$U_{n+1}=f(U_n)\ ,\ U_0=\frac{3}{2}$$

أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n, U_n ينتمي I

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) . أستنتج أنها متقاربة.

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$U_n=1+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

حل التمرين 15 :

1) أ/ إثبات أن f متزايدة تماما على I :

f تقبل الاشتقاق على I حيث : $f'(x)=\frac{1(-x+4)-(-1)(x+2)}{(-x+4)^2}=\frac{6}{(-x+4)^2}>0$

ومنه f متزايدة تماما على I

ب/ بإثبات أن : $f(x)\in I$

لدينا : $1\le x\le 2$

ومنه : $f(1)\le f(x)\le f(2)$ لأن f متزايدة تماما على I

إذن : $1\le f(x)\le 2$ أي : $f(x)\in I$

2/ أ/ برهان أن : $u_n\in I$

من أجل n = 0 , $u_0=\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2}\in I$ أي خاصية صحيحة من أجل n = 0.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي : $u_n\in I$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل n+1 أي: $u_{n+1}\in I$

لدينا : $u_n\in I$ ومنه $f(u_n)\in I$

حسب السؤال ب/ أي : $u_{n+1}\in I$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $u_n\in I$ لكل عد طبيعي n.

ب/ اتجاه تغير المتتالية (U_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n+2}{-U_n+4}-U_n$$

$$=\frac{U_n^2-4U_n+U_n+2}{-U_n+4}$$

$$=\frac{(U_n-1)(U_n-2)}{-U_n+4}$$

بما أن : $1 \le U_n \le 2$ فإن : $(U_n - 1)(U_n - 2) \le 0$

و $-U_n + 4 \ge 0$

$U_{n+1} - U_n \le 0$ ومنه (U_n) متناقصة .

الاستنتاج : لدينا (U_n) متناقصة و محدودة من الأدنى فهي متقاربة.

3) لتكن $P(n)$ الخاصية : $U_n = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

من أجل n = 0 : $U_0 = 1 + \dfrac{1}{1+1} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

أي : $P(0)$ صحيحة .

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي : $U_n = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

نبرهن صحة $P(n+1)$ أي : $U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 2}{U_n + 4} = \frac{1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}}{-1 - \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1} + 4}$$

$$= \frac{3 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}}{3 - \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}} = \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 4}{3\left(\frac{3}{2}\right)^n + 2} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 2}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$$

نجد : $U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 1}$ إذن $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن: $U_n = 1 + \dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

لكل n من N

ب/ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$ لأن $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$

التمرين 16 :

(بكالوريا 2008 علمي)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = \dfrac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n. $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 2$

1) أ/ أرسم في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على R بـ : $f(x) = \dfrac{2}{3}x + 2$

ب/ باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل و دون حساب الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3, u_4.

ج/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2) أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le 6$.

ب/ تحقق أن (u_n) متزايدة.

ج/ هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك.

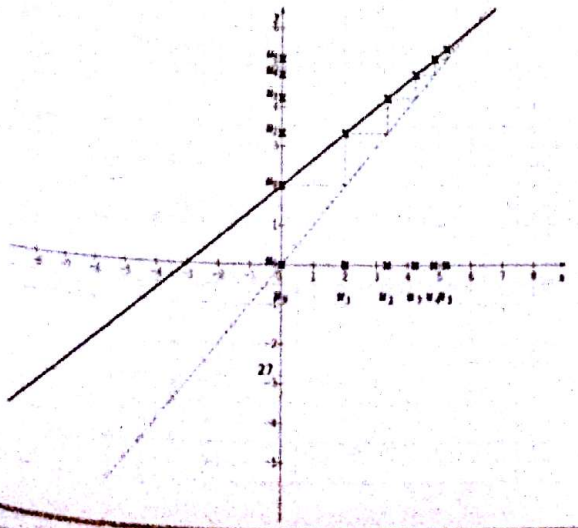
3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.

أ/ أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب/ أكتب عبارة U_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

حل التمرين 16 :

1) أ/ رسم (Δ) و (d) . و تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 :



ب/ التخمين: في الرسم نلاحظ أن: الحدود $u_0 > u_1 > u_2 > u_3 > u_4$ و من جهة أخرى الحدود تتراكم حول العدد 6 و عليه:

فإن: المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة من العدد 6.

2) أ/ لتكن $P(n)$ الخاصية: $u_n \leq 6$

من أجل $n=0$ $u_0 \leq 6$ صحيحة لأن $\frac{5}{2} \leq 6$

نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي: $u_n \leq 6$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $u_{n+1} \leq 6$

لدينا: $u_n \leq 6$ و $\frac{2}{3}u_n \leq 4$ ومنه: $\frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$

أي: $u_{n+1} \leq 6$ إذن: $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع. فإن: $u_n \leq 6$ لكل $n \in N$

ب) التحقق أن (u_n) متزايدة من أجل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n$$
$$= -\frac{1}{3}u_n + \frac{6}{3} = -\frac{1}{3}(u_n - 6)$$

لدينا $u_n - 6 \leq 0$ ومنه $-\frac{1}{3}(u_n - 6) \geq 0$

أي: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ إذن: (u_n) متزايدة.

ج/ (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة.

3) أ/ من أجل كل عدد طبيعي n.

$$V_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6$$
$$= \frac{2}{3}u_n - 4 = \frac{2}{3}(u_n - 6) = \frac{2}{3}V_n$$

أي (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $V_0 = -\frac{7}{2}$

ب) $U_n = V_n + 6 = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$

ولدينا: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 6$ لأن $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$

التمرين 17:

(بكالوريا 2009 علمي)

(u_n) متتالية معرفة على N كما يلي:

$u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ و $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$

المتتالية (v_n) معرفة على N كما يلي: $v_n = u_{n+1} - u_n$

1) أحسب v_0 و v_1.

2) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

3) أ/ أحسب بدلالة n المجموع S_n:

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$$

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$$

حل التمرين 17:

1) $v_0 = u_{0+1} - u_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$

$v_1 = u_{1+1} - u_1 = u_2 - u_1$

حيث: $u_2 = \frac{4}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_0 = \frac{4}{3}\times 2 - \frac{1}{3}\times 1 = \frac{7}{3}$

ومنه: $v_1 = u_{1+1} - u_1 = u_2 - u_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$

2) (v_n) متتالية هندسية إذا تحقق مايلي: من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $v_{n+1} = v_n \times q$ (q عدد حقيقي ثابت)

لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n - u_{n+1}$$
$$= \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

3) أ/ $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = v_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

ب/ $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$

$= (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1})$

$= u_n - u_0$

أي : $S_n = u_n - u_0$

ومنه : $u_n = S_n + u_0 = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1$

التمرين 18 :

(بكالوريا 2009 علمي)

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حدها الأول u_1 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

1) أ/ أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1 .

ب/ أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ/ أحسب S_n حيث :

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$ بدلالة n

ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون : $S_n = 728$.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ/ أحسب v_2 و v_3 .

ب/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

جـ/ أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

حل التمرين 18 :

1) أ/ بما أن (u_n) متتالية هندسية فإن $(u_2)^2 = u_1 \times u_3$.

ومنه : $(u_2)^3 = 216$ أي : $u_2 = 6$.

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} u_1 + 2\times 6 + u_3 = 32 \\ u_1 \times 6 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 20 \ldots\ldots\ldots (1) \\ u_1 \times u_3 = 36 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

من (1) : $u_3 = 20 - u_1$ نعوض u_3 في (2)

نجد : $u_1(20-u_1) = 36$ ومنه $-u_1^2 + 20u_1 - 36 = 0$

ومنه : $u_1 = 2$ مقبول . أو $u_1 = 18$ مرفوض لأن (u_n) متزايدة تماما .

ومنه : لما $u_1 = 2$ فإن $u_3 = 20 - 2 = 18$

حساب الأساس q : $u_2 = u_1 q$

ومنه : $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{2} = 3$

ب/ $u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$

جـ/ $S_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$

$= u_1 \times \frac{q^n - 1}{q-1} = 3^n - 1$

تعيين n حيث : $S_n = 728$ ومنه $3^n - 1 = 728$

ومنه $3^n = 729$ ومنه : $n = \frac{\ln 729}{\ln 3} = 6$

2) $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ/ حساب v_2 و v_3 : $v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = 5$

و $v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{27}{2}$

ب/ لدينا : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3u_n} - \frac{2}{3} = \frac{3v_n + 2u_n}{6u_n} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3v_n + 2u_n - 4u_n}{6u_n}$$

$$= \frac{-2u_n + 3v_n}{6u_n} = \frac{v_n}{2u_n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}w_n$$

ومنه : (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج/ $w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

و $w_n = w_1 q^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

عبارة v_n بدلالة n : لدينا: $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

ومنه : $v_n = \left(w_n + \frac{2}{3}\right)u_n = w_n u_n + \frac{2}{3}u_n$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \frac{4}{3} \times 3^{n-1}$$

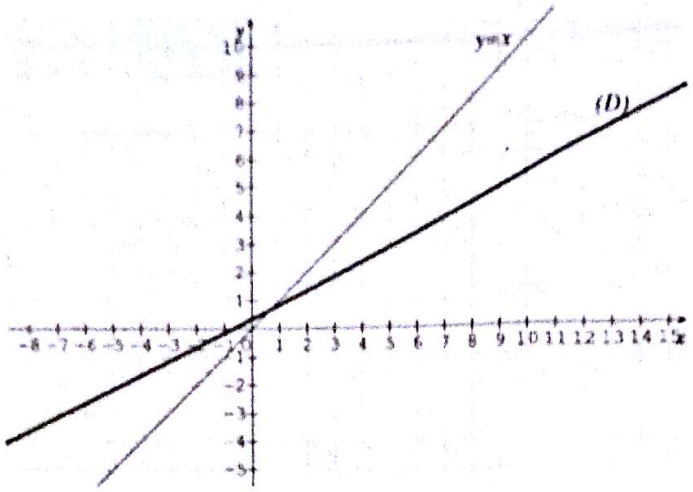
التمرين 19 :

(بكالوريا 2010 علمي)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

مثلنا المستقيمين (Δ) و (D) معادلتيهما على الترتيب

$y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$



1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n .

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3} .$$

أ) أنقل الشكل ثم مثل على محور الفواصل الحدود التالية : u_4, u_3, u_2, u_1, u_0 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم .

ب) عين إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (D).

ج) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) أ) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$.

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول ب) اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، و استنتج عبارة u_n بدلالة n .

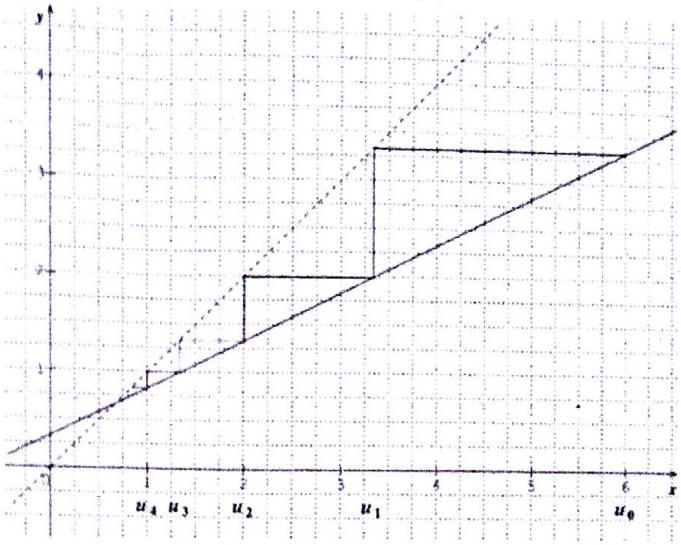
ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

و استنتج المجموع S'_n حيث $S'_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

حل التمرين 19 :

1) أ) نقل المنحنى و تمثيل الحدود على محور الفواصل :



ب) فاصلة نقطة التقاطع (Δ) و (D) هي حلول المعادلة

$x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ أي $x=\frac{2}{3}$ و منه $y=\frac{2}{3}$ إذن :

$$(\Delta)\cap(D)=\left\{H\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$$

ج) التخمين هو أن المتتالية متناقصة تماما .

2) أ) الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0>\frac{2}{3}$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n>\frac{2}{3}$

و نثبت أنها صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}>\frac{2}{3}$

لدينا $u_n>\frac{2}{3}$ تعني $\frac{1}{2}u_n>\frac{1}{3}$ و تعني أيضا

$\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}>\frac{2}{3}$ أي $u_{n+1}>\frac{2}{3}$ و منه من أجل كل n

طبيعي : $u_n>\frac{2}{3}$.

ب) لدينا من أجل كل n طبيعي :

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}$$

و لكن $u_n>\frac{2}{3}$ أي $-\frac{1}{2}u_n<-\frac{1}{3}$ و منه $-\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}<0$

أي $u_{n+1}-u_n<0$ مما يعني أن (u_n) متناقصة تماما .

3) أ) لدينا من أجل n طبيعي :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}u_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(u_n-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\frac{16}{3}$.

ب) عبارة الحد العام لـ : v_n هي : $v_n=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا من أجل كل n طبيعي $u_n=v_n+\frac{2}{3}$

و منه $u_n=\frac{16}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$

ج) $S'_n=u_0+u_1+.....+u_n$

$$=\left(v_0+\frac{2}{3}\right)+\left(v_1+\frac{2}{3}\right)+....+\left(v_n+\frac{2}{3}\right)$$

$$=S_n+\frac{2}{3}(n+1)$$

أي : $S'_n=-\frac{32}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)+\frac{2}{3}(n+1)$

التمرين 20 :

(بكالوريا 2011 علمي)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=-1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=3u_n+1$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$v_n=u_n+\frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل.

1) المتتالية (v_n) :

أ. حسابية. ب. هندسية. ج. لا حسابية و لا هندسية.

2) نهاية المتتالية (u_n) هي : أ. $+\infty$ / ب. $-\frac{1}{2}$ / ج. $-\infty$

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + ... + e^{n\ln 3}\right]$$

أ. $S_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

ب. $S_n = \frac{1-3^n}{4}$

ج. $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

حل التمرين 20 :

1) المتتالية (V_n) هي : ب- هندسية لأن :

$$V_{n+1} = V_{n+1} + \frac{1}{2} = 3U_n + 1 + \frac{1}{2}$$

$$= 3U_n + \frac{3}{2} = 3\left(U_n + \frac{1}{2}\right) = 3V_n$$

2) نهاية المتتالية (U_n) هي : ج- $(+\infty)$ لأن :

V_n متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدّها الأول: $V_0 = -\frac{1}{2}$

أي : $V_n = V_0 q^n = -\frac{1}{2} \times 3^n$

وعليه $U_n = V_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$

وبالتالي : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}\right) = -\infty$

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، S_n هي :

ج- $S_n = \frac{1-3^{n+1}}{4}$

لأن : $S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + .. + e^{n\ln 3}\right]$

$$= -\frac{1}{2}\left(3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^n\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 \times \frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right) = \frac{1-3^{n+1}}{4}$$

التمرين 21 :

(بكالوريا 2011 علمي)

α عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن 1.

(u_n) متتالية عددية معرفة على N بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \alpha u_n + 1$.

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$$v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

1) أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها α.

ب) أكتب بدلالة n و α، عبارة v_n ثم استنتج بدلالة n و α عبارة u_n.

ج) عين قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (u_n) متقاربة.

2) نضع $\alpha = \frac{3}{2}$. - أحسب بدلالة n ، المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

حل التمرين 21 :

1) أ) إثبات أن المتتالية (V_n) هندسية : (V_n) متتالية هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي q حيث : $V_{n+1} = q \times V_n$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{\alpha - 1} = \alpha U_n + 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$= \alpha U_n + \frac{\alpha - 1 + 1}{\alpha - 1}$$

$$V_{n+1} = \alpha U_n + \frac{1}{x-1} = x\left(U_n + \frac{1}{\alpha - 1}\right) = \alpha \times V_n$$

و عليه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \alpha$.

ب) كتابة عبارة V_n بدلالة x و n :

لدينا : $V_0 = U_0 + \frac{1}{\alpha-1} = 6 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{6\alpha-5}{\alpha-1}$

و عليه : $V_n = V_0 \times q^n = \left(\frac{6x-5}{x-1}\right).\alpha^n$

استنتاج U_n بدلالة n و α :

بما أن : $V_n = U_n + \frac{1}{\alpha-1}$ فإن : $U_n = V_n - \frac{1}{\alpha-1}$

و عليه : $U_n = \frac{6\alpha-5}{\alpha-1}\alpha^n - \frac{1}{\alpha-1}$

ج) تعيين قيم α حتى تكون من أجلها (U_n) متقاربة :

حتى تكون (U_n) متقاربة يجب أن تكون : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$

و عليه قيم α الممكنة هي $x \in]0,1[$.

2) بوضع $\alpha = \frac{3}{2}$. حساب المجموعين S_n و T_n :

$$S_n = V_0 + V_1 + \ldots\ldots + V_n = V_0 \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

لدينا : $V_0 = \frac{6\alpha-5}{\alpha-1} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$

و عليه : $S_n = 8\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{3}{2}-1}\right] = 16\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]$

$$T_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots + U_n$$
$$= (V_0 - 2) + (V_1 - 2) + \ldots\ldots + (V_n - 2)$$

ومن جهة :

$$= S_n - 2(n+1) = 16\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 16 - 2n - 2$$
$$= 16\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 2n - 18$$

الدوال الأصلية والحساب التكاملي

الدوال الأصلية :

1) تعريف دالة أصلية لدالة:

f دالة عددية معرفة على مجال I .نسمى دالة أصلية للدالة f كل دالة F قابلة للاشتقاق على I بحيث من أجل كل $x \in I$ فإن : $F'(x) = f(x)$.

مثال : • f معرفة على R بـ:

$$f(x) = 2x \quad F(x) = x^2 + 1$$

قابلة للاشتقاق على R حيث من أجل كل $x \in R$:

$F'(x) = x^2 + 1 = 2x = f(x)$ ومنه:

F دالة أصلية للدالة f على R .

2) مجموعة الدوال الأصلية :

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I

وتسمى كل الدوال من الشكل : $x \mapsto F(x) + c$ بمجموع الدوال الأصلية للدالة f على مجال I .(c عدد حقيقي ثابت)

مثال : • f معرفة على R بـ: $f(x) = 2x$

و $F_1(x) = x^2 + 1$ F_1 دالة أصلية للدالة f على R .

فإن مجموع الدوال الأصلية للدالة f على R هي جميع الدوال من الشكل $F(x) = x^2 + 1 + c$

(c عدد حقيقي ثابت)

3) الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير :

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I و $G(x) = F(x) + c$ هي مجموع الدوال الأصلية للدالة f على المجال I.

فإن الدالة F_1 التي تأخذ قيمة y_0 من أجل القيمة x_0 تحقق: $G(x_0) = y_0$ أي : $y_0 = F(x_0) + c$

أي $c = y_0 - F(x_0)$ ومنه : $F_1(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$

4) الدوال الأصلية لدوال مألوفة :

المجال I	دوالها الأصلية F	الدالة f
R	$a.x + c$	(a عدد حقيقي ثابت)
R	$\frac{1}{n+1}.x^{n+1} + c$	$(n \in N^*)$ x^n
$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$	$\frac{-1}{(n-1).x^{n-1}} + c$	$(n \in N^* - \{1\})$ $\frac{1}{x^n}$
R	$-\cos(x) + c$	$\sin(x)$
R	$\sin(x) + c$	$\cos(x)$
$]0;+\infty[$	$\sqrt{x} + c$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$]0;+\infty[$	$\ln x + c$	$\frac{1}{x}$
R	$e^x + c$	e^x

5) العمليات على الدوال الأصلية :

• **المجموع** : إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I و G دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن : الدالة $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على المجال I .

• **جداء عدد حقيقي بدالة :**

إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I و G دالة أصلية للدالة f على المجال I و k (عدد حقيقي ثابت)

فإن : الدالة $k.F$ دالة أصلية للدالة $k.f$ على المجال I .

• **الدالة الأصلية للدالة** $(u'.u^n)$: حيث $n \geq 1$.

الدالة الأصلية للدالة $u'.u^n$ هي الدالة : $\frac{1}{n+1}.u^{n+1}$

- **الدالة الأصلية للدالة** $\left(\frac{u'}{u^n}\right)$: حيث $n \geq 2$.

الدالة الأصلية للدالة $\frac{u'}{u^n}$ هي الدالة : $\frac{-1}{(n-1).u^{n-1}}$

- **الدالة الأصلية للدالة** $\left(\frac{u'}{2\sqrt{u}}\right)$:

الدالة الأصلية للدالة $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ هي الدالة : $\sqrt{u}$

- **الدالة الأصلية للدالة** $\left(\frac{u'}{u}\right)$:

الدالة الأصلية للدالة $\frac{u'}{u}$ هي الدالة : $\ln|u|$

- **الدالة الأصلية للدالة** $u'.e^u$:

الدالة الأصلية للدالة $u'.e^u$ هي الدالة : e^u

- **الدالة الأصلية للدالة** $\sin(ax+b)$: حيث $a \neq 0$

الدالة الأصلية للدالة $\sin(ax+b)$ هي الدالة :

$\frac{-1}{a}.\cos(ax+b)$

- **الدالة الأصلية للدالة** $\cos(ax+b)$: حيث $a \neq 0$

الدالة الأصلية للدالة $\cos(ax+b)$ هي الدالة :

$\frac{1}{a}.\sin(ax+b)$

الحساب التكاملي وحساب المساحات

1) تعريف :

f دالة مستمرة على المجال I و F دالتها الأصلية على المجال I

a و b عددان حقيقيان من المجال I . يسمى العدد الحقيقي L حيث: $L = F(b)-F(a)$ بالتكامل من a إلى b للدالة f

ونرمز له بـ : $\int_a^b f(x)dx$ ونقرأ تكامل من a إلى b للدالة f تفاضل x .

ونكتب : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

مثال : $\int_1^2 x^2dx = \left[\frac{1}{3}.x^3\right]_1^2 = \left(\frac{1}{3}.2^3\right)-\left(\frac{1}{3}.1^3\right) = \frac{7}{3}$

خواص :

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$ ، 2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$ حيث k عدد حقيقي ثابت .

4) علاقة شال : من أجل كل a و b و c من المجال I

فإن : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5) المقارنة : f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a;b]$

- إذا كانت $f(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in [a;b]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

- إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ من أجل كل $x \in [a;b]$ فإن :

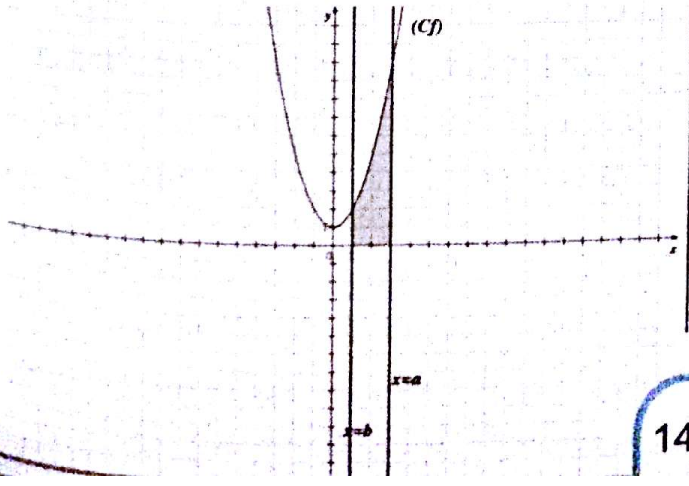
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

2) حساب المساحات :

1) S مساحة حيز من المستوى محصور بين (Cf) و محور الفواصل والمستقيمات التي معادلاتها $x=a$ و $x=b$.

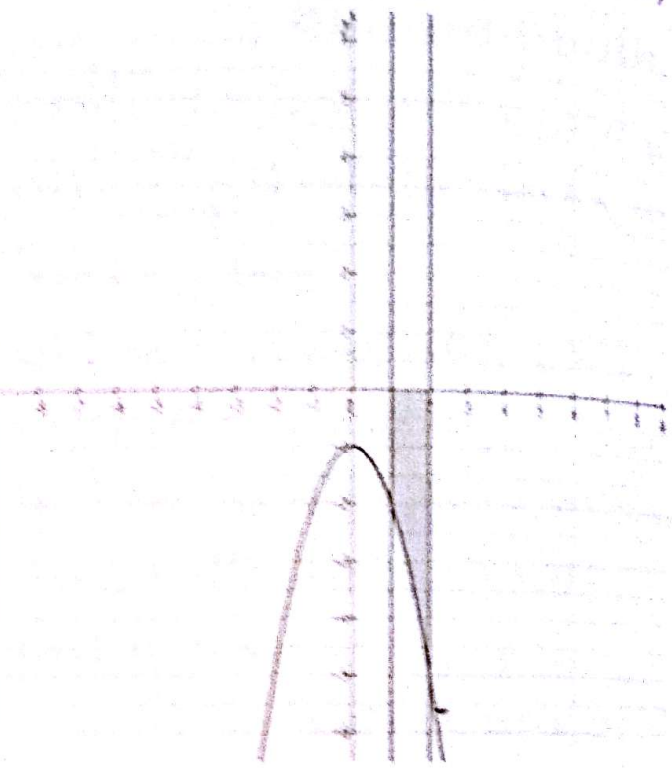
- في حالة (Cf) يقع فوق محور الفواصل لما $x \in [a;b]$:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad (\text{u.s})$$



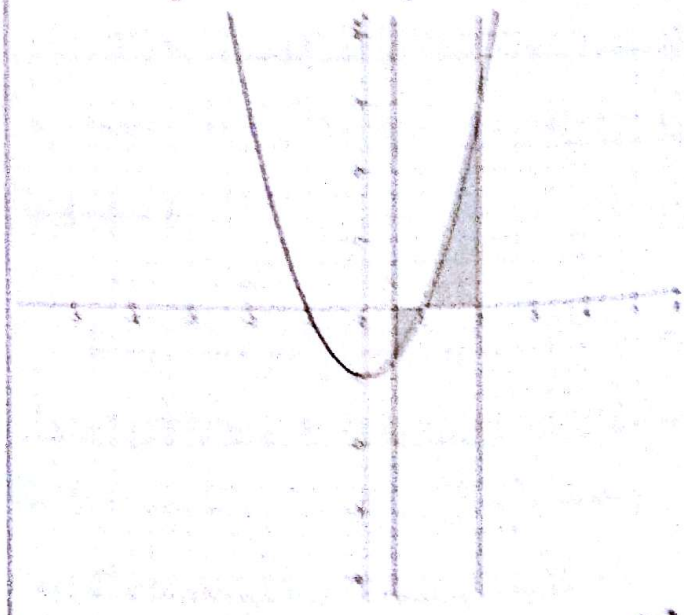
• في حالة (C_f) يقع تحت محور الفواصل لما $x \in [a;b]$:

$$S = \int_a^b [-f(x)]dx \quad (u.s)$$



• في حالة (C_f) يقع تحت محور الفواصل لما $x \in [a;c]$ و (C_f) يقع فوق محور الفواصل لما $x \in [c;b]$:

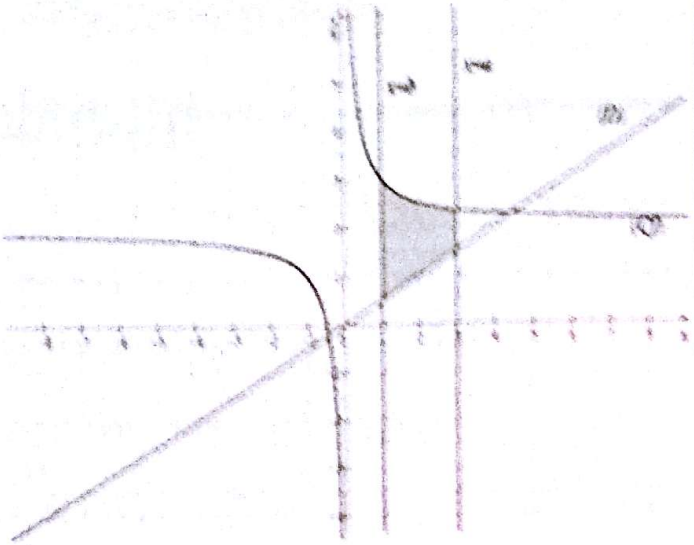
$$S = \int_a^c [-f(x)]dx + \int_c^b [f(x)]dx \quad (us)$$



S: مساحة حيز من المستوى محصور بين (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = \alpha.x + \beta$ والمستقيمات التي معادلاتها $x = a$ و $x = b$.

• في حالة (C_f) يقع فوق (Δ) لما $x \in [a;b]$:

$$S = \int_a^b [f(x) - (\alpha.x + \beta)]dx \quad (us)$$



• في حالة (C_f) يقع تحت (Δ) لما $x \in [a;b]$:

$$S = \int_a^b [(\alpha.x + \beta) - f(x)]dx \quad (us)$$

3) القيمة المتوسطة للدالة على مجال $[a;b]$:

إذا كانت دالة f مستمرة على المجال $[a;b]$ فإنه يوجد عدد حقيقي $C \in [a;b]$.

$$f(C) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad : \text{حيث}$$

وتسمى القيمة $f(C)$ بالقيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$.

4) الدالة الأصلية لدالة مستمرة على المجال I والتي تنعدم من أجل قيمة من I :

f دالة مستمرة على المجال I.

الدالة الأصلية لدالة مستمرة على المجال I والتي تنعدم من أجل قيمة x_0 من I هي الدالة F حيث: $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$

تمارين

التمرين 01:

بين أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال D ثم عين دالة أصلية أخرى للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=x^2-10x-9$

و $F(x)=\frac{1}{3}x^3-5x^2-9x-1$

و $D=R$

2) $f(x)=2x-1+\frac{2x}{x^2-1}$

و $F(x)=x^2-x+\ln(x^2-1)$ و $D=]1;+\infty[$

حل التمرين 01:

1) الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال IR ودالتها المشتقة هي: $F'(x)=x^2-10x-9=f(x)$ ومنه F هي دالة أصلية لـ f على IR

وبالتالي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على IR هي :

$x\mapsto F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت

وللحصول على دالة أصلية أخرى للدالة f يكفي تغيير العدد الحقيقي الثابت في عبارة :

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-5x^2-9x-1$$

فنحصل على دالة أصلية أخرى :

$$G(x)=\frac{1}{3}x^3-5x^2-9x+1$$

2) $F(x)=x^2-x+\ln(x^2-1)$

مجموعة تعريف الدالة F : F معرفة إذا كان $x^2-1>0$

وعليه فإن $D_F=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$F'(x)=2x-1+\frac{2x}{x^2-1}=f(x)$ ومنه F هي دالة أصلية لـ f على $]1;+\infty[$.

وبالتالي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على IR هي :

$x\mapsto F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت وللحصول على دالة أصلية أخرى للدالة f يكفي تغيير العدد الحقيقي الثابت في عبارة $F(x)=x^2-x+\ln(x^2-1)$

فنحصل على دالة أصلية أخرى :

$$G(x)=x^2-x+\ln(x^2-1)+5$$

التمرين 02:

1) f دالة عددية معرفة على $R-\{-1;3\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{2x-7}{x^2-2x-3}$$

عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل x من $R-\{-1;3\}$:

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-3}$$

ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]3;+\infty[$.

2) f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{e^x-2}{e^x-1}$

عين الأعداد الحقيقية a و b حيث من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)=a+\frac{b\,e^x}{e^x-1}$ ثم استنتج دالة أصلية f على المجال $]0;+\infty[$

حل التمرين 02 :

1) من أجل $x \in D_f$:

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-3}$$

$$=\frac{2x-2+\alpha(x-3)+\beta(x+1)}{x^2-2x-3}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+2)x+(\beta-3\alpha-2)}{x^2-2x-3}$$

بالمطابقة : $(\alpha+\beta+2=2\ ;\ \beta-3\alpha-2=-7)$

ومنه :
$$\begin{cases}\alpha+\beta+2=2\\ \beta-3\alpha-2=-7\end{cases}$$

ومنه :
$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \beta-3\alpha=-5\end{cases}$$

ومنه :
$$\begin{cases}\alpha=-\beta\\ 4\beta=-5\end{cases}$$ ومنه :
$$\begin{cases}\alpha=\frac{5}{4}\\ \beta=\frac{-5}{4}\end{cases}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]3;+\infty[$:

من أجل $x \in D_f$:

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{5}{4(x+1)}-\frac{5}{4(x-3)}$$

نعلم أن الدالة الأصلية للدالة $\frac{u'}{u}$ هي الدالة : $\ln|u|$

من أجل كل $x \in]3;+\infty[$: $x-3>0$ و $x+1>0$

و $x^2-2x-3>0$

لدينا الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$ على المجال $]3;+\infty[$ هي $x \mapsto \ln(x^2-2x-3)$

لدينا الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{5}{4(x+1)}$ على المجال $]3;+\infty[$ هي $x \mapsto \frac{5}{4}\ln(x+1)$

لدينا الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{5}{4(x-3)}$ على المجال $]3;+\infty[$ هي $x \mapsto \frac{5}{4}\ln(x-3)$

ومنه : من أجل كل $x \in]3;+\infty[$: فالدالة :

$$x \to \ln(x^2-2x-3)+\frac{5}{4}\ln(x+1)+\frac{5}{4}\ln(x-3)$$

دالة أصلية للدالة f في المجال $]3;+\infty[$ ولدينا:

$F(x)=\ln(x^2-2x-3)+\frac{5}{4}\ln\frac{x+1}{x-3}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]3;+\infty[$.

2) من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$a+\frac{be^x}{e^x-1}=\frac{ae^x-a+b^e}{e^x-1}=\frac{(a+b)e^x-a}{e^x-1}$$

بالمطابقة مع : $f(x)=\frac{e^x-2}{e^x-1}$ نحصل على $\begin{cases}a+b=1\\ -a=-2\end{cases}$

أي $\begin{cases}b=1\\ a=2\end{cases}$ ومنه فإن: $f(x)=2-\frac{e^x}{e^x-1}$

لدينا:

الدالة $x \mapsto 2x$ أصلية للدالة $x \mapsto 2$ على المجال $]0;+\infty[$

والدالة $x \mapsto \ln(e^x-1)$ أصلية للدالة $x \mapsto \frac{e^x}{e^x-1}$ على المجال $]0;+\infty[$.

منه: $F(x)=2x-\ln(e^x-1)$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

التمرين 03 :

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال f من الشكل $u' \times u^n$ عين مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية على المجال I :

1) $I=IR$: $f(x)=(x-1)^4$

2) $I=IR$: $f(x)=3(3x+4)^5$

3) $I=IR$: $f(x)=e^x(e^x-1)^2$

4) $I=IR$: $f(x)=x^2(x^3+1)^4$

5) $I=]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{1}{x}\left[\ln(x)\right]^2$

6) $I=IR$: $f(x)=2\cos x\sin^2 x$

حل التمرين 03 :

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن : الدالة الأصلية للدالة $u'.u^n$ هي الدالة :

$\frac{1}{n+1}.u^{n+1}$ حيث $(n\neq -1)$

1) نضع: $u(x)=x-1$ منه: $u'(x)=1$

إذن: $f(x)=(x-1)^4=u'(x)\times\left[u(x)\right]^4$

ومنه: الدالة $x\mapsto\frac{1}{4+1}\left[u(x)\right]^4$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto(x-1)^4$ أي: $F(x)=\frac{1}{5}(x-1)^5+c$ هي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f .

2) نضع: $u(x)=3x+4$ إذن: $u'(x)=3$

منه: $f(x)=3(3x+4)^5=u'(x)\left[u(x)\right]^5$

إذن: الدالة $x\mapsto\frac{1}{6}\left[u(x)\right]^6$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto u'(x)\left[u(x)\right]^5$ أي: $F(x)=\frac{1}{6}(3x+4)^6c$ هي مجموعة الدوال أصلية للدالة f

3) نضع: $u(x)=e^x-1$ إذن: $u'(x)=e^x$

منه: $f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^2=u'(x)\left[u(x)\right]^2$

إذن:الدالة $x\mapsto\frac{1}{3}\left[u(x)\right]^3$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto u'(x)\left[u(x)\right]^2$ أي: $F(x)=\frac{1}{3}\left(e^x-1\right)^3+c$ هي مجموعة الدوال أصلية للدالة f

4) نضع: $u(x)=x^3+1$ منه: $u'(x)=3x^2$ منه:

$f(x)=x^2(x^3+1)^4=\frac{1}{3}u'(x)\left[u(x)\right]^4$

إذن: الدالة $x\mapsto\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\left[u(x)\right]^2$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto\frac{1}{3}u'(x)\left[u(x)\right]^4$ أي: $F(x)=\frac{1}{15}\left(x^3+1\right)^5+c$

هي مجموعة الدوال الأصلية للدالة f .

5) نضع: $u(x)=\ln x$ إذن: $u'(x)=\frac{1}{x}$

منه: $f(x)=\frac{1}{x}(\ln x)^2=u'(x)\left[u(x)\right]^2$

إذن: $x\mapsto\frac{1}{3}\left[u(x)\right]^3$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto u'(x)\left[u(x)\right]^2$

أي: $F(x)=\frac{1}{3}(\ln x)^3+c$ هي مجموعة الدوال أصلية للدالة f .

6) نضع: $u(x)=\sin x$ إذن: $u'(x)=\cos x$

إذن: $f(x)=2\cos x\sin^2 x=2u'(x)\left[u(x)\right]^2$

منه: الدالة $x\mapsto 2\times\frac{1}{3}\left[u(x)\right]^3$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto 2u'(x)\left[u(x)\right]^2$ أي: $F(x)=\frac{2}{3}\sin^3 x+c$ هي مجموعة الدوال أصلية للدالة f .

التمرين 04:

لتكن f الدالة المعرفة على $]0;1[$ بـ $f(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل x من $]0;1[$:

$$f(x)=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{(x-1)^2}$$

2) إستنتج دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0;1[$ تحقق

$$F(\frac{1}{2})=6$$

حل التمرين 04 :

1) من أجل كل x من $]0;1[$ لدينا: $\frac{a}{x2}+\frac{b}{(x-1)2}$

$$=\frac{a\left(x^2-2x+1\right)+bx^2}{x^2(x-1)^2}=\frac{(a+b)x^2-2ax+a}{x^2(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع $f(x)=\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ نحصل على $\left.\begin{array}{l}a+b=0\\-2a=2\\a=-1\end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{l}b=-a\\a=-1\\a=-1\end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l}b=1\\a=-1\end{array}\right\}$

ومنه من أجل كل x من $]0;1[$: $f(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$

2) لدينا: $f(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}=-\left(x^{-2}\right)+(x-1)^{-2}$

نعلم أن الدالة الأصلية للدالة $u'.u^n$ هي الدالة: $\frac{1}{n+1}.u^{n+1}$

الدالة $x\mapsto x^{-2}$ أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}=-\frac{1}{x}$

الدالة $x\mapsto(x-1)^{-2}$ أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{-2+1}(x-1)^{-2+1}=\frac{-1}{x-1}$

منه الدالة: $x\mapsto-\left(-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x-1}$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto-x^{-2}+(x-1)^{-2}$

أي: $F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$ حيث c عدد حقيقي ثابت يمكن البحث عنه بحساب $F(\frac{1}{2})$ كما يلي:

$$\Leftrightarrow\frac{1}{1/2}-\frac{1}{\frac{1}{2}-1}+c=6\Leftrightarrow c=6-2-2\Leftrightarrow c=2$$

نتيجة: $F(\frac{1}{2})=6$ $F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+2$

التمرين 05:

f دالة معرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x^3+3x}{\left(x^2-1\right)^3}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b حيث:

$$f(x)=\frac{a}{(x-1)^3}+\frac{b}{(x+1)^3}$$

2) استنتج مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]1;+\infty[$

3) استنتج دالة أصلية F للدالة f تحقق: $F(0)=1$

حل التمرين 05:

1) من أجل كل x من $]1;+\infty[$: $\frac{a}{(x-1)^3}+\frac{b}{(x+1)^3}$

$$=\frac{a(x+1)^3+b(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

$$=\frac{a\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+b(x^3-3x^2+3x-1}{\left(x^2-1\right)^3}$$

$$=\frac{(a+b)x^3+3(a-b)x^2+3(a+b)xa-b}{\left(x^2-1\right)^3}$$

بالمطابقة مع $f(x)=\frac{x^3+3x}{\left(x^2-1\right)^3}$ نحصل على $\left.\begin{array}{l}a+b=1\\a-b=0\end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{l}a=1/2\\b=1/2\end{array}\right\}$

2) الدالة $x\mapsto\frac{1}{(x+1)^3}$ من الشكل $x\mapsto(x+1)^{-3}$

إذن: الدالة $x\mapsto\frac{1}{-3+1}(x+1)^{-3+1}=\frac{-1}{2(x+1)^2}$

هي دالة أصلية لـ $x\mapsto\frac{1}{(x+1)^3}$

الدالة $x\mapsto\frac{1}{(x-1)^3}$ من الشكل $x\mapsto(x-1)^{-3}$

إذن: الدالة $x\mapsto\frac{1}{-3+1}(x-1)^{-3+1}=\frac{-1}{2(x-1)^2}$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto\frac{1}{(x-1)^3}$

منه: الدالة $x\mapsto\left(\frac{-1}{2(x-1)^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2(x+1)^2}\right)+c$

هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{1}{2(x+1)^3}+\frac{1}{2(x-1)^3}$

أي: $F(x)=\frac{-1}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)^2}+c$ هي الدالة الأصلية لـ f

3) استنتج دالة أصلية F للدالة f تحقق: $F(0)=1$

$$F(0)=1 \Leftrightarrow \frac{-1}{4}-\frac{1}{4}+c=0 \Leftrightarrow c=1/2$$

ومنه: $F(x)=\frac{-1}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{1}{2}$ هي الدالة الأصلية المطلوبة .

التمرين 06:

f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$

1) عين الدالة المشتقة للدالة g المعرفة على $]-a;+\infty[$

بـ $g(x)=(x+a)\ln|x+a|-x$

حيث (a عدد حقيقي ثابت).

2) استنتج دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln|x+a|$:

h على $]-a;+\infty[$

3) استنتج مجموع الدوال الأصلية للدالة f على $]2;+\infty[$.

حل التمرين 06 :

1) $g'(x)=\ln|x+a|+(x+a)\times\frac{1}{x+a}-1$

$=\ln|x+1|+1-1=\ln|x+a|$

2) لدينا: $g'(x)=\ln|x+a|$ أي $g'(x)=h(x)$

ومنه: g هي دالة أصلية لـ h على $]-a;+\infty[$

3) $f(x)=\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|=\ln|x-2|-\ln|x+2|$

حسب السؤال (1) فإن:

الدالة $x\mapsto \ln|x-2|$ أصلية لـ $x\mapsto(x-2)\ln|x-2|-x$

الدالة $x\mapsto \ln|x+2|$ أصلية لـ $x\mapsto(x+2)\ln|x+2|-x$

إذن: الدالة:

$x\mapsto(x-2)\ln|x-2|-x-[(x+2)\ln|x+2|-x]$

أصلية للدالة: $x\mapsto \ln|x-2|-\ln|x+2|$

أي الدالة $x\mapsto(x-2)\ln|x-2|-(x+2)\ln|x+2|+c$

أصلية للدالة f حيث (c عدد حقيقي ثابت).

التمرين 07:

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال $x\mapsto\frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$

عين الدوال الأصلية للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $I=]2;+\infty[: f(x)=\frac{5}{(x-2)^7}$

2) $I=]-1;+\infty[: f(x)=\frac{-2}{(x+1)^3}$

3) $I=]1/2;+\infty[: f(x)=\frac{2}{(2x-1)^3}$

4) $I=]1;+\infty[: f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$

5) $I=IR : f(x)=\frac{ex}{(1+ex)^2}$

6) $I=IR : f(x)=\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}$

7) $I=]-1;+\infty[: f(x)=\frac{6x^2}{(x^3+1)^4}$

8) $I=]-\pi/2;\pi/2[: f(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}$

9) $I=]0;+\infty[: f(x)=\frac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2}$

10) $I=[1;+\infty[: f(x)=\frac{1}{x(\ln x+2)^2}$

حل التمرين 07 :

1) نضع: $u(x)=x-2$ منه: $u'(x)=1$

إذن: $f(x)=\frac{5}{(x-2)^7}=5(\frac{u'(x)}{[u(x)]^7})$

منه: الدالة $x\mapsto 5(\frac{-1}{(7-1)[u(x)]^{7-1}})$ دالة أصلية لـ $x\mapsto 5\frac{u'(x)}{[u(x)]^7}$

أي: $F(x)=\frac{-5}{6(x-2)^6}+c$ هي دالة أصلية للدالة f

2) نضع: $u(x)=x+1$ منه: $u'(x)=1$

إذن: $f(x)=\frac{-2}{(x+1)^3}=-2\left(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3}\right)$

إذن: الدالة $x\mapsto -2(\frac{-1}{2(u(x))^2})$ هي دالة أصلية لـ

$x\mapsto -2(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3})$ منه: $F(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f.

3) نضع: $u(x)=2x-1$ إذن: $u'(x)=2$

منه: $f(x)=\frac{2}{(2x-1)^3}=\frac{u'(x)}{[u(x)]^3}$

الدالة $x\mapsto \frac{-1}{2(u(x))^2}$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^3}$

إذن: $F(x)=\frac{-1}{2(2x+1)^2}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

4) نضع: $u(x)=\ln x$ إذن: $u'(x)=1/x$

منه: $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}=\frac{1/x}{(\ln x)^2}=\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x\mapsto \frac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن: $F(x)=\frac{-1}{\ln x}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

5) نضع: $u(x)=1+e^x$ إذن: $u'(x)=e^x$

منه: $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

6) نضع: $u(x)=x^2-x+1$ إذن: $u'(x)=2x-1$

منه: $f(x)=\frac{2x-1}{(x^2-x+1)2}=\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x\mapsto \frac{-1}{u(x)}$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن: $F(x)=\frac{-1}{x^2-x+1}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

7) نضع: $u(x)=x^3+1$ منه: $u'(x)=3x^2$

إذن: $f(x)=\frac{6x^2}{(x^3+1)^4}=2(\frac{u'(x)}{[u(x)]^4})$

الدالة: $x\mapsto 2(\frac{-1}{3[u(x)]^3})$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto 2(\frac{u'(x)}{[u(x)]^4})$

إذن: $F(x)=\frac{-2}{3(x^3+1)}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

8) نضع $u(x)=\cos x$ إذن: $u'(x)=-\sin x$

منه: $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^3 x}=-(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3})$

الدالة $x\mapsto -(\frac{-1}{2(u(x))^2})$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^3})$

إذن: $F(x)=\frac{1}{2(u(x))^2}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

9) نضع: $u(x)=e^x+2x$ منه: $u'(x)=e^x+2$

منه: $f(x)=\frac{-e^x-2}{(e^x+2x)^2}=-(\frac{u'(x)}{[u(x)]^2})$

الدالة: $x\mapsto -\left(\frac{-1}{u(x)}\right)$ أصلية لـ $x\mapsto -(\frac{u'(x)}{[u(x)]^2})$

ومنه: $F(x)=\frac{1}{e^x+2x}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

10) نضع: $u(x)=\ln x+2$ منه: $u'(x)=1/x$

منه: $f(x)=\frac{1}{x(\ln x+2)^2}=\frac{1/x}{(\ln x+2)^2}=\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

الدالة $x\mapsto \frac{-1}{u(x)}$ أصلية للدالة $x\mapsto \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

ومنه: $F(x)=\frac{-1}{\ln x+2}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين 08:

باستعمال خاصية الدوال الأصلية للدوال من الشكل $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

عين الدوال الأصلية للدوال f التالية على المجال I:

1) $I=]1;+\infty[: f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

2) $I=]2;+\infty[: f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

3) $I=]3;+\infty[: f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}}$

4) $I=]-\infty;2[: f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+3$

5) $I=]0;+\infty[: f(x)=\dfrac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}$

6) $I=]3;+\infty[: f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$

7) $I=]0;\pi[: f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$

8) $I=IR : f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+3}}$

9) $I=]0;+\infty[: f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3-x^2}}$

حل التمرين 08 :

1) نضع: $u(x)=x-1$ إذن: $u'(x)=1$

منه: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ إذن: $F(x)=2\sqrt{x-1}+c$

هي الدالة الأصلية للدالة f

2) نضع $u(x)=x^2-4$ إذن: $u'(x)=2x$

منه: $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن: $F(x)=2\sqrt{x^2-4}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f.

3) نضع: $u(x)=x^2-x-6$ إذن: $u'(x)=2x-1$

منه: $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-6}}=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن: $F(x)=2\sqrt{x^2-x-6}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f.

4) نضع: $u(x)=2-x$ إذن: $u'(x)=-1$

منه: $f(x)=\dfrac{1}{2-x}+3=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}+3$

إذن: $F(x)=-2-\sqrt{2-x}+3x+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f.

5) نضع: $u(x)=e^x-1$ منه: $u'(x)=e^x$

منه: $f(x)=\dfrac{2e^x}{\sqrt{e^x-1}}=2\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

إذن: $F(x)=2\left(2\sqrt{e^x-1}\right)+c$

أي: $F(x)=4\sqrt{e^x-1}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

6) نضع: $u(x)=x-3$ منه: $u'(x)=1$

إذن: $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x-3}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-2\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

منه: $F(x)=2(2\sqrt{x})-2\left(2\sqrt{u(x)}\right)+c$

أي: $F(x)=4\sqrt{x}-4\sqrt{x-3}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f.

7) نضع: $u(x)=\sin x$ منه: $u'(x)=\cos x$

إذن: $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

منه: $F(x)=2\sqrt{\sin x}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

8) نضع: $u(x)=2\cos x+3$ منه: $u'(x)=-2\sin x$

أي: $\sin x=\dfrac{-1}{2}u'(x)$

إذن: $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{2\cos x+3}}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\right)$

منه: $F(x)=-\dfrac{1}{2}(2\sqrt{2\cos x+3}+c$

أي: $F(x)=-\sqrt{2\cos x+3}+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

9) نضع $u(x)=x^3+x^2$ إذن: $u'(x)=3x^2+2x$

إذن: $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{\sqrt{x^3+x^2}}=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$

التمرين 09:

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=(2x^2-7x+5)e^x$

1) احسب $f'(x)$ ثم $f''(x)$

2) تحقق أن من أجل كل x من IR :

$f(x)=4e^x+2f'(x)-f''(x)$

3) استنتج دالة أصلية للدالة f على IR

حل التمرين 09 :

1) $f'(x)=(4x-7)e^x+(ex^2-7x+5)e^x$

$=(2x^2-7x+5+4x-7)e^x$

$=(2x^2-3x-2)e^x$

$f''(x)=(4x-3)e^x+(2ex^2-3x-2)e^x$

$=(2x^2+x-5)e^x$

2) من أجل كل x من IR فإن:

$4e^x+2f'(x)-f''(x)=(4+4x^2-6x-4-2x^2-x+5)e^x$

$=(2x^2-7x+5)e^x \quad =f(x)$

3) حسب السؤال فإن: $f(x)=4e^x+2f'(x)-f''(x)$

الدالة $x\mapsto 4e^x$ أصلية لـ $x\mapsto 4e^x$

الدالة $x\mapsto f(x)$ أصلية لـ $x\mapsto f'(x)$

الدالة $x\mapsto f'(x)$ أصلية لـ $x\mapsto f''(x)$

منه الدالة $x\mapsto 4e^x+2f(x)-f'(x)+c$ أصلية لـ f

أي الدالة :

$x\mapsto 4e^x+2(2x^2-7x+5)e^x-(2x^2-3x-2)e^x+c$

أصلية للدالة f أي الدالة :

$x\mapsto (4+4x^2-14x+10-2x^2+3x+2)e^x+c$

أصلية للدالة f أي الدالة $x\mapsto (2x^2-11x+16)e^x+c$

أصلية للدالة f .

التمرين 10 :

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=\cos^3 x$

تحقق أن: $f(x)=\cos x-\cos x\sin^2 x$ ثم إستنتج دالة أصلية للدالة f على IR .

حل التمرين 10 :

من أجل كل x من IR :

$\cos x-\cos x\sin^2 x=\cos x(1-\sin^2 x)$

$=\cos x(\cos^2 x)$

$=\cos^3 x \ =f(x)$

الدالة $x\mapsto \sin x$ أصلية لـ $x\mapsto \cos x$

الدالة $x\mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x$ أصلية لـ $x\mapsto \cos x\sin^2 x$

إذن: الدالة $x\mapsto \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+c$ هي دالة أصلية للدالة f

التمرين 11 :

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=x\cos x$

أثبت أن: $f(x)+f''(x)=-2\sin x$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على IR

حل التمرين 11 :

$f'(x)=\cos x-x\sin x$

و $f''(x)=-\sin x-\sin x-x\cos x$

و منه : $f''(x)=-2\sin x-f(x)$

أي: $f''(x)+f(x)=-2\sin x$ وهو المطلوب

لدينا: $f''(x)+f(x)=-2\sin x$

إذن: $f(x)=f''(x)-2\sin x$

أي: الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة الأصلية للدالة

$x\mapsto -f''(x)-2\sin x$

منه: $F(x)=-f'(x)+2\cos x+c$

أي: $F(x)=-\cos x+x\sin x+2\cos+c$

أي: $F(x)=\cos x+x\sin x+c$ هي الدالة الأصلية للدالة f

التمرين 12 :

أحسب ما يلي: 1) $\int_1^3 (x^3+2x^2+1)dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x.\sin^2 x)dx$

3) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

4) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

5) $\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx$

6) $\int_{-1}^1 \left(x+1-\frac{1}{x+2}\right)dx$

7) $\int_1^2 \frac{x^4+x^3+x^2+x}{x^2}dx$

حل التمرين 12 :

1) $\int_1^3 (x^3+2x^2+1)dx = \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+x\right]_1^3$

$= \left(\frac{1}{4}(3)^4+\frac{2}{3}(3)^3+3\right)-\left(\frac{1}{4}(1)^4+\frac{2}{3}(1)^3+1\right)$

$= \frac{165}{4}-\frac{23}{12} = \frac{472}{12} = \frac{118}{3}$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x.\sin^2 x)dx = \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(\frac{1}{3}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-\left(\frac{1}{3}\sin^3(0)\right)$

$= \frac{1}{3}$

3) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x}.\ln x\right)dx$

$= \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e$

$= \frac{1}{2}\left[(\ln^2 e-\ln^2 1)\right]$

$= \frac{1}{2}$

4) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x}.\ln^2 x\right)dx$

$= \left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e$

$= \frac{1}{3}\left[(\ln^3 e-\ln^3 1)\right]$

$= \frac{1}{3}$

5) $\int_1^e \left(\frac{1}{x}.\ln^3 x\right)dx = \left[\frac{1}{4}\ln^4 x\right]_1^e$

$= \frac{1}{4}\left[(\ln^4 e-\ln^4 1)\right]$

$= \frac{1}{4}$

6) $\int_{-1}^1 \left(x+1-\frac{1}{x+2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x+2|\right]_{-1}^1$

$= \left(\frac{1}{2}.1^2+1-\ln(1+2)\right)-\left(\frac{1}{2}.(-1)^2-1-\ln(-1+2)\right)$

$= 2-\ln 3$

7) $\int_1^2 \frac{x^4+x^3+x^2+x}{x^2}dx$

$= \int_1^2 \left(x^2+x+1+\frac{1}{x}\right)dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x|\right]_1^2$

$= \frac{29}{6}-\ln 2$

التمرين 13:

باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_1^e x\ln x\,dx$

2) $\int_0^\pi x\cos x\,dx$

3) $\int_1^2 (x-2)e^x dx$

4) $F(x)=\int_1^x (\ln t)^2 dt$

حل التمرين 13:

1) نضع $\left.\begin{matrix} u(x)=\ln x \\ v'(x)=x \end{matrix}\right\}$ إذن: $\left.\begin{matrix} u'(x)=1/x \\ v(x)=\frac{1}{2}x^2 \end{matrix}\right\}$

منه: $\int_1^e x\ln x\,dx = \int_1^e v'(x)u(x)dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx$

$= \frac{1}{2}\left[x^2\ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(e^2-0\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$

$= \frac{e^2}{2}-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}$

2) نضع $\left.\begin{matrix} u(x)=x \\ v'(x)=\cos x \end{matrix}\right\}$ إذن: $\left.\begin{matrix} u'(x)=1 \\ v(x)=\sin x \end{matrix}\right\}$

منه: $\int_0^\pi x\cos x\,dx = \int_0^\pi u(x).v'(x)dx$

$= \left[u(x).v(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)v(x)dx$

$= \left[x\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx$

$= \pi\sin\pi - 0\left[-\cos x\right]_0^\pi$

$= -(-\cos\pi+\cos 0) = -2$

3) نضع $\left.\begin{matrix} u(x)=x-2 \\ v'(x)=e^x \end{matrix}\right\}$ إذن: $\left.\begin{matrix} u'(x)=1 \\ v(x)=e^x \end{matrix}\right\}$

$\int_1^2 (x-2)e^x dx = \left[(x-2)e^x\right]_1^2 - \int_1^2 e^x dx$

$= 0-(-e)-\left[e^x\right]_1^2$

$= e-\left(e^2-e\right)$

$= 2e-e^2$

4) $F(x)=\int_1^x (\ln t)^2 dt$

نضع $\left.\begin{matrix} u(t)=(\ln t)^2 \\ v'(t)=1 \end{matrix}\right\}$ إذن: $\left.\begin{matrix} u'(t)=\frac{2}{t}\ln t \\ v(t)=t \end{matrix}\right\}$

منه: $F(x)=\left[t(\ln t)^2\right]_1^x - \int_1^x \frac{2t}{t}\ln t\,dt$

$= x(\ln x)^2 - 2\int_1^x \ln t\,dt$

$= x(\ln x)^2 - 2\left[t\ln t - t\right]_1^x$

$= x(\ln x)^2 - 2\left[x\ln x - x+1\right]$

$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x - 2$

ملاحظة: الدالة $t\mapsto t\ln t - t$ هي دالة أصلية للدالة $t\mapsto t\ln t$ على المجال $]0;+\infty[$

التمرين 14:

1) بين أن من أجل كل عدد حقيقي x: $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

2) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب $\int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$

حل التمرين 14 :

1) من أجل كل x من IR :

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{e^{x}}{e^{x}}\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)=\frac{1}{1+e^{x}}$$

2) التكامل بالتجزئة: نضع $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}} \end{cases}$

إذن: $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\dfrac{-1}{e^{x}+1} \end{cases}$

$$\int_0^1 \frac{xe^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}dx=\left[\frac{-x}{e^{x}+1}\right]_0^1-\int_0^1-\frac{1}{e^{x}+1}dx$$

$$=\frac{-1}{e+1}-0-\int_0^1\frac{-1}{e^{x}+1}dx$$

$$=\frac{-1}{e+1}-\int_0^1\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$

$$=\frac{-1}{e+1}-\left[\ln(e^{-x}+1)\right]_0^1$$

$$=\frac{-1}{e+1}-\left[\ln\left(\frac{1}{e}+1\right)-\ln(1+1)\right]=\frac{-1}{e+1}-\ln\left(\frac{1+e}{2e}\right)$$

التمرين 15:

1) (C) منحى الدالة f على المجال $[0;1]$ حيث

$$f(x)=x^{2}-3x+2$$

احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل على المجال $[0;1]$.

2) ليكن (C) منحنى الدالة f على المجال $[0;1]$ حيث

$$f(x)=(x-1)e^{x}$$

احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل على المجال $[0;1]$

حل التمرين 15 :

1) لندرس إشارة الدالة f على المجال $[0;1]$ $\Delta=9-8=1$

إذن: $\begin{cases} x_1=\dfrac{3+1}{2}=2 \\ x_2=\dfrac{3-1}{2}=1 \end{cases}$

منه:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)=x^{2}-3x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن: على المجال $[0;1]$ المنحنى (C) فوق محور الفواصل $(f(x)\geq 0)$ إذن:

$$S=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^{2}-3x+2\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^{3}-\frac{3}{2}x^{2}+2x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2=\frac{5}{6}$$

2) على المجال $[0;1]$ لدينا $x-1\leq 0$ إذن: $(x-1)e^{x}\leq 0$

لأن $e^{x}>0$ منه: $f(x)\leq 0$

$$S=\int_0^1-f(x)\,dx=\int_1^0(x-1)e^{x}dx$$

نضع: $\alpha=\int_1^0(x-1)e^{x}dx$ التكامل بالتجزئة:

نضع $\begin{cases} u(x)=x-1 \\ v'(x)=e^{x} \end{cases}$ إذن $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=e^{x} \end{cases}$

منه: $\alpha=\left[(x-1)e^{x}\right]_1^0-\int_1^0 e^{x}dx$

أي: $\alpha=-e^{0}-0-\left[e^{x}\right]_1^0$

أي: $\alpha=-1-(1-e)$

التمرين 16 :

f دالة معرفة على $D = R - \{-1\}$ حيث :

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 3}{(x+1)^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م $\left(o; \vec{i}; \vec{j}\right)$

1) تحقق أنه من أجل كل x من D فإن :

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{(x+1)^2} \quad .$$

2) (Δ) مستقيم معادلته $y = x - 1$ حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

3) α عدد حقيقي ثابت حيث $\alpha > 1$ أحسب مساحة الحيز من المستوى المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين $x = 1$ و $x = \alpha$ ثم حساب نهاية $A(\alpha)$ عند $+\infty$

حل التمرين 16 :

1)

$$x - 1 + \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)^2 + 4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)\left(x^2 + 2x + 1\right) + 4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^3 + 2x^2 + x - x^2 - 2x - x + 4}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^3 + x^2 - 2x + 4}{(x+1)^2} = f(x)$$

2) تحديد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) : (ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y]$) لدينا : $f(x) - y = \frac{4}{(x+1)^2}$

نلاحظ أن : $f(x) - y > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ).

3) حساب مساحة الحيز من المستوى المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين $x = 1$ و $x = \alpha$ حيث : $\alpha > 1$.

$$A(\alpha) = \int_1^{\alpha} [f(x) - y]dx = \int_1^{\alpha} \left(\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{4}{x+1}\right]_1^{\alpha} = \left(-\frac{4}{(\alpha+1)}\right) - \left(-\frac{4}{2}\right)$$

$$= -\frac{4}{\alpha+1} + 2 \ (u.s)$$

التمرين 17 :

f دالة عددية معرفة على $R - \{-1;3\}$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{2x - 7}{x^2 - 2x - 3}$$

1) أحسب نهايات الدالة f على أطراف مجموعة تعريفها ، ثم استنتج معادلات المستقيمات المقاربة لـ (C_f) .

2) أحسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

3) أنشئ جدول تغيرات f .

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5) عين إحداثيات نقط تقاطع (Cf) منحنى الدالة f مع محاور الإحداثيات .

6) أنشئ (T) و (Cf) .

7) عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل x من $R - \{-1;3\}$:

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3} + \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-3}$$

ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]3;+\infty[$.

8) أحسب مساحة الحيز من المستوى المحدد بـ (Cf) و محور الفواصل والمستقيمات ذات المعادلات $x = 5$ و $x = \frac{7}{2}$.

حل التمرين 17 :

1) حساب النهايات :

$$D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;3[\cup]3;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2} = 0$$

و $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2} = 0$$

ومنه : (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$

لأن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x) = -\infty$ $\begin{pmatrix} 2x-7 \to -9 \\ x^2-2x-3 \to 0^+ \end{pmatrix}$

لأن $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x) = +\infty$ $\begin{pmatrix} 2x-7 \to -9 \\ x^2-2x-3 \to 0^- \end{pmatrix}$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=-1$

لأن $\lim\limits_{\substack{x\to3\\ <}} f(x) = +\infty$ $\begin{pmatrix} 2x-7 \to -1 \\ x^2-2x-3 \to 0^- \end{pmatrix}$

لأن $\lim\limits_{\substack{x\to3\\ >}} f(x) = -\infty$ $\begin{pmatrix} 2x-7 \to -1 \\ x^2-2x-3 \to 0^+ \end{pmatrix}$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=3$

2) حساب المشتقة : f قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{(2)(x^2-2x-3)-(2x-2)(2x-7)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x-6-4x^2+18x-14}{(x^2-2x-3)^2}$$

ومنه : $$f'(x) = \frac{-2x^2+14x-20}{(x^2-2x-3)^2}$$

إشارة $f'(x)$:

قيم x	$-\infty$		-1		2		3		5		$+\infty$
$-2x^2+14x-20$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
إشارة المقام		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$	
إشارة $f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

تغيرات الدالة f :

- f متزايدة تماما لما $x\in[2;3[\cup]3;5]$
- f متناقصة تماما لما $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;2]\cup[5;+\infty[$

3) جدول تغيرات الدالة f :

قيم x	$-\infty$		-1		2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	‖ $+\infty$	↘	1	↗	‖ $+\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0
		$-\infty$						$-\infty$			

4) معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$$y = f'(1)\times(x-1)+f$$

حيث : $f(1) = -\frac{5}{4}$ و $f'(1) = -\frac{1}{2}$

ومنه : $$y = \frac{-1}{2}(x-1)+\frac{5}{4}$$

ومنه معادلة المماس (T) : $$y = \frac{-1}{2}x+\frac{7}{4}$$

5) إحداثيات نقط تقاطع (Cf) مع المحاور:

$$(Cf)\cap(yy') : f(0) = \frac{7}{3}$$

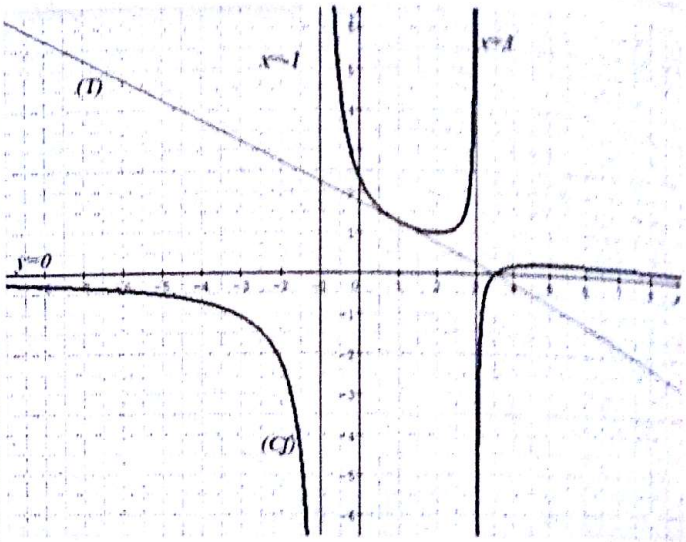
ومنه : $$(Cf)\cap(yy') = \left\{\left(0;\frac{7}{3}\right)\right\}$$

$f(x)=0$: $(Cf)\cap(xx')$

$2x-7=0$ أي : $x=\frac{7}{2}$

ومنه : $(Cf)\cap(xx')=\left\{\left(\frac{7}{2};0\right)\right\}$.

6) إنشاء (Cf) :



7) تعيين α و β : من أجل $x\in D_f$:

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{\alpha}{x+1}+\frac{\beta}{x-3}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+2)x+(\beta-3\alpha-2)}{x^2-2x-3}$$

$$=\frac{2x-2+\alpha(x-3)+\beta(x+1)}{x^2-2x-3}$$

بالمطابقة : $(\alpha+\beta+2=2\ ;\ \beta-3\alpha-2=-7)$

$$\begin{cases}\alpha=\frac{5}{4}\\ \beta=\frac{-5}{4}\end{cases}\ ;\ \begin{cases}\alpha+\beta+2=2\\ \beta-3\alpha-2=-7\end{cases}\ ;\ \begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \beta-3\alpha=-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha=-\beta\\ 4\beta=-5\end{cases}\ ;$$

من أجل $x\in D_f$:

$$f(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{5}{4(x+1)}-\frac{5}{4(x-3)}$$

$$\int f(x)dx=\int\left(\frac{2x-2}{x^2-2x-3}+\frac{5}{4(x+1)}-\frac{5}{4(x-3)}\right)dx$$

$$=\ln|x^2-2x-3|+\frac{5}{4}\ln|x+1|-\frac{5}{4}\ln|x-3|+c$$

من أجل كل $x\in\ ]3;+\infty[$:

$x-3\succ 0$ و $x+1\succ 0$ و $x^2-2x-3\succ 0$

ومنه : من أجل كل $x\in\ ]3;+\infty[$:

$$|x^2-2x-3|=x^2-2x-3$$

$$|x-3|=x-3$$

$$|x+1|=x+1$$

فالدالة : $x\to\ln(x^2-2x-3)+\frac{5}{4}\ln\frac{x+1}{x-3}$

دالة أصلية للدالة f في المجال $]3;+\infty[$.

$$F(X)=\ln(x^2-2x-3)+\frac{5}{4}\ln\frac{x+1}{x-3}$$

8) حساب المساحة : $S=\int_{\frac{7}{2}}^{5}f(x)dx=[F(x)]_{\frac{7}{2}}^{5}(us)$

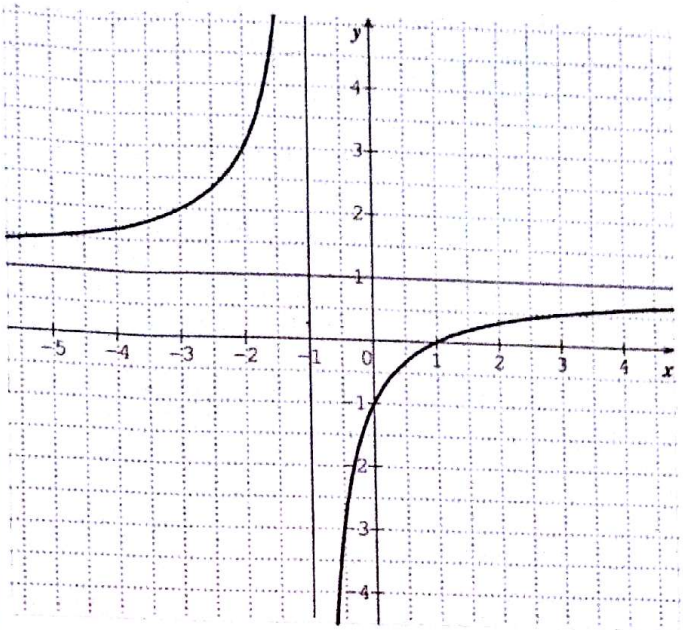
ومنه : $S=\left[\ln(x^2-2x-3)+\frac{5}{4}\ln\frac{x+1}{x-3}\right]_{\frac{7}{2}}^{5}(us)$

$$=\left(\ln12+\frac{5}{4}\ln3-\ln\frac{9}{4}-\frac{5}{4}\ln9\right)(us)$$

$$=(4\ln2-\frac{9}{4}\ln3)\,us$$

التمرين 18 :

1) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $R-\{-1\}$ كما يلي : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ و (C_g) تمثيلها البياني فيالمستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.



أ. شكل جدول تغيرات الدالة g .

ب. حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$.

ج. عين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$.

II) أ. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ و (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ ، فسر النتيجتين هندسيا.

2. أ.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$$g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$$

ب. أحسب $f'(x)$ و أدرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ. باستعمال الجزء I) السؤال ج . عين إشارة العبارة $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

ب. α عدد حقيقي. بين أن الدالة :

$x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$

هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

ج. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$:

$g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$ ثم عين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$

حل التمرين 18 :

I) أ. تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$-$	
$g(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

ب. حل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$:

الحل البياني للمتراجحة $g(x)>0$ هو :

$x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

ج. تعيين بيانيا قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$:

من البيان $0<g(x)<1$ لما : $x\in]1;+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1} f(x)$ و تفسير النتيجتين هندسيا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=1$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}\left[\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$$

التفسير البياني: $x=1$ مستقيم مقارب عمودي يوازي $(y'y)$ يجوار $(-\infty)$.

$y=1$ مستقيم مقارب أفقي يوازي $(x'x)$.

2) أ. إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

ب. حساب f' ودراسة إشارتها:

الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}\frac{2(x-1)+2(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$=\frac{4x}{(x+1)^2(x-1)}$$

دراسة إشارة المشتقة: بما أن $x>1$ فإن: $x-1>0$

و $\dfrac{4x}{(x+1)^2}>0$ و عليه من أجل كل x من $]1;+\infty[$:

$f'(x)>0$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1

3) أ/ مما سبق من أجل $x>1$ لدينا: $0<\dfrac{x-1}{x+1}<1$

ونعلم أن $\ln a<0$ لما $a\in]0;1[$ و بالتالي: $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)<0$

و بالتالي إشارة العبارة سالبة.

ب. إثبات أن الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$:

وعليه الدالة $x\mapsto(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$ بوضع :

$$k(x)=(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$$

الدالة k معرفة على المجال $]\alpha;+\infty[$ و قابلة للإشتقاق عليه و :

$$k'(x)=\ln(x-\alpha)+(x-\alpha)\times\frac{1}{x-\alpha}-1=\ln(x-\alpha)$$

ج. التحقق أن : $g(x)=1-\dfrac{2}{x+1}$

لدينا : $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{x+1-2}{x+1}=1-\dfrac{2}{x+1}$

تعيين دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$:

لدينا : $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ و عليه :

$$f(x)=1-\frac{2}{x+1}+\ln(x-1)-\ln(x+1)$$

مما سبق لدينا :

$x\mapsto(x-1)\ln(x-1)-x$ دالة أصلية للدالة

$x\mapsto\ln(x-1)$

$x\mapsto(x+1)\ln(x+1)-x$ دالة أصلية للدالة

$x\mapsto\ln(x+1)$

$x\mapsto x-2\ln(x+1)$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto1-\dfrac{2}{x+1}$

و عليه :

$$F(x)=x-2\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)$$
$$-x-(x+1)\ln(x+1)+x$$

أي : $F(x)=x-(x+3)\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

التمرين 19 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـ :

$$f(x)=e^x-ex-1$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;i;j)$.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها.

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب)أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ج) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

د) ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C) على المجال $]-\infty;2[$.

3) أ) أحسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=\alpha$.

ب) أثبت أن : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$

(ua هي وحدة المساحات).

حل التمرين 19 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بـ :

$$f(x)=e^x-ex-1$$

1. أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-ex-1)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x-ex-1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-e-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty$

ب) حساب $f'(x)$ و دراسة إشارتها : الدالة f قابلة للاشتقاق على R و : $f'(x)=e^x-e$

دراسة إشارتها : $f'(x)=0$ تعني أن : $e^x-e=0$

أي : $e^x=e$ و بالتالي : $x=1$. و عليه : $f'(x)>0$ لما $x>1$ و بالتالي الدالة f متزايدة تماما و :

$f'(x)<0$ لما $x<1$ و بالتالي الدالة f متناقصة تماما.

ج) جدول تغيرات الدالة f :

لدينا : $f(1)=e^1-e(1)-1=-1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2. أ. إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(-\infty)$:

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-ex-1)]=\lim_{x\to-\infty}(e^x-ex-1+ex+1)$$

$$=0$$

و منه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-ex-1$

مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

ب)كتابة معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0:

لدينا: $f(0)=0$ و $f'(0)=1-e$

و عليه: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي: $y=(1-e)x$.

ج) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α:

بما أن الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

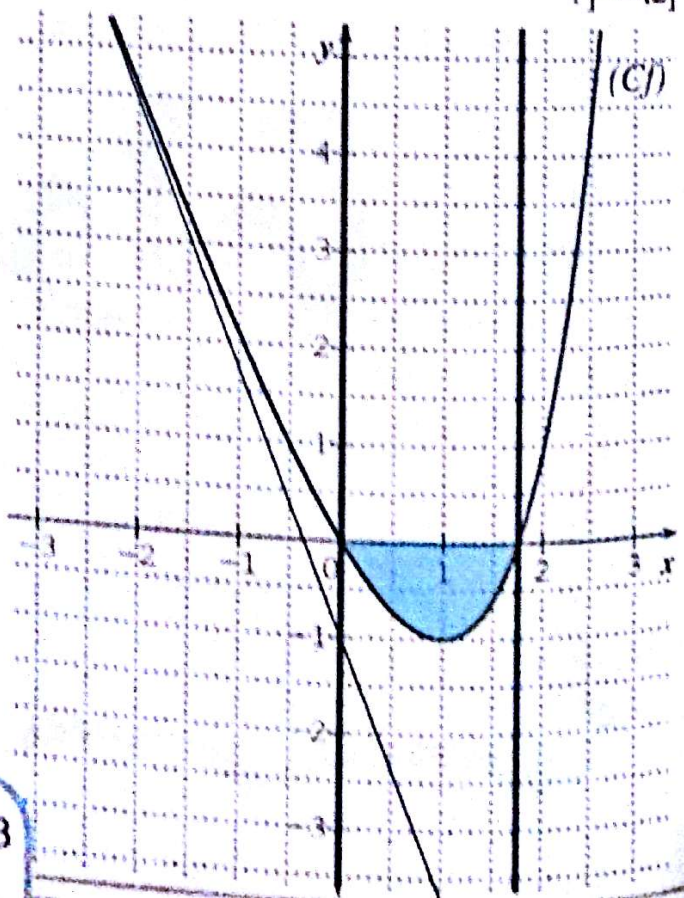
و المجال $]1,75;1,76[\subset]1;+\infty[$ فإن الدالة f مستمرة و متزايدة تماما عليه.

من جهة أخرى: $f(1,75)=e^{1,75}-1,75e-1\approx -0,0024$

$f(1,76)=e^{1,76}-1,76e-1\approx 0,028$

و عليه $f(1,75)\times f(1,76)<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد α وحيد من المجال $]1,75;1,76[$ يحقق: $f(x)=0$.

د) رسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C) على المجال $]-\infty;2]$:



3. أ. حساب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$:

بما أن: $f(x)-y<0$ لما $x\in]0;\alpha[$ فإن:

$$A(\alpha)=\int_0^{\alpha}[y-f(x)]dx=\int_0^{\alpha}(-e^x+ex+1)dx$$

$$A(\alpha)=\left[-e^x+\frac{e}{2}x^2+x\right]_0^{\alpha}$$

$$A(\alpha)=\left[-e^{\alpha}+\frac{e}{2}\alpha^2+\alpha\right]-\left(-e^0+\frac{e}{2}(0)^2+0\right)$$

$$=\left[-e^{\alpha}+\frac{e}{2}\alpha^2+\alpha+1\right]ua$$

ب. إثبات أن: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$:

بما أن $f(\alpha)=0$ فإن: $e^{\alpha}-e\alpha-1=0$

أي: $e^{\alpha}=e\alpha+1$

و عليه: $A(\alpha)=\left(-e^{\alpha}+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1\right)ua$

$$A(\alpha)=\left(-e\alpha-1+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1\right)ua$$

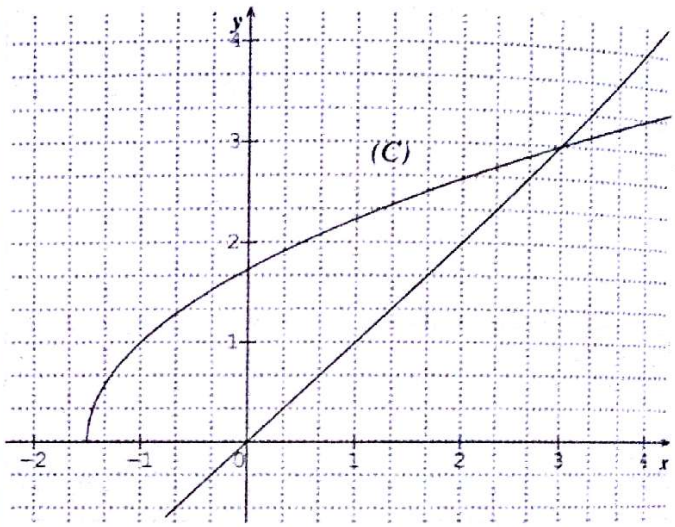
$$=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$$

مواضيع بكالوريا محلولة

الموضوع 1 (دورة جوان 2012)

التمرين 01:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.



1) لتكن h الدالة المعرفة على المجال $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $h(x) = \sqrt{2x+3}$، و (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. (أنظر الشكل أعلاه).

أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثّل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3. (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء).

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$0 < u_n < 3$.

3) أ) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين 02:

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z \neq 2-3i$).

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب: z_A و z_B حيث: $z_A = 1+i\sqrt{5}$ و $z_B = 1-i\sqrt{5}$.

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z، $(z \neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها Z' حيث :

$z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ النقط E, D, C لواحقها على الترتيب $z_C = -2i$، $z_D = 2-3i$، $z_E = 3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

ب- استنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

تحقق أن E تنتمي إلى (γ).

التمرين 03:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة:

$14x + 16y + 13z - 47 = 0$ والنقط $A(1;-2;5)$،

$B(2;2;-1)$، $C(-1;3;1)$.

1) أ) تحقق أن النقط A, B و C ليست في استقامية.

ب) بيّن أن المستوي (ABC) هو (P).

2) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

3) أ- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$.

ب- تحقق أن النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q).

ج- أحسب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB).

التمرين 04:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي:

$$f(x)=x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$،

$$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}.$$

استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ- بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y=x+5$

هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث

$-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$.

5) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ).

6) أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6Ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

بيّن أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية للمستقيم (AB).

ب- بيّن أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين إحداثيتيها.

7) لتكن g الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ كما يلي:

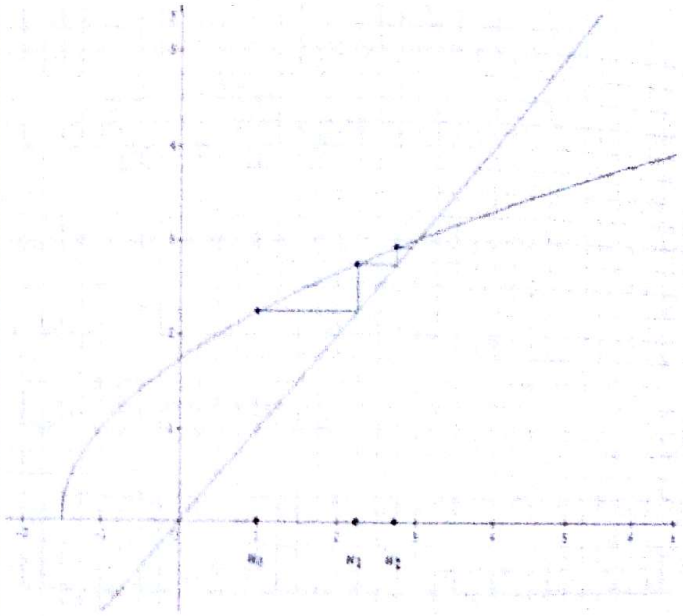
$$g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6xLn\left(\frac{x}{x-1}\right)+6Ln(1-x)$$

بيّن أن g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

حل الموضوع 1 (دورة جوان 2012)

حل التمرين 01:

❶ أ) الرسم:



ب) التخمين: (u_n) متتالية متزايدة ومتقاربة نحو العدد 3.

❷ برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0<u_n<3$:

نسمي $p(n)$ الخاصية " $0<u_n<3$ ".

التحقق أن $p(0)$ صحيحة: لدينا $u_0=1$ ومنه $0<u_0<3$ إذن $p(0)$ صحيحة.

نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي $0<u_n<3$ ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي: $0<u_{n+1}<3$.

البرهان: لدينا: $0<u_n<3$ بالضرب في العدد 2 نجد $0<2u_n<6$

وبإضافة العدد 3 نجد $3<2u_n+3<9$ ومنه $0<\sqrt{2u_n+3}<\sqrt{9}$

أي : $0<u_{n+1}<3$ إذن: $p(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n.

وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي : n $0<u_n<3$.

❸ أ) دراسة اتجاه تغيرات المتتالية (u_n):

دراسة إشارة الفرق $(u_{n+1}-u_n)$: لدينا:

$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+3}-u_n$ وعليه:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{2u_n+3}-u_n\times\frac{\sqrt{2u_n+3}+u_n}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$$

ومنه $$u_{n+1}-u_n=\frac{\left(\sqrt{2u_n+3}\right)^2-{u_n}^2}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+3-{u_n}^2}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}=\frac{-{u_n}^2+2u_n+3}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$$

تحليل $-{u_n}^2+2u_n+3$: بما أن $a+c=b$ فان حلا المعادلة $-{u_n}^2+2u_n+3=0$ هما (-1) و 3 وعليه:

$$-{u_n}^2+2u_n+3=-(u_n+1)(u_n-3)$$

أي : $$-{u_n}^2+2u_n+3=(u_n+1)(3-u_n)$$

و بالتالي: $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n+1)(3-u_n)}{\sqrt{2u_n+3}+u_n}$ وعليه إشارة الفرق $(u_{n+1}-u_n)$ من إشارة البسط لأن المقام دوما موجب.

وبما أن $(u_n+1)>0$ فإن إشارة الفرق $(u_{n+1}-u_n)$ من إشارة $(3-u_n)$.

من جهة أخرى لدينا $u_n<3$ و عليه $-u_n>-3$ و بالتالي $(3-u_n)>0$

إذن $(u_{n+1}-u_n)>0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ب) استنتاج أن المتتالية متقاربة: بما أن (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بـ 3 فإن المتتالية (u_n) متقاربة.

حساب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$: بما أن (u_n) متتالية متقاربة فإن نهايتها موجودة و منتهية و لتكن العدد ℓ.

بوضع: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$

و عليه: $\ell=\sqrt{2\ell+3}$

بالتربيع نجد: $\begin{cases}\ell\geq 0\\ \ell^2=2\ell+3\end{cases}$ أي: $\begin{cases}\ell\geq 0\\ \ell^2-2\ell+3=0\end{cases}$

و بحل المعادلة نجد: $\begin{cases}\ell\geq 0\\ \ell=3\ ;\ \ell=-1\end{cases}$ و بالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$.

حل التمرين 02:

❶ نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z\neq 2-3i$)

$z=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ تعني أن: $z(z-2+3i)=3i(z+2i)$

أي: $z^2-2z+3iz=3iz-6$ أي: $z^2-2z+6=0$

و بالتالي: $\Delta=(-2)^2-4(1)(6)=-20$

أي: $\Delta=\left(2\sqrt{5}i\right)^2$ و بالتالي المعادلة تقبل حلين هما:

$$\begin{cases}z_1=\dfrac{2-2\sqrt{5}i}{2}=1-\sqrt{5}i\\ z_2=\dfrac{2+2\sqrt{5}i}{2}=1+\sqrt{5}i\end{cases}$$

❷ التحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها: لدينا:

$$|z_A|=|1+i\sqrt{5}|=\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{6}$$

ومنه: $OA=\sqrt{6}$.

و: $|z_B|=|1-i\sqrt{5}|=\sqrt{(1)^2+\left(-\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{6}$

ومنه: $OB=\sqrt{6}$.

وعليه: $OA=OB$ وبالتالي النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

❸ أ- التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM:

لدينا $z'=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ و بتطبيق خواص الطويلة:

$|z'|=\dfrac{|3i(z+2i)|}{|z-2+3i|}$ أي: $|z'|=\left|\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}\right|$

ومنه: $|z'|=\dfrac{|3i||(z+2i)|}{|z-2+3i|}$

لدينا: $|3i|=3$ و $|z+2i|=|z-(-2i)|=|z-z_C|=CM$

و $|z-2+3i|=|z-(2-3i)|=DM$

أي: $OM'=3.\dfrac{CM}{DM}$.

ب- استنتاج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

بما أن (Δ) محور القطعة $[CD]$ و M نقطة من (Δ) فإن: $CM=DM$. من جهة أخرى لدينا: $OM'=3.\dfrac{CM}{DM}$

و عليه: $OM'=3$ و بالتالي نستنتج أن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها O ونصف قطرها $r=3$.

التحقق أن E تنتمي إلى (γ):

حساب الطول: $OE=|z_E|=|3i|=3$ و عليه $OE=r$

وبالتالي النقطة E تنتمي إلى (γ).

حل التمرين 03:

❶ أ) التحقق أن النقط A,B و C ليست في استقامية:

لدينا: $\overrightarrow{AB}(1;4;-6)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;5;-4)$.

بما أن $\overrightarrow{AB}\neq\lambda\overrightarrow{AC}$ فإن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا و بالتالي النقط A,B و C ليست في استقامية

ب) إثبات أن المستوي (ABC) هو (P):

لدينا: $14(1)+16(-2)+13(5)-47=14-32+65-47=0$

وعليه النقطة A تنتمي إلى المستوي (P).

من جهة أخرى:

$14(2)+16(2)+13(-1)-47=28+32-13-47=0$

وعليه النقطة B تنتمي إلى المستوي (P).

كذلك:

$14(-1)+16(3)+13(1)-47=-14+48+13-47=0$

وعليه النقطة C تنتمي إلى المستوي (P). ومنه المستوي (ABC) هو (P).

❷ إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB):

نعتبر النقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (AB) ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) هو $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$

وعليه التمثيل الوسيطي هو: $(\lambda\in\mathbb{R})$ $\begin{cases}x=\lambda+1\\y=4\lambda-2\\z=-6\lambda+5\end{cases}$.

❸ أ- كتابة المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$:

المستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$ شعاعه الناظمي هو $\overrightarrow{AB}(1;4;-6)$ والذي يشمل النقطة I منتصف القطعة $[AB]$. لدينا: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

أي: $I\left(\frac{3}{2};0;2\right)$. نعتبر النقطة $M(x;y;z)$ من المستوي المحوري (Q) وبالتالي المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[AB]$ هي $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

أي: $1\left(x-\frac{3}{2}\right)+4(y-0)-6(z-2)=0$

ومنه: $x-\frac{3}{2}+4y-6z+12=0$

وبالتالي: $x+4y-6z+\frac{21}{2}=0$

أي: $2x+8y-12z+21=0$.

ب- التحقق أن النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q):

لدينا: $2x_D+8y_D-12z_D+21=0$

يعني: $2(-1)+8(-2)-12\left(\frac{1}{4}\right)+21=0$

أي: $-2-16-3+21=0$ ومنه: $0=0$

و بالتالي النقطة $D\left(-1;-2;\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q).

ج- حساب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB):

المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB) هي الطول ID وعليه:

$$d((\Delta);D)=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2+(0+2)^2+\left(2-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$d((\Delta);D)=\sqrt{\frac{25}{4}+4+\frac{49}{16}}=\sqrt{\frac{100+64+49}{16}}$$

$$d((\Delta);D)=\frac{\sqrt{213}}{4}$$

حل التمرين 04:

❶ أ- حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$، ثم التفسير النتيجة هندسيا:

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\left[x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$$

(لأن: $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$)

ومنه المستقيم الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب عمودي.

ب- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

بما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+5)=-\infty$)

فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]=-\infty$

❷ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ،

$$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و دالتها المشتقة:

$$f'(x)=1+6.\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\frac{x}{x-1}}=1+6.\frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$

$$f'(x)=1+6.\frac{-1}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x}=1+6.\frac{-1}{x(x-1)}=\frac{x(x-1)-6}{x(x-1)}$$

أي : $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

استنتاج اتجاه تغيرات الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة المشتقة من إشارة البسط x^2-x-6 لأنه من أجل كل عدد حقيقي x

من : $]-\infty;0[$ $x(x-1)>0$.

لدينا : $x^2-x-6=0$ ومنه $x=-2$

وهو مقبول أو $x=3$ وهو مرفوض.

وبالتالي: f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و f متناقصة تماما على المجال $[-2;0[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3+6Ln\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$

❸ أ- إثبات أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل:

المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل يعني أن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+5)]=0$.

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+5)]=\lim_{x\to-\infty}6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=Ln1=0$$

ومنه: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):

دراسة إشارة الفرق $[f(x)-(x+5)]$:

لدينا : $f(x)-(x+5)=6Ln\frac{x}{x-1}$.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0[$ يكون لدينا $x>x-1$. ومنه $\frac{x}{x-1}<1$ لأن $(x-1)$ عدد سالب بالقسمة عليه تتغير المتباينة ومنه: $Ln\frac{x}{x-1}<Ln1$

وبالتالي $f(x)-(x+5)<0$ أي أن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل x من المجال $]-\infty;0[$.

❹ إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$:

لدينا الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $]-\infty;-2]$ و المجال $[-3,5;-3,4[\subset]-\infty;-2]$ فالدالة f مستمرة و رتيبة تماما عليه و $f(-3,5)\approx-0,007$ و $f(-3,4)\approx0,053$

وبالتالي $f(-3,5)\times f(-3,4)<0$

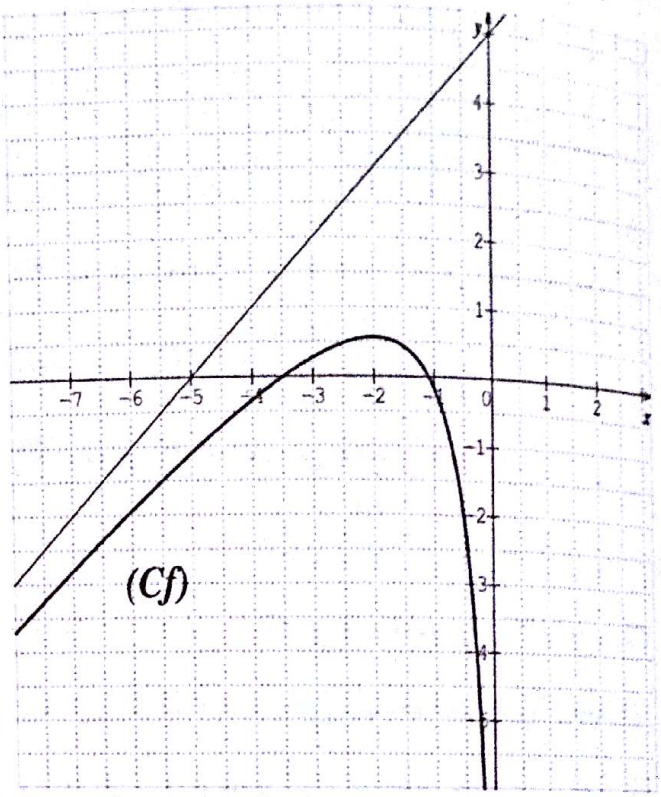
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل α حيث: $-3,5<\alpha<-3,4$.

من جهة أخرى دالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[-2;0[$ والمجال $[-1,1;-1[\subset[-2;0[$ فالدالة f مستمرة و رتيبة تماما عليه. و $f(-1,1)\approx0,02$ و $f(-1)\approx-0,158$

وبالتالي $f(-1,1)\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل β حيث: $-1,1<\beta<-1$.

وعليه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3,5<\alpha<-3,4$ و $-1,1<\beta<-1$.

⑤ إنشاء المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ):



⑥ إثبات أن $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB):

نعتبر النقطة $M(x,y)$ نقطة من المستقيم (AB)

ومنه: $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AM}$. لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

و $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-3-6Ln\frac{3}{4}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AM}$ يعني أن:

$$(x+1)\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(y-3-6Ln\frac{3}{4}\right)(-1)=0$$

$$-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+y-3-6Ln\frac{3}{4}=0$$

$$-\frac{1}{2}x+y-\frac{7}{2}-6Ln\frac{3}{4}=0$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}$$

وبالتالي المعادلة الديكارتية للمستقيم (AB) هي:

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6Ln\frac{3}{4}.$$

ب- إثبات أن المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0: المستقيم (AB) مماس للمنحنى (C_f) يعني أن لهما نفس معامل التوجيه أي $f'(x)=\frac{1}{2}$

$f'(x)=\frac{1}{2}$ تعني أن: $\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$

أي: $2x^2-2x-12=x^2-x$

وبالتالي: $x^2-x-12=0$ بحل المعادلة $x^2-x-12=0$ نجد $x=-3$ مقبول أو $x=4$ هو مرفوض وبالتالي المستقيم (AB) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $M_0\left(-3;2+6Ln\frac{3}{4}\right)$ لأن $f(-3)=2+6Ln\frac{3}{4}$.

⑦ g دالة معرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6xLn\left(\frac{x}{x-1}\right)+6Ln(1-x)$$

g دالة أصلية للدالة f يعني أنه من أجل كل x من $]-\infty;0[$: $g'(x)=f(x)$.

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ و:

$$g'(x)=x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6x\times\frac{-1}{(x-1)x}+6\frac{-1}{1-x}$$

$$g'(x)=x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{-6}{(x-1)}+\frac{-6}{1-x}$$

$$g'(x)=x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{-6}{(x-1)}+\frac{6}{x-1}$$

$$g'(x)=x+5+6Ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=f(x)$$

ومنه g دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

الموضوع 2 (دورة جوان 2012)

التمرين 01:

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0=\frac{13}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$.

1) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n :

$3<u_n<4$.

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^{\,2}+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$.

استنتج أن (u_n) متزايدة تماما.

3) برّر لماذا (u_n) متقاربة.

4) (v_n) المتتالية المعرفة على N بـ: $v_n=In(u_n-3)$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$، ثم أحسب حدّها الأول.

ب) أكتب كلاّ من v_n و u_n بدلالة n، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$P_n=(u_0-3)(u_1-3)(u_2-3)\times.....\times(u_n-3)$

أكتب P_n بدلالة n ، ثم بيّن أن $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=\frac{1}{16}$.

التمرين 02:

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(-1;0;1)$ ، $B(2;1;0)$ ، $C(1;-1;0)$.

1) بين أن النقط B,A و C تعين مستويا.

2) بيّن أن $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) D و H نقطتان من الفضاء حيث:

$D(2;-1;3)$ و $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$

أ- بين أن النقطة D تنتمي إلى المستوي (ABC).

ب- بين أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC).

ج- استنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان، ثم جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما.

التمرين 03:

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث:

$P(z)=z^3-12z^2+48z-72$.

أ) تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب) جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب : z $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$.

ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، C,B,A نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب:

$z_A=6, z_B=3+i\sqrt{3}, z_C=3-i\sqrt{3}$.

أ) أكتب كلا من z_C,z_B,z_A على الشكل الأسي.

ب) أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3 ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) جد الكتابة المركبة للتشابه S.

ب) عيّن z_A لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S.

ج) بيّن أن النقط A', B, A في استقامية.

التمرين 04:

I) لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 - xe^x$.

1 أحسب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

2 ادرس اتجاه تغيّر الدالة g، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3 أ- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- تحقق أن $0,5 < \alpha < 0,6$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

2 لتكن f' مشتقة الدالة f، بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 2]$ فإن: $f'(x) = -g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3 بيّن أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

4 أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5 أ- بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1,6 < x_1 < -1,5$ و $1,5 < x_2 < 1,6$.

ب- أنشئ (Δ) و (C_f).

6 لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$h(x) = (ax + b)e^x$.

أ- عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$.

ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

حل الموضوع 2 (دورة جوان 2012)

حل التمرين 01:

(u_n) متتالية معرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{13}{4} \\ u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3} \end{cases}$$

❶ برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي فإن $3 < u_n < 4$:

نسمي $p(n)$ هذه الخاصية ونتحقق أن $p(0)$ صحيحة.

لدينا: $u_0 = \dfrac{13}{4}$ ومنه $3 < u_0 < 4$ إذن $p(0)$ صحيحة.

نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

أي $3 < u_n < 4$ ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة من أجل

كل عدد طبيعي n أي $3 < u_{n+1} < 4$

البرهان: لدينا $3 < u_n < 4$ بإضافة العدد (-3)

نجد $0 < u_n - 3 < 1$

باستعمال الجذر التربيعي نجد $0 < \sqrt{u_n - 3} < 1$ وبإضافة

العدد 3 نجد: $3 < 3 + \sqrt{u_n - 3} < 4$ وبالتالي $3 < u_{n+1} < 4$

إذن $p(n+1)$

صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ومنه حسب مبدأ

الإستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n

أي: $3 < u_n < 4$.

❷ دراسة اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$$

لدينا: $u_{n+1} - u_n = 3 + \sqrt{2u_n + 3} - u_n$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 3} + 3 - u_n \times \dfrac{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(\sqrt{u_n - 3}\right)^2 - (3 - u_n)^2}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 3 - \left(u_n^2 - 6u_n + 9\right)}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$$

$$= \frac{u_n - 3 - u_n^2 + 6u_n - 9}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n)}$$

دراسة إشارة الفرق $(u_{n+1} - u_n)$:

إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ من إشارة $-u_n^2 + 7u_n - 12$

لأن $\sqrt{u_n - 3} - (3 - u_n) > 0$

و بما أن $-u_n^2 + 7u_n - 12 = (4 - u_n)(u_n - 3)$ فان

إشارة $-u_n^2 + 7u_n - 12$ من إشارة $(4 - u_n)$

لأن $u_n - 3 > 0$.

من جهة أخرى لدينا $u_n < 4$ ومنه $-u_n > -4$

وبالتالي $-u_n + 4 > 0$

وعليه نستنتج أن $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية (u_n)

متزايدة تماما.

❸ استنتاج أن المتتالية متقاربة: بما أن (u_n) متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 فإن المتتالية (u_n) متقاربة.

❹ (v_n) متتالية معرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = Ln(u_n - 3)$.

أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها: $\frac{1}{2}$ (v_n) متتالية هندسية يعني أنه يوجد عدد حقيقي q يحقق: $v_{n+1} = q \times v_n$

لدينا: $v_n = Ln(u_n - 3)$ وعليه:

$$v_{n+1} = Ln(u_{n+1} - 3) = Ln\left(3 + \sqrt{u_n - 3} - 3\right)$$

$$v_{n+1} = Ln\left(\sqrt{u_n - 3}\right) = Ln(u_n - 3)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} Ln(u_n - 3)$$

ومنه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول v_0 حيث: $v_0 = Ln(u_0 - 3) = Ln\left(\frac{13}{4} - 3\right) = Ln\left(\frac{1}{4}\right)$

ب) كتابة كلاّ من v_n و u_n بدلالة n:

لدينا: $v_n = v_0 \times q^n$ ومنه: $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n Ln\frac{1}{4}$

من جهة أخرى لدينا: $v_n = Ln(u_n - 3)$ ومنه $e^{v_n} = u_n - 3$

ومنه: $v_n = e^{v_n} + 3$ وبالتالي: $u_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n Ln\frac{1}{4}} + 3$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n Ln\frac{1}{4}} + 3\right)$$

حساب: $\lim_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \left(e^{0 Ln\frac{1}{4}} + 3\right) = e^0 + 3 = 4$$

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \ldots\ldots \times (u_n - 3)$$

كتابة P_n بدلالة n: لدينا $e^{v_n} = u_n - 3$

ومنه $e^{v_0} = u_0 - 3$ ، $e^{v_1} = u_1 - 3$ و $e^{v_2} = u_2 - 3$

ومنه: $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \ldots\ldots \times (u_n - 3)$

$$P_n = \left(e^{v_0}\right)\left(e^{v_1}\right)\left(e^{v_2}\right) \times \ldots\ldots\ldots \times \left(e^{v_n}\right)$$

$$P_n = e^{v_0 + v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n} = e^{v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

ومنه:

$$p_n = e^{Ln\frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}} = e^{Ln\frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}}$$

$$p_n = e^{2Ln\frac{1}{4} \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$$

حساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty}\left(e^{2Ln\frac{1}{4} \times \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}\right) \lim_{n\to+\infty} P_n$$

ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = \left(e^{2Ln\frac{1}{4} \times (1-0)}\right) = e^{2Ln\frac{1}{4}}$

$$= \left(e^{Ln\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

حل التمرين 02:

❶ إثبات أن النقط A, B و C تعين مستويا:

لدينا $\overrightarrow{AB}(3;1;-1)$ و $\overrightarrow{AC}(2;-1;-1)$ نلاحظ أن $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$ إذن لا توجد قيمة k بحيث يكون $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

وبالتالي النقط A, B, C تشكل مستوى.

❷ إثبات أن $2x - y + 5z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC):

$2(-1) - (0) + 5(1) - 3 = 0 = 0$ يعني $2x_A - y_A + 5z_A - 3 = 0$

أي $A \in (ABC)$ ومنه النقطة A تنتمي إلى المستوى (ABC)

$2x_B - y_B + 5z_B - 3 = 0$

يعني $2(2)-(1)+5(0)-3=0$ أي $B \in (ABC)$

ومنه النقطة B تنتمي إلى المستوى (ABC).

$2x_C - y_C + 5z_C - 3 = 0$

يعني $2(1)-(-1)+5(0)-3=0$ أي $C \in (ABC)$

ومنه النقطة C تنتمي إلى المستوى (ABC).

ومنه المستوي (ABC) هو المستوي $2x - y + 5z - 3 = 0$.

❸ نعتبر $D(2;-1;3)$ والنقطة $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$

أ- إثبات أن النقطة $D(2;-1;3)$ لا تنتمي إلى المستوي :

$2x_D - y_D + 5z_D - 3 \neq 0$ (ABC)

لدينا: $2(2)-(-1)+5(3)-3 \neq 0$

$20-3 \neq 0$

$17 \neq 0$

أي: $D \notin (ABC)$ ومنه النقطة D لا تنتمي إلى المستوى (ABC).

ب- إثبات أن النقطة $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة $D(2;-1;3)$ على المستوى: (ABC)

H هي المسقط العمودي

للنقطة D على المستوى (ABC) يعني أن $H \in (ABC)$

و $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{kn_{(ABC)}}$

نتحقق أن النقطة $H\left(\frac{13}{15};-\frac{13}{30};\frac{1}{6}\right)$ تنتمي إلى المستوى (ABC) أي $2x_H - y_H + 5z_H - 3 = 0$

لدينا: $2\left(\frac{13}{15}\right)-\left(-\frac{13}{30}\right)+5\left(\frac{1}{6}\right)-3=\frac{26}{15}+\frac{13}{30}+\frac{5}{6}-3$

أي: $\frac{52+13+25-90}{30}=\frac{90-90}{30}=0$

أي أن $H \in (ABC)$ ومنه النقطة H تنتمي إلى المستوى (ABC).

ومن جهة أخرى لدينا $\overrightarrow{DH}\left(-\frac{17}{15};-\frac{17}{30};-\frac{17}{6}\right)$

بما أن $\overrightarrow{DH} = -\frac{30}{17}\overrightarrow{n_{(ABC)}}$ فان $\overrightarrow{DH}$ و $\overrightarrow{n_{(ABC)}}$ مرتبطان خطيا وبالتالي H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوى (ABC) .

ج- استنتاج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان.

ثم إيجاد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما: بما أن $\overrightarrow{DH}$ عمودي على المستوى (ABC) نستنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان.

تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم تقاطعهما: مما سبق نستنتج أن المستويين (ADH) و (ABC) يشتركان في نقطتين هما H و النقطة A ومنه المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان ومتقاطعان وفق المستقيم (AH).

تعين التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH): نعتبر النقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (AH) ومنه التمثيل الوسيط للمستقيم (AH) هو $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH}t$

لدينا $\overrightarrow{AH}\left(\frac{28}{15};-\frac{13}{30};-\frac{5}{6}\right)$ و $\overrightarrow{AM}(x+1;y;z-1)$

و بالتالي: $t \in \mathbb{R}$ $(AH): \begin{cases} x+1=\frac{28}{15}t \\ y=-\frac{13}{30}t \\ z-1=-\frac{5}{6}t \end{cases}$

وبالتالي: $t \in \mathbb{R}$ $(AH): \begin{cases} x=\frac{28}{15}t-1 \\ y=-\frac{13}{30}t \\ z=-\frac{5}{6}t+1 \end{cases}$

حل التمرين 03:

1 نعتبر كثير الحدود $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$.

أ) التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$:

لدينا: $P(6)=6^3-12\times6^2+48\times6-72$

$P(6)=0$

ب) تعيين العددين α و β بحيث :

$P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$

لدينا: $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$

أي: $P(z)=z^3+(\alpha-6)z^2+(\beta-6\alpha)z-6\beta$

بالمطابقة مع $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$

نجد: $\begin{cases}\alpha-6=-12\\ \beta-6\alpha=48\\ -6\beta=-72\end{cases}$

أي: $\begin{cases}\alpha=-6\\ \beta=12\end{cases}$ وعليه: $P(z)=(z-6)(z^2-6z+12)$

ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ تعني أن $(z-6)(z^2-6z+12)=0$

أي: $\begin{cases}z-6=0\\ z^2-6z+12=0\end{cases}$

أولا: $z-6=0$ ومنه $z=6$.

ثانيا: $z^2-6z+12=0$ ومنه نحسب المميز فنجد

$\Delta=-12$ أي $\Delta=\left(2\sqrt{3}i\right)^2$

إذن حلا المعادلة هما أي: $\begin{cases}z_1=\dfrac{6-2\sqrt{3}i}{2}\\ z_2=\dfrac{6+2\sqrt{3}i}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}z_1=3-\sqrt{3}i\\ z_2=3+\sqrt{3}i\end{cases}$.

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي :

$S=\{6;3-\sqrt{3}i;3+\sqrt{3}i\}$.

2 أ) كتابة كلا من z_A، z_B، z_C على الشكل الأسي:

$z_C=3-i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}i}$

$z_B=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{6}i}$

$z_A=6=6e^0$

ب) كتابة العدد $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري و الأسي:

$\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\dfrac{6-3-i\sqrt{3}}{6-3+i\sqrt{3}}$

ومنه $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\times\dfrac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}=\dfrac{9-i6\sqrt{3}+\left(i\sqrt{3}\right)^2}{3^2+\sqrt{3}^2}$

لدينا: $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\dfrac{9+2\sqrt{3}i-3}{9+3}=\dfrac{6-6\sqrt{3}i}{12}$

أي: $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\dfrac{6\left(1-\sqrt{3}i\right)}{12}=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

وبالتالي: $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

الشكل الأسي للعدد $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$:

لدينا: $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=e^{-\frac{\pi}{3}i}$.

ج) استنتاج طبيعة المثلث ABC:

لدينا: $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=e^{-\frac{\pi}{3}i}$

ومنه: $\begin{cases}\dfrac{BA}{CA}=1\\ \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$

و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع.

❸ ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) إيجاد الكتابة المركبة للتشابه S:

العبارة المركبة للتشابه هي: $z'-z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_C)$

$$z'-z_C=\sqrt{3}i(z-z_C)$$
$$z'=\sqrt{3}iz-\sqrt{3}iz_C+z_C$$
$$z'=\sqrt{3}iz-\sqrt{3}i\left(3-i\sqrt{3}\right)+3-i\sqrt{3}$$
$$z'=\sqrt{3}iz-3\sqrt{3}i-3+3-i\sqrt{3}$$
$$z'=\sqrt{3}iz-4\sqrt{3}i$$

ومنه العبارة المركبة للتشابه هي: $z'=\sqrt{3}iz-4\sqrt{3}i$.

ب) تعيين z_A لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S:

A' صورة النقطة A بالتشابه S يعني أن:

$$z_{A'}=\sqrt{3}iz_A-4\sqrt{3}i$$
$$z_{A'}=6\sqrt{3}i-4\sqrt{3}i$$
$$z_{A'}=2\sqrt{3}i$$

ج) إثبات أن النقط A',B,A في استقامية:

النقط A',B,A على استقامة واحدة يعني أن

$$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_{A'}}\in R$$

لدينا: $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_{A'}}=\frac{6-3-\sqrt{3}i}{6-2\sqrt{3}i}$

أي: $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_{A'}}=\frac{3-\sqrt{3}i}{6-2\sqrt{3}i}=\frac{\left(3-\sqrt{3}i\right)}{2\left(3-\sqrt{3}i\right)}=\frac{1}{2}$

و بالتالي النقط A',B,A على استقامة واحدة.

حل التمرين 04:

I) لتكن g الدالة المعرفة على R كما يلي: $g(x)=1-xe^x$.

❶ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-xe^x\right)$$
$$=-\infty \quad \lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-xe^x\right)=1$$

❷ دراسة اتجاه تغيرات الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها:

g دالة قابلة للاشتقاق على R ودالتها المشتقة هي g' حيث:

$$g'(x)=-e^x-xe^x$$
$$g'(x)=(-1-x)e^x$$

إشارة المشتقة من إشارة $-1-x$ لأنه من اجل كل عدد حقيقي: $e^x>0$.

لدينا $-1-x=0$ ومنه: $x=-1$ وعليه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	↗	$1-\frac{1}{e}$	↘	$-\infty$

❸ أ- إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$:

من جدول تغيرات الدالة نلاحظ أن g متناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right]$ و العدد صفر ينتمي إلى $\left]-\infty;1-\frac{1}{e}\right]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- التحقق أن $0,5<\alpha<0,6$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على R:

لدينا: $g(0,6)=-0,09$ و $g(0,5)=0,18$

و بما أن $g(0,5)\times g(0,6)<0$ إذن $0,5<\alpha<0,6$.

إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) ❶ حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x - x - 1 = +\infty$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x = 0$

❷ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$

فإن $f'(x) = -g(x)$:

f دالة قابلة للاشتقاق على $]-\infty;2]$ ودالتها المشتقة هي f'

حيث: $f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 1 = (1+x-1)e^x - 1$

$f'(x) = xe^x - 1 = -(-xe^x + 1)$

$f'(x) = -g(x)$

استنتاج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ وتشكيل جدول تغيرات الدالة f:

إشارة المشتقة هي عكس إشارة $g(x)$ وعليه:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
إشارة f'		$-$	0	$+$	

ومنه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$.

و f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;2]$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	e^2-3

❸ إثبات أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$:

لدينا $f(\alpha) = (\alpha-1)e^\alpha - \alpha - 1$.

من جهة أخرى لدينا $g(\alpha) = 0$ أي: $1 - \alpha e^\alpha = 0$

وبالتالي: $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$

وعليه: $f(\alpha) = (\alpha-1)\frac{1}{\alpha} - \alpha - 1$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{\alpha - 1 - \alpha^2 - \alpha}{\alpha}$$

بالتعويض نجد: $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2-1}{\alpha} = -\frac{\alpha^2+1}{\alpha}$

$$f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}):

لدينا $0,5 < \alpha < 0,6$ ومنه $\frac{1}{0,6} < \alpha < \frac{1}{0,5}$ .....(1)

ومن جهة أخرى $0,25 < \alpha^2 < 0,36$

أي $1,25 < \alpha^2 + 1 < 1,36$

أي: $-1,36 < -(\alpha^2+1) < -1,25$

ومنه: $-\frac{1,36}{0,5} < -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right) < -\frac{1,25}{0,6}$

إذن: $-2,72 < f(\alpha) < -2,08$.

❹ أ- إثبات أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا: $f(x) - (-x-1) = (x-1)e^x$

إذن: $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (-x-1)] = \lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x = 0$

ومنه: $(\Delta): y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

دراسة إشارة الفرق $[f(x) - (-x-1)]$:

لدينا: $f(x)-(-x-1)=(x-1)e^x$ إشارة الفرق من إشارة $(x-1)$ على المجال $]-\infty;1[$ يكون لدينا $f(x)-(-x-1)<0$ و بالتالي المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) وعلى المجال $]1;2[$ يكون لدينا $f(x)-(-x-1)>0$ وبالتالي المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ).

المنحنى (C_f) يقطع المستقيم (Δ) في النقطة $M(1;-2)$.

❻ أ- إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث: $-1,6<x_1<-1,5$ و $1,5<x_2<1,6$:

لدينا $f(-1,6)=0,08$ و $f(-1,5)=-0,06$

f متناقصة تماما على المجال $[-1,6;-1,5]$

و $f(-1,5)\times f(-1,6)<0$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_1 حيث $-1,6<x_1<-1,5$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

* لدينا $f(1,6)=0,37$ و $f(1,5)=-0,26$

f متناقصة تماما على المجال $[1,5;1,6]$

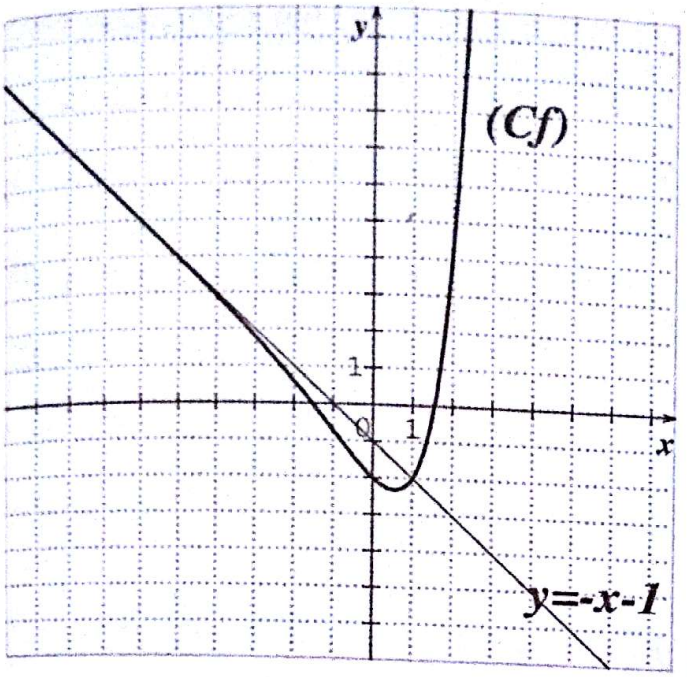
و $f(1,5)\times f(1,6)<0$

إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_2 حيث $1,5<x_2<1,6$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة ومنه نستنتج أن المنحنى (C_f)

يقطع محور الفواصل في نقطتين هما :

$M_1(x_1;0)$ و $M_2(x_2;0)$.

ب- إنشاء (Δ) و (C_f):



❻ لتكن h الدالة المعرفة على R كما يلي:

$h(x)=(ax+b)e^x$.

أ- h دالة معرفة على المجال R كما يلي $x\mapsto xe^x$.

تعيين العددين الحقيقيين a و b:

h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ على R يعني أن :

$h'(x)=xe^x$

لدينا:

$h'(x)=ae^x+(ax+b)e^x$

$h'(x)=(ax+a+b)e^x$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\a+b=0\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$

وبالتالي عبارة الدالة h هي: $h(x)=(x-1)e^x$.

ب- استنتاج دالة أصلية للدالة g على R:

بما أن h دالة أصلية للدالة $x\mapsto xe^x$ فإن الدالة الأصلية للدالة g هي الدالة $x\mapsto x-(x-1)e^x+c$ على R.

الموضوع 1(دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01 :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $U_0 = 1$

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$

(v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + 4$

1) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2) أكتب كلا من (u_n) و (v_n) بدلالة n.

3) أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) على IN .

4) أحسب بدلالة المجموع S_n حيث :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على IN كما يلي :

$$w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$$

أ- بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على IN .

ب- أحسب : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - w_n)$

التمرين 02 :

الفضاء منسوب إلى معلم نتعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط:

$$A(2;-1;1) \quad B(-1;2;1) \quad C(1;-1;2) \quad D(1;1;1)$$

1) أ- تحقق أن النقط A، B، C تعين مستويا.

ب) بين أن $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) لتكن النقطة مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;2);(C;-1)\}$

أ) أحسب إحداثيات G.

ب) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\right\| = 2\left\|\vec{MD}\right\|$$

بين أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

ج) أثبت أن معادلة (Γ) هي : $6x - 4y + 2z + 3 = 0$

3) بين أن المستويين (ABC) و(Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

التمرين 03 :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :

$$z^2 - 6\sqrt{2}\,z + 36 = 0$$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقط A، B، C، D التي لاحقاتها على الترتيب :

$z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ و $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$

أ - أكتب z_A وz_A وz_A.$(i+1)$ على الشكل الآسي.

ب) أحسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

ج) بين أن النقط O، A، B، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D يطلب تعيين نصف قطرها.

د) أحسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $\left(\vec{CA};\vec{CB}\right)$.

ما هي طبيعة الرباعي $OACB$؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) أكتب العبارة المركبة للدوران R.

ب) عين لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط $C'AC$ في إستقامية.

ج) عين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R ثم حدد صورة الرباعي $OA'CB$ بالدوران R

التمرين 04 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ - أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، فسر النتيجتين هندسيا.

ب) أدرس اتجاه تغيرات الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ - أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=1$

ب) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى في النقطة ذات الفاصلة 1.

ج) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α حيث $e^{-0.4}<\alpha<e^{-0.3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f).

4) لتكن الدالة h المعرفة على $R-\{0\}$ كما يلي :

$$h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$ ماذا تستنتج ؟

ب) أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

ج) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

حل الموضوع 1(دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01 :

1) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

(v_n) متتالية هندسية إذا تحقق ما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $v_{n+1}=v_n.q$

حيث q عدد حقيقي ثابت.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}+4=\frac{2}{3}u_n+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{2}{3}(u_n+4)=\frac{2}{3}v_n$$

ومنه v_n متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول :

$$v_0=u_0+4=5$$

2) كتابة كلا من u_n و v_n بدلالة n :

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=v_0.q^n=5.\left(\frac{2}{3}\right)^n$

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n+4$

ومنه : $u_n=v_n-4=5\left(\frac{2}{3}\right)^n-4$

3) دراسة اتجاه تغيرات (u_n) على $\mathbb{N}$:

من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n-\frac{4}{3}-u_n=-\frac{1}{3}u_n-\frac{4}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}.5\left(\frac{2}{3}\right)^n-4-\frac{4}{3}=-\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{16}{3}<0$$

وعليه فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

4) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n=u_0+u_1+....+u_n$$

$$=(v_0-4)+(v_1-4)+.....+(v_n-4)$$

$$=(v_0+v_1+.....+v_n)+(-4-4..-.....-4)$$

$$=v_0.\frac{1-q^{n+1}}{1-q}-4(n+1)=5.\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}-4n-4$$

$$=15\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)-4n-4=11-4n-15\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ج) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستوي (ABC) فإن: $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

$G(x;y;z)$; $\overrightarrow{AM}(x-2;y+1;z-1)$

$$x=\frac{1\times(2)+2\times(-1)-1\times(1)}{1+2-1}=-\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{1\times(-1)+2\times(2)-1\times(-1)}{1+2-1}=2$$

$$z=\frac{1\times(1)+2\times(1)-1\times(2)}{1+2-1}=\frac{1}{2}$$

ومنه : $G\left(\frac{-1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$

ب – (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\left\|\vec{MA}+2\vec{MB}-\vec{MC}\right\|=2\left\|\vec{MD}\right\|$$

إثبات أن (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$:

لدينا : $\left\|\vec{MA}+2\vec{MB}-\vec{MC}\right\|=2\left\|\vec{MD}\right\|$

ومنه: $\left\|\vec{MG}+\vec{GA}+2\vec{MG}+2\vec{GB}-\vec{MG}-\vec{GC}\right\|=2\left\|\vec{MD}\right\|$

G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;2);(C;-1)\}$

أي : $\vec{GA}+2\vec{GB}-\vec{GC}=0$

ومنه : $\left\|\vec{MG}+2\vec{MG}-\vec{MG}\right\|=2\left\|\vec{MD}\right\|$

$\left\|2\vec{MG}\right\|=2\left\|\vec{MD}\right\|$

ومنه : $\left\|\vec{MG}\right\|=\left\|\vec{MD}\right\|$ $MG=MD$

ومنه : (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$:

جـ – إثبات أن معادلة (Γ) هي: $6x-4y+2z+3=0$

$\vec{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (Γ).

و النقطة $\omega\left(\frac{1}{4};\frac{3}{2};\frac{3}{4}\right)$ منتصف القطعة المستقيمة $[GD]$.

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستوي فإن : $\vec{GD}.\overrightarrow{\omega M}=0$

$\vec{GD}\left(\frac{3}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ و $\overrightarrow{\omega M}\left(x-\frac{1}{4};y-\frac{3}{2};z-\frac{3}{4}\right)$

د) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$w_n=5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$$

أ- إثبات أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$w_{n+1}-w_n=5\left(\frac{1}{v_{n+1}+5}-1\right)-5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)$$

$$=\frac{5}{v_{n+1}+5}-\frac{5}{v_n+5}=5\left(\frac{1}{\frac{2}{3}v_n+5}-\frac{1}{v_n+5}\right)$$

$$=5\left(\frac{3}{2v_n+15}-\frac{1}{v_n+5}\right)=5\left(\frac{v_n}{(2v_n+15)(v_n+5)}\right)$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=5\left(\frac{2}{3}\right)^n>0$

ومنه : $w_{n+1}-w_n>0$ ومنه فالمتتالية (w_n) متزايدة تماما.

ب) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-w_n)$:

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n-w_n)=\lim_{n\to+\infty}\left(v_n-4-5\left(\frac{1}{v_n+5}-1\right)\right)=0$$

لأن: $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}5.\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

التمرين02 :

لدينا النقط : $A(2;-1;1)$ ، $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ ، $D(1;1;1)$

1) أ – التحقق أن النقط A ، B ، C تعين مستويا :

تعين النقط A ، B ، C مستويا وحيدا إذا كان : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا.

لدينا $\vec{AB}(-3;3;0)$ و $\vec{AC}(-1;0;1)$

$\frac{-1}{-3}\neq\frac{0}{3}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا.

ب) إثبات أن $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=1.(-3)+1.(3)+1.(0)=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=1.(-1)+1.(0)+1.(1)=0$

بما أن $\vec{n}\perp\vec{AB}$ و $\vec{n}\perp\vec{AC}$ فإن $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

$\vec{GD}\cdot\overrightarrow{\omega M}=0$

$\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)-1\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(z-\frac{3}{4}\right)=0$

$\frac{3}{2}x-y+\frac{1}{2}z+\frac{3}{4}=0$

$3x-4y+2z+3=0$

3) إثبات أن المستويين (ABC) و(Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له :

$\begin{cases}3x-4y+2z+3=0\\x+y+z-2=0.....\times(-2)\end{cases}$

ومنه : $\begin{cases}3x-4y+2z+3=0.....(1)\\-2x-2y-2z+4=0.....(2)\end{cases}$

بجمع (1) و(2) نجد : $x-6y+7=0$

$x=6y-7$

بوضع : $y=t$ نحصل على: $x=6t-7$

نعوض x و y في المعادلة : $x+y+z-2=0$

$z=-x-y+2$

نجد: $z=-6t+7-t+2$

$z=-7t+9$

ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو $\begin{cases}x=6t-7\\y=t\\z=-7t+9\end{cases}$

مع : $t\in IR$

التمرين 03 :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة :

$z^2-6\sqrt{2}\,z+36=0$

$\Delta'=b'^2-ac=\left(-3\sqrt{2}\right)^2-1\times36=-18=\left(3\sqrt{2}.i\right)^2$

$z_1=3\sqrt{2}-3\sqrt{2}.i$

$z_2=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}.i$

2) أ - كتابة z_A وz_A و$z_A.(i+1)$ على الشكل الآسي.

$Z_A=3\sqrt{2}(1+i)=6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=6\left(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه : $Z_A=6.e^{i.\frac{\pi}{4}}$

$Z_B=\overline{Z_A}=6.e^{-i\frac{\pi}{4}}$

لدينا : $|1+i|=\sqrt{2}$ و $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

ومنه : $|(1+i)Z_A|=6\sqrt{2}$

و $\arg[(1+i)Z_A]=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

ومنه : $(1+i)Z_A=6\sqrt{2}.e^{i.\frac{\pi}{2}}$

ب - حساب : $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(\frac{6\sqrt{2}.e^{i.\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=e^{i.\frac{\pi}{2}.2014}=e^{i.1007\pi}$

$=\cos(1007\pi)+i.\sin(1007\pi)$

$=\cos\pi+i.\sin\pi=-1$

جـ - إثبات أن النقط O ، A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D يطلب تعيين نصف قطرها.

$OD=|Z_D-Z_O|=\left|\frac{6\sqrt{2}}{2}\right|=3\sqrt{2}$

$AD=|Z_D-Z_A|=\left|\frac{6\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{2}(1+i)\right|=3\sqrt{2}$

$BD=|Z_D-Z_B|=\left|\frac{6\sqrt{2}}{2}-3\sqrt{2}(1-i)\right|=3\sqrt{2}$

$CD=|Z_D-Z_C|=\left|\frac{6\sqrt{2}}{2}-6\sqrt{2}\right|=3\sqrt{2}$

بما أن: $OD=AD=BD=CD=3\sqrt{2}$

فإن النقط O ، A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$

د - حساب : $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$

$\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{3\sqrt{2}(1-i)-6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(1+i)-6\sqrt{2}}$

$=\frac{3\sqrt{2}(1-i-2)}{3\sqrt{2}(1+i-2)}=\frac{-1-i}{-1+i}=\frac{(-1-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{2i}{2}=i$

إيجاد قيسا للزاوية $\left(\vec{CA};\vec{CB}\right)$

$$\arg\left(\frac{Z_B-Z_C}{Z_A-Z_C}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$$

$$\left(\vec{CA};\vec{CB}\right)=\frac{\pi}{2}$$

المثلث ABC قائم في C وتساوي الساقين لأن

$$\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|=\frac{CB}{CA}=|i|=1$$

وبما أن $OD=AD=BD=CD$

فإن النقطة D منتصف $[AB]$ والنقطة D منتصف $[AB]$.

وعليه فإن الرباعي $OACB$ مربع

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - كتابة العبارة المركبة للدوران R :

العبارة المركبة للدوران R تكتب على الشكل : $Z'=aZ+b$

حيث : $|a|=1$ و $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$ ومنه : $a=i$

وبما أن مركزه O فإن : $Z_0=a\,Z_0+b$ ومنه $b=0$

ومنه العبارة المركبة للدوران R : $Z'=i.Z$

ب - تعيين لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالدوران R :

$$Z_{C'}=i.Z_C=6\sqrt{2}.i$$

التحقق أن النقط C، A، C' في إستقامية.

$\vec{AC}\left(3\sqrt{2}\,;-3\sqrt{2}\right)$ ومنه : $\vec{AC}\left(6\sqrt{2}-3\sqrt{2}\,;0-3\sqrt{2}\right)$

$\vec{AC'}\left(-3\sqrt{2}\,;3\sqrt{2}\right)$ ومنه : $\vec{AC'}\left(0-3\sqrt{2}\,;6\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)$

أي : $\vec{AC}=-\vec{AC'}$ وعليه النقط C، A، C' في إستقامية.

جـ - تعيين لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R :

$$Z_{A'}=i.Z_A=i\left[3\sqrt{2}(1+i)\right]=3\sqrt{2}(-1+i)$$

صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R هو الرباعي $OA'C'A$

لأن: $R(O)=O$ و $R(A)=A'$ و $R(C)=C'$ و $R(B)=A$.

التمرين 04 :

$D_f=]0;+\infty[$ و $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

1) أ - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ لأن : $\left[\frac{\ln x}{x}\to 0\right]$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ لأن : $\left[\begin{matrix}\ln x\to-\infty\\ x\to 0^+\end{matrix}\right]$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

ب - دراسة اتجاه تغيرات الدالة f من أجل كل x من : $]0\,;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{2.\frac{1}{x}.x-1.(2\ln x)}{x^2}=\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

إشارة من إشارة البسط لأن المقام موجب تمام.

نضع: $1-\ln x=0$ و $1-\ln x>0$

$\ln x=1$ $\quad$ $\ln x<1$

$x=e$ $\quad$ $x<e$

قيم x	0		e		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0,e]$ متناقصة تماما على المجال $[e\,;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

قيم x	0		e		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	
إشارة $f(x)$	0	↗	$1+\frac{2}{e}$	↘	1

2) أ - دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$: $f(x)-y=\frac{2\ln x}{x}$

قيم x	0		e		$+\infty$
إشارة $2\ln x$		$+$	0	$-$	
إشارة x		$+$		$+$	
إشارة $f(x)-y$		$-$	0	$+$	
وضعية (C_f) بالنسبة (Δ)		تحت	نقطة	فوق	

ب) معادلة المماس (T) للمنحنى في النقطة ذات الفاصلة 1:

$y = f'(1)(x-1)+f(1)$ حيث: $\begin{matrix} f(1)=1 \\ f'(1)=2 \end{matrix}$

ومنه: $y = 2x-1$

جـ - الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]0,1[$

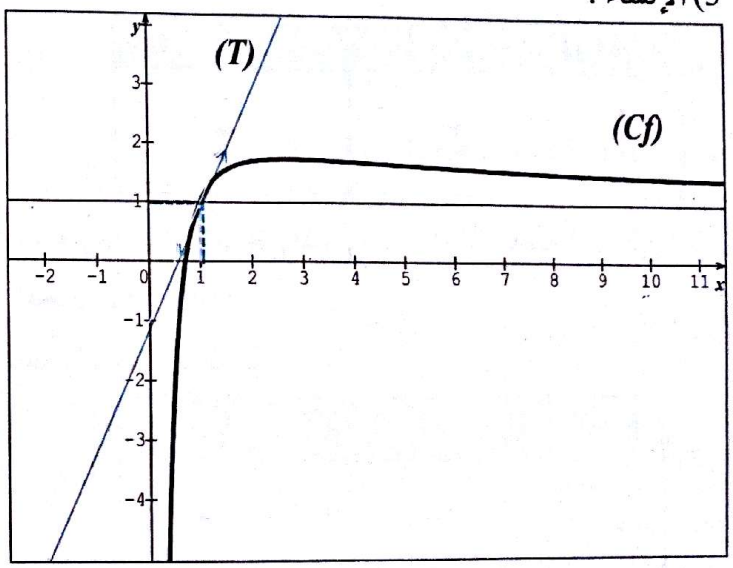
و $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ و $f(1)=1$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\times f(1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0,1[$ حلا وحيدا α وبما أن:

$]0;1] \supset \left[e^{-0.4}, e^{-0.3}\right]$ و $f\left(e^{-0.4}\right) \approx -0.2$ و $f\left(e^{-0.3}\right) \approx 0.2$

أي: $f\left(e^{-0.4}\right)\times f\left(e^{-0.3}\right) < 0$ فإن: $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$

3) الإنشاء:



4) $h(x) = 1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$ و $D_h = R-\{0\}$

أ - إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم:

$h(x) - h(-x) = 0$

$$h(-x)-h(x) = 1+\frac{2\ln|-x|}{|-x|}-1-\frac{2\ln|x|}{|x|}$$

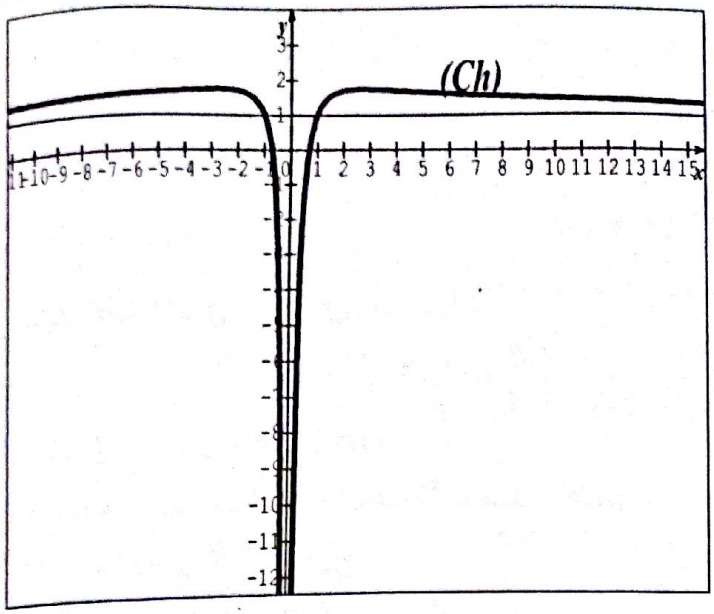
$$= \frac{2\ln|x|}{|x|}-\frac{2\ln|x|}{|x|} = 0$$

ومنه نستنتج أن h دالة زوجية.

ب - لما $x \in]0,+\infty[$ فإن: $h(x) = 1+\dfrac{2\ln x}{x} = f(x)$

وعليه فإن (C_h) ينطبق على (C_f)

وبما أن h دالة زوجية فإن (C_h) يكون متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.



جـ - المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$

لدينا: $\ln x^2 = (m-1)|x|$ ومنه: $\dfrac{\ln x^2}{|x|} = m-1$

ومنه: $\dfrac{2\ln|x|}{|x|}+1 = m$ ومنه: $h(x) = m$

وبالتالي فإن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_h) مع المستقيم الذي معادلته $y = m$

قيم m	$-\infty$	1	$1+\frac{2}{e}$	$+\infty$
	حلين	1 حل	4 حلول	لا يوجد حلول

الموضوع 2(دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01 :

❶ نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$
(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

1) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ماذا تستنتج.

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

❷ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln u_n$
($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري)

1) عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).

2) أ - أحسب بدلالة n العدد P_n حيث :

$$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times ... \times u_n)$$

ب - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$

التمرين 02 :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
نعتبر النقط $A(1;-1;-2)$ ، $B(1;-2;-3)$ و $C(2;0;0)$

1) أ - برهن أن A و B و C ليست في استقامية.

ب - أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC).

ج - تحقق أن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي:
$(P): x - y - 2z + 5 = 0$ و $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$

برهن أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} ; (t \in R)$$

3) عين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q).

4) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء. نسمي $d(M,(P))$ المسافة بين M والمستوي (P) و $d(M,(Q))$ المسافة بين M والمستوي (Q).

عين المجموعة (Γ) للنقط M بحيث :

$$\sqrt{6} \times d(M,(P)) = \sqrt{14} \times d(M,(Q))$$

التمرين 03 :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z حيث : $(z-i)(z^2 - 2z + 5) = 0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول cm)، تعطى النقط A و B و C التي لواحقها : $z_A = i$ ، $z_B = 1 + 2i$ و $z_C = 1 - 2i$ على الترتيب.

أ - أنشئ النقط A و B و C.

ب - جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

جـ - أحسب مساحة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - عين الكتابة المركبة للتشابه S.

ب - بين أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$

4) M نقطة لاحقتها z ؛ عين مجموعة النقط M حيث :

$$|z| = |iz + 1 + 2i|$$

التمرين 04 :

❶ لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR كما يلي :

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

1) أ - أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب - أدرس اتجاه تغير الدالة g على IR ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ - بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث :

$0,7<\alpha<0,8$

ب - استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

❷ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب - استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

ج - أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ).

3) أ - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

حيث f' مشتقة الدالة f.

ب - استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f (نأخذ $f(\alpha)\approx 0,1$)

4) أحسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

6) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x)=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ - تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x)-2$

ب - استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه. ثم أنشئ (C_h).

حل الموضوع 2(دورة جوان 2014 علوم تجريبية)

التمرين 01 :

❶ نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n=e^{\frac{1}{2}-n}$

(e هو أساس اللوغاريتم النيبيري).

1) إثباتأن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(u_n) متتالية هندسية إذا تحقق ما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1}=u_n\times q$

حيث q عدد حقيقي ثابت.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}=e^{\frac{1}{2}-(n+1)}=e^{\frac{1}{2}-n-1}=e^{\frac{1}{2}-n}.e^{-1}=\frac{1}{e}.u_n$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها : $q=\frac{1}{e}=e^{-1}$

وحدها الأول : $u_0=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

2) حساب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}-n}=0$$

نستنتج أن (u_n) متتالية متقاربة نحو العدد 0.

3) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n$$

$$S_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\sqrt{e}\frac{1-\left(e^{-1}\right)^{n+1}}{1-e^{-1}}$$

$$=\sqrt{e}.\frac{1-e^{-n-1}}{1-e^{-1}}$$

0 نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln u_n$

1) عبارة (v_n) بدلالة n ثم استنتاج نوع المتتالية (v_n) :

$$v_n = \ln u_n = \ln\left(e^{\frac{1}{2}-n}\right) = \frac{1}{2} - n$$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} - (n+1) = \frac{1}{2} - n - 1 = v_n - 1$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -1$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{2}$

2) أ- حساب بدلالة n العدد P_n :

$$P_n = \ln(u_0 u_1 u_2 \ldots\ldots u_n)$$
$$= \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ldots\ldots + \ln(u_n)$$
$$= v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n$$
$$= \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{(n+1)(1-n)}{2}$$

ب- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$

$$P_n + 4n > 0$$
$$\frac{(n+1)(1-n)}{2} + 4n > 0$$
$$\frac{-n^2+1}{2} + 4n > 0$$
$$\frac{-n^2+8n+1}{2} > 0$$
$$-n^2 + 8n + 1 > 0$$

ومنه $n \in [0;8]$ و n عدد طبيعي.

أي: $n \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$

التمرين 02 :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;-1;-2)$ ، $B(1;-2;-3)$ و $C(2;0;0)$

1) أ- إثبات أن A و B و C ليست في استقامية.

$\vec{AB}(0;-1;-1)$ و $\vec{AC}(1;1;2)$

ولدينا : $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1}$ ومنه الشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا، ومنه النقط A و B و C ليست في استقامية.

ب) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) :

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستوى (ABC) فإنها تحقق :

$$\vec{AM} = \alpha.\vec{AB} + \beta.\vec{AC}$$ حيث : $\alpha \in R$

ومنه :
$$\begin{cases} x-1 = \alpha.0 + \beta.1 \\ y+1 = \alpha.(-1) + \beta.1 \\ z+2 = \alpha.(-1) + \beta.(2) \end{cases}$$

ومنه :
$$\begin{cases} x = \beta + 1 \\ y = -\alpha + \beta - 1 \\ z = -\alpha + 2\beta - 2 \end{cases}$$

ج - التحقق أن $x + y - z - 2 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

تعوض إحداثيات النقطة A في المعادلة نجد : $0 = 0$

تعوض إحداثيات النقطة B في المعادلة نجد : $0 = 0$

تعوض إحداثيات النقطة C في المعادلة نجد : $0 = 0$

ومنه المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي :

$$x + y - z - 2 = 0$$

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي:

$(P): x - y - 2z + 5 = 0$ و $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$

إثبات أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases} ; (t \in R)$$

$\vec{n}(1;-1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوى (P)

$\vec{n'}(3;2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوى (Q)

لدينا $\frac{1}{3} \neq \frac{-1}{2}$ ومنه الشعاعان $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ غير مرتبطين خطيا

ومنه المستويين (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).

نعوض $\begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}$ في المعادلة $x + y - z - 2 = 0$:

$t - 3 - (-t) - 2(t+1) + 5 = 0$ أي $0 = 0$

ومنه : $(\Delta) \subset (Q)$

ومنه : (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) .

3) تعيين تقاطع المستويات (ABC) ، (P) و (Q) .

نعلم أن : $(P)\cap(Q)=(\Delta)$

نعوض $\begin{cases}x=t-3\\y=-t\\z=t+1\end{cases}$ في المعادلة الديكارتية للمستوي و(ABC).

نجد : $t-3-t-t-1-2=0$

4) تعيين المجموعة (Γ) للنقط M بحيث :

$$\sqrt{6}\times d(M,(P))=\sqrt{14}\times d(M,(Q))$$

$$\sqrt{6}.\frac{|x-y-2z+5|}{\sqrt{6}}=\sqrt{14}.\frac{|3x+2y-z+10|}{\sqrt{14}}$$

$$|x-y-2z+5|=|3x+2y-z+10|$$

$$(x-y-2z+5)^2=(3x+2y-z+10)^2$$

$$(x-y-2z+5)^2-(3x+2y-z+10)^2=0$$

$$[4x+y-3z+15].[-2x-3y-z-5]=0$$

ومنه: $4x+y-3z+15=0$

أو $2x+3y+z+5=0$

وعليه فإن المجموعة (Γ) هي : $(P_1)\cup(P_2)$

حيث (P_1) مستو معادلته : $4x+y-3z+15=0$

و(P_2) مستو معادلته : $2x+3y+z+5=0$

التمرين03 :

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z

حيث : $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

أي : $z-i=0$ ومنه : $z=i$

أو : $z^2-2z+5=0$

$$\Delta=-16=(4i)^2$$

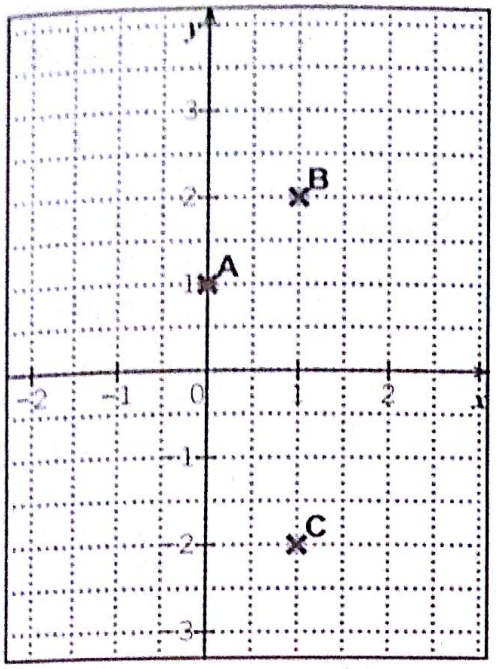
ومنه : $z_1=\frac{2-4i}{2}=1-2i$ و $z^2-2z+5=0$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

$$S=\{i;1-2i;1+2i\}$$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول cm)، تعطى النقط A وB وC التي لواحقها : $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ و $z_C=1-2i$ على الترتيب.

أ - إنشاء النقط A وB وC.



ب - إيجاد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

$H\in(BC)$ ومعادلة (BC) هي : $x=1$

والمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة H وعمودي على (BC) معادلته هي : $y=1$.

وعليه فإن النقطة H هي نقطة تقاطع (Δ) و (BC).

أي $H(1,1)$ ومنه $z_H=1+i$

جـ - حساب مساحة المثلث ABC.

$$S=\frac{AH.BC}{2}$$

$$AH=|Z_H-Z_A|=|1|=1$$

$$BC=|Z_C-Z_B|=|-4i|=4$$

ومنه : $S=2cm^2$

3) ليكن S التشابه الذي مركزه A ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - تعيين الكتابة المركبة للتشابه S.

العبارة المركبة للتشابه S هي من الشكل: $z'=Az+B$

حيث : $|a|=\frac{1}{2}$ و $\arg(a)=\frac{\pi}{2}$ ومنه: $a=\frac{1}{2}i$

ومنه: $Z' = \frac{1}{2}iZ + b$

وبما أن S مركزه A : $Z_A = \frac{1}{2} i Z_A + b$

$$b = Z_A - \frac{1}{2}iZ_A = \frac{1}{2} + i$$

ومنه الكتابة المركبة لـ S هي : $Z' = \frac{1}{2}.iZ + \frac{1}{2} + i$

ب - إثبات أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2} cm^2$

لدينا : $S(A) = A$ و $S(H) = H'$ و $S(B) = B'$ و $S(C) = C'$

ولدينا : $AH' = \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2}$ و $B'C' = \frac{1}{2} BC = 2$

ومنه مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S هي L.

حيث : $L = \frac{AH'.B'C'}{2} = \frac{1}{2} cm^2$

4) M نقطة لاحقتها z ؛ عين مجموعة النقط M حيث

$$|z| = |iz + 1 + 2i|$$

نعلم أن: $|z| = OM$

$$|iz + 1 + 2i| = |i(z - (-2 + i))| = |i||z - z_D| = DM$$

ومنه: $OM = DM$

ومنه مجموعة النقط M هي محور القطعة المستقيمة $[OD]$

حيث $D(-2;1)$.

التمرين 04 :

0 لتكن g الدالة العددية المعرفة على IR كما يلي :

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

1) أ - حساب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ ؛ $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$$

ب - دراسة اتجاه تغير الدالة g على IR .

من أجل كل $x \in R$: $g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

إشارة $g'(x)$: $\Delta = (8)^2 - 4.6.7 = -104$

ومنه $g'(x) > 0$ من أجل كل $x \in R$.

وبالتالي g متزايدة تماما على IR.

جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) أ - إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث :

$$0.7 < \alpha < 0.8$$

g مستمرة ومتزايدة على IR

$g(0.7) \approx -0.37$ و $g(0.8) \approx 0.06$

أي : $g(0.7) \times g(0.8) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.7 < \alpha < 0.8$

ب - استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$+$	

❷ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

1) حساب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

2) أ -إثبات أنه من أجل كل x من IR :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+(1-3x)}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{2x^3 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + 1 + 1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

$$= \frac{2x^3 - 4x + x + 2}{2(2x^2 - 2x + 1)} = \frac{2(x^3 - 2x + 1)}{2(2x^2 - 2x + 1)} = f(x)$$

ب - استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعين معادلته.

لدينا : $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-3x}{4x^2}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{-3}{4x}=0$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

معادلته : $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ج - أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و (Δ).

$$f(x)-y=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

إشارة $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)$ من إشارة $1-3x$ وعليه :

(C_f) يقع فوق (Δ) لما $x\in\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

(C_f) يقع تحت (Δ) لما $x\in\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

(C_f) يقطع تحت (Δ) في النقطة : $A\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

3) أ-إثبات أن من أجل كل x من IR:

$$f'(x)=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

حيث f' مشتقة الدالة f.

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2)(2x^2)-2x+1-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{6x^4-6x^3+3x^2-4x^2+4x-2-4x^4+8x^2-4x+2x^3-4x+2}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^4-4x^3+7x_2-4x}{(2x_2-2x+1)^2}=\frac{x(2x^3-4x_2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{x\cdot g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x\,g(x)$ لأن المقام دوما موجب

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x	-	0	+		+		
$g(x)$	-		-	0	+		
$xg(x)$	+	0	-	0	+		

وعليه : f متزايدة على المجالين : $]-\infty,0]$ و $[\alpha;+\infty[$

f متناقصة على المجال $[0;\alpha]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) حساب $f(1)$ ثم حل في IR المعادلة $f(x)=0$.

$f(1)=0$

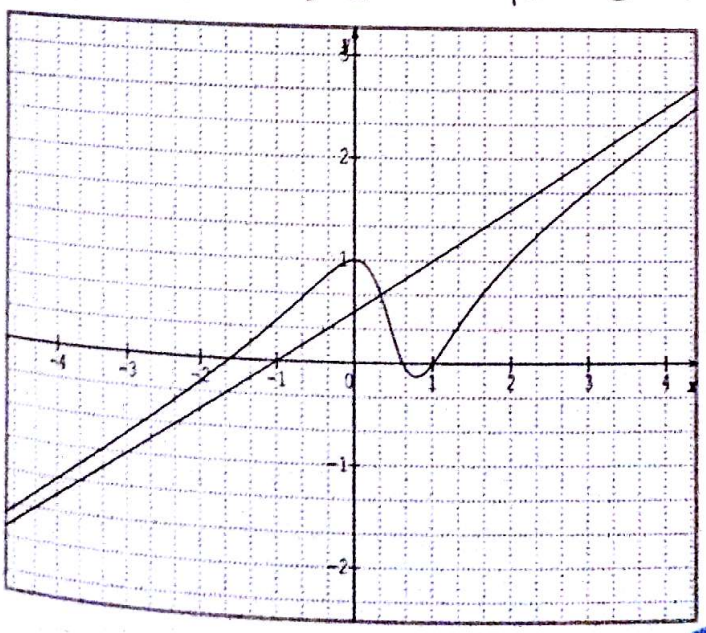
$f(x)=0$ يعني : $x^3-2x+1=0$

أي : $(x-1)(x^2+x-1)=0$

وبالتالي : $x-1=0$ أو $x^2+x+1=0$

ومنه : $x=1$ أو $x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ و $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).



) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ وكما يلي:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

-التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - 2$

$$f(x) - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2$$

$$= \frac{x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 2x + 1}$$

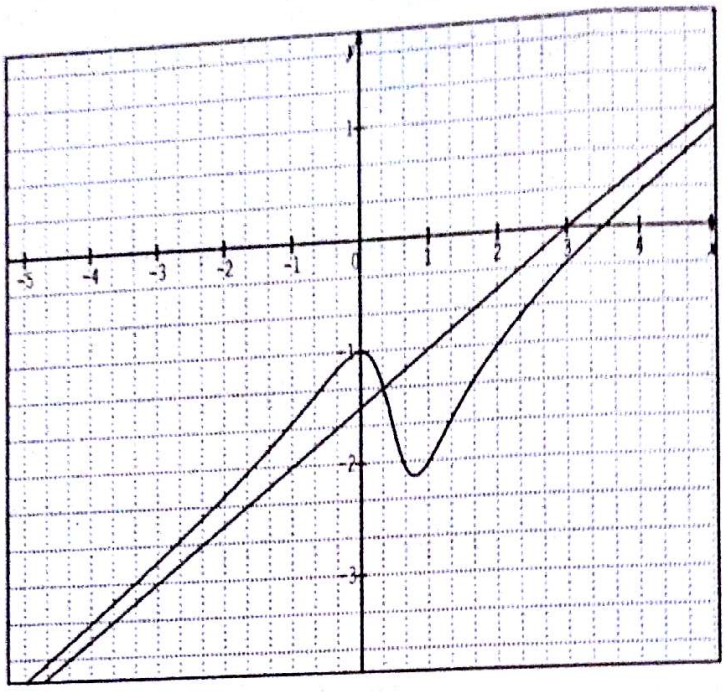
$$= \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x)$$

- استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط لب تعيينه. ثم أنشئ (C_h).

لدينا : $h(x) = f(x) - 2$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(0;-2)$

أنشاء (C_h) :



يمكنكم التواصل معنا من خلال صفحتنا الرسمية

على موقع التواصل الاجتماعي

facebook

www.facebook.com/ORmathsDZ

تم تحميل هذا الملف من موقع الأستاذ راحيس عمر ORmathsDZ